Dugga 1 Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Enklaste motexemplet skulle vara om två av ekvationerna var identiska. Mer allmänt, om A är en $m \times n$ matris, med $m > n$, sådan att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en entydig lösning för någon $\boldsymbol{b}$, så innebär det att $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har en entydig lösning och detta inträffar om och endast om trappstegsformen för A har $m - n$ rader av nollor (som betyder att $m - n$ av de totalt m ekvationerna i systemet är överflödiga).

(b) Detta är SANT. I trappstegsformen till A måste det finnas minst $17 - 13 = 4$ kolumner utan pivoter, och därmed finns det minst 4 fria parametrar i den allmänna lösningen till $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(Obs! Detta kan uttryckas mer kortfattat med att $\dim \mathrm{Nul}(A) \geq 4$, medan att ett plan har dimension 2. Senare i kursen ger vi en precis definition av begreppet *dimension* för ett vektorrum : se avsnitt 4.5).

(c) Detta är SANT. Se Theorem 10, Section 1.9.

(d) Detta är FALSKT. Snarare gäller att kolumnerna är linjärt oberoende i så fall (eq.(3), page 66 i boken). Notera att det kan hända att raderna är också linjärt oberoende i så fall, men det är inte alltid så. I ett motexempel måste dock antalet rader vara mer än antalet kolumner : se Theorem 14, Section 4.6. Ett explicit motexempel är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 (a) Talen blir konstiga så vi ströк denna uppgift. Här är ett enklare exempel för att illustrera metoden. Mstrisen man börjar med är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Först utför vi radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

som tar matrisen till trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då fortsätter vi med

$$R_1 \mapsto 5R_1 - R_2, \quad R_1 \mapsto \frac{1}{5}R_1, \quad R_2 \mapsto \frac{1}{5}R_2,$$

som frambringar den reducerade trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) *Metod 1 : Bak substitution*

Sätt $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Ettorna i koefficientmatrisen är pivotpositionerna och ligger i kolumner 1,2 och 4. Därmed kommer x_3 och x_5 att vara de fria variablerna. De tre ekvationerna i systemet, i omvänd ordning, blir

$$\begin{aligned} x_4 + 8x_5 &= 1, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 1, \end{aligned}$$

och, i termer av de fria parametrarna, räknar vi fram i tur och ordning att

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 - 8x_5, \\ x_2 &= -1 - 3x_3 + 20x_5, \\ x_1 &= -1 + 12x_3 - 22x_5. \end{aligned}$$

Lösningsmängden består alltså av alla vektorer i $\boldsymbol{R}^5$ på formen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 20 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där x_3 och x_5 är godtyckliga reella tal.

Metod 2 : Fortsatt reduktion till RREF

Man kan i stället utföra följande radoperationer på den utökade matrisen

$$R_1 \mapsto R_1 - 3R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 + R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - 2R_3,$$

och därmed ta fram den reducerade trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -12 & 0 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \end{array}\right].$$

Från detta kan lösningen skrivas ner direkt, och det blir som ovan.

3. Kalla avbildningens matris för M_T. Dess kolumner är $T(\boldsymbol{e}_1)$ och $T(\boldsymbol{e}_2)$. Vi räknar ut dessa en i taget.

Rotationen tar $(1,0)$ till $(\cos 30, \sin 30) = \left(\sqrt{3}/2, 1/2\right)$. Resultatet av speglingen därefter är att x-koordinaten byter tecken så vi hamnar i punkten $\left(-\sqrt{3}/2, 1/2\right)$. Alltså är

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

PSS tar rotationen $(0,1)$ till $(\cos 120, \sin 120) = (-\cos 60, \sin 60) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Efter speglingen hamnar vi då i piunkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Därmed gäller att

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

och följdaktligen att

$$M_T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi att

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den orangea versionen

1. Falskt, sant, sant, falskt.

2 (b) Lösningsmängden består av alla vektorer i $\mathbb{R}^5$ på formen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -37 \\ 31 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där x_3 och x_5 är godtyckliga reella tal.

3.

$$M_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$