Dugga 3 Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. En $n \times n$ matris är inverterbar om och endast om den har inte noll som ett egenvärde (Theorem (s), Section 5.2).

(b) Detta är SANT. För om $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ är fixpunkter och c_1, c_2 skalärer så gäller, pga lineariteten hos T, att

$$T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2,$$

dvs $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ är också en fixpunkt. Därmed är fixpunktmängden sluten under addition och skalärmultiplikation och följdaktligen ett underrum i V.

(c) Detta är SANT. Dimensionen av ett vektorrum är lika med den maximala storleken hos en mängd linjärt oberoende vektorer i rummet (se Theorem 9, Section 4.5).

(d) Detta är FALSKT. Snarare är $\text{rang}(A) = 11$ ty för en $m \times n$ matris A gäller alltid (Theorem 14, Section 4.6) att

$$\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

2. Vi har koordinatbyteformeln (Theorem 15, Section 4.7)

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}. \tag{1}$$

Dessutom är

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P}\,\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \\ | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Det är dessutom givet att $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Insättning av allting i (1) ger alltså att

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

ANMÄRKNING : Detta säger att $\boldsymbol{x} = -36\boldsymbol{c}_1 + 23\boldsymbol{c}_2$. Man kan kolla att

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = (-36) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 23 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Man kan kolla att följden av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_2 \mapsto -R_2$$

tar A till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fall 1 : Row(A)

Dimensionen är två och de två överlevande raderna i U utgör en bas därtill, dvs

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fall 2 : Col(A)

Dimensionen är också två. Pivoten finns i de två första kolumnerna i U, så motsvarande kolumner i A utgör en bas till dess kolonnrum, dvs

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fall 3 : Nul(A)

Från U ser vi att de fria variablerna är x_3 och x_4. Nollrummet är alltså två dimensionellt också. Baksubstitution ger i tur och ordning

$$4x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2}x_3 - \frac{7}{4}x_4,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2\left(-\frac{5}{2}x_3 - \frac{7}{4}x_4\right) - 3x_3 - 4x_4 = 2x_3 - \frac{1}{2}x_4.$$

Så nollrummet består av alla vektorer i $\mathbb{R}^4$ på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ -\frac{5}{2}x_3 - \frac{7}{4}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De två vektorerna ovan utgör en bas till nollrummet.

Lösningar till den orangea versionen

1. Sant, falskt, sant, falskt.

2. $\begin{bmatrix} 23 \\ -4 \end{bmatrix}$.

3. Alla tre har dimension två.

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{7}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$