Dugga 3 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GULA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Rangen till en matris är dimensionen till dess radrum eller kolonnrum (att dessa har samma dimension kan förklaras utifrån en echelonform till matrisen : se Theorem 14, p.265). Alltså kan rangen inte överstiga varken antalet rader eller kolonner i matrisen, så rangen till en 3×5 matris kan inte vara större än 3. Det kan vara vilket som helst tal mellan 0 och 3.

(b) Detta är SANT. Det komplexa talet λ är ett egenvärde till matrisen A om och endast om $\det(A - \lambda I_n) = 0$, dvs om och endast om matrisen $A - \lambda I_n$ inte är inverterbar. Därför är *noll* ett egenvärde till A om och endast om A själv inte är inverterbar. Se p.312-313 i boken.

(c) Detta är SANT. Att varje vektor i V har NÅGON framställning som en linjär kombination av de utvalda vektorerna innebär att de spänner upp V. Att varje vektor har en UNIK sådan framställning innebär att de utvalda vektorerna är linjärt oberoende. Därmed är båda kraven för en bas uppfyllda.

(d) Detta är FALSKT. Notera att $x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$. Den givna mängden (kalla den för W) är alltså unionen av två linjer i planet, nämligen x- och y-axlarna. Den är sluten under skalärmultiplikation men ej under addition. T.ex. både $(1, 0)$ och $(0, 1)$ ligger i W men inte deras summa $(1, 1)$.

2. Låt $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ vara standardbasen för $\boldsymbol{P}_2$ och kalla den givna basen för $\mathcal{C}$. I Lays notation, det är givet att

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

och det som sökes är $[p]_{\mathcal{C}}$.

Metod 1 (indirekt) : Basbyte formeln

Vi har basbyte formeln (Theorem 15, p.273)

$$[p]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [p]_{\mathcal{B}},$$

medan att $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ är inversen till $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} := P$. Så vi måste först invertera matrisen P. Detta görs på sedvanligt sätt : sekvensen av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_1, \quad R_1 \mapsto 2R_1 - R_3,$$
$$R_1 \mapsto R_1 + R_2, \quad R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1, \quad R_2 \mapsto -\frac{1}{2}R_2, \quad R_3 \mapsto \frac{1}{2}R_3,$$

förvandlar augmented-matrisen $(P|I_3)$ till $(I_3|P^{-1})$ där

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt basbyteformeln har vi då att

$$[p]_{\mathcal{C}} = P^{-1} \cdot [p]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notera att vad detta innebär explicit är att

$$3 + t + t^2 = 0 \cdot (1 + t - t^2) + 1 \cdot (1 - t - t^2) + 2 \cdot (1 + t + t^2).$$

Metod 2 (direkt) : Gauss elimination

Vi söker skalärer c_1, c_2, c_3 sådan att

$$3 + t + t^2 = c_1 \cdot (1 + t - t^2) + c_2 \cdot (1 - t - t^2) + c_3 \cdot (1 + t + t^2).$$

Genom att liksätta koefficienterna till $1, t$ resp. t^2 får vi tre ekvationer i tre obekanta, som i matrisform är just formeln

$$P \cdot [p]_{\mathcal{C}} = [p]_{\mathcal{B}},$$

med P och $[p]_{\mathcal{B}}$ som ovan och $[p]_{\mathcal{C}} = (c_1 \ c_2 \ c_3)^T$. För att lösa systemet kan man i stället för att ta fram P^{-1} bara reducera P till echelonform och baksubstituera.

Det spelar ingen roll vilken metod man använder för P^{-1} är just RREF till P i alla fall, så båda metoderna kräver lika mycket räkning.

3. Kalla

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} := \boldsymbol{v}_1, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} := \boldsymbol{v}_2, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} := \boldsymbol{v}_3.$$

Dessa är egenvektorer till A så det finns motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sådan att

$$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Då gäller att $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena så multiplicerar vi ut VL:ena i (1) helt enkelt. Alltså

$$A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{v}_1 \Rightarrow \lambda_1 = -1,$$

$$A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} = 5\boldsymbol{v}_2 \Rightarrow \lambda_2 = 5,$$

$$A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_3 \Rightarrow \lambda_3 = 2.$$

Svaret blir då

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obs! Varje kolonn i P, dvs varje egenvektor, kan bytas ut mot en multipel av sig själv, och formeln ändå stämmer. Dessutom kan man byta plats på kolonnerna så länge samma platsbyten utförs på kolonnerna i D, dvs på egenvärdena.

Lösningar till den gula versionen

1. Sant, falskt, falskt, sant.

2.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$