Dugga 1 Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den BLÅA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GULA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Läs i boken !

(b) Detta är SANT. Det följer från Sats 6, avsnitt 1.5.

(c) Detta är FALSKT. Det kan vara så att alla fyra spänner upp bara tre dimensioner utan att det finns tre st som bara spänner upp två dimensioner. Som ett explicit exempel, tag

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notera att vektorerna i detta exempel alla ligger i ett 3-diensionellt tvärsnitt i $\mathbb{R}^4$ där $x_4 = 0$.

(d) Detta är FALSKT. Snarare gäller att kolumnerna är linjärt beroende i så fall (eq.(3), avsnitt 1.7 i boken). Notera att det kan hända att raderna är också linjärt beroende i så fall, men det är inte alltid så. I ett motexempel måste dock antalet rader vara mindre än antalet kolumner : se Theorem 14, Section 4.6. Ett explicit motexempel är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 (a) *Metod 1 : Bak substitution*

Sätt $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Pivotpositionerna i koefficientmatrisen ligger i kolumner 1,2 och 4. Därmed kommer x_3 och x_5 att vara de fria variablerna. De tre ekvationerna i systemet, i omvänd ordning, blir

$$\begin{aligned} x_4 + 3x_5 &= 1, \\ x_2 + x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1, \end{aligned}$$

och, i termer av de fria parametrarna, räknar vi fram i tur och ordning att

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 - 3x_5, \\ x_2 &= x_5, \\ x_1 &= -1 - x_3 + 4x_5. \end{aligned}$$

Lösningsmängden består alltså av alla vektorer i $\boldsymbol{R}^5$ på formen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där x_3 och x_5 är godtyckliga reella tal.

Metod 2 : Fortsatt reduktion till RREF

Man kan i stället utföra följande radoperationer på den utökade matrisen

$$R_1 \mapsto R_1 - R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - R_3,$$

och därmed ta fram den reducerade trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Från detta kan lösningen skrivas ner direkt, och det blir som ovan.

(b) Betrakta matrisen med dessa vektorer som sina kolumner

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & h \end{bmatrix}.$$

Kolumnerna är linjärt beroende om och endast om ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har en icke-trivial lösning. Eftersom A är kvadratisk så kommer detta att ske om och endast om trappstegsformen till A har en rad av nollor. Trappstegsformen tas fram genom att utföra radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

och blir till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix}.$$

Alltså är vektorerna linjärt beroende då $h = 5$.

3. Kalla avbildningens matris för A_T. Dess kolumner är $T(\boldsymbol{e}_1)$ och $T(\boldsymbol{e}_2)$, där $\boldsymbol{e}_1 = [1\ \ 0]^T$ och $\boldsymbol{e}_2 = [0\ \ 1]^T$. Vi räknar ut dessa en i taget.

Rotationen tar $(1,0)$ till $(\cos 45, \sin 45) = \big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big)$. Resultatet av speglingen därefter är att y-koordinaten byter tecken så vi hamnar i punkten $\big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\big)$. Alltså är

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

PSS tar rotationen $(0,1)$ till $(\cos 135, \sin 135) = (-\cos 45, \sin 45) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Efter speglingen hamnar vi då i punkten $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Därmed gäller att

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

och följdaktligen att

$$A_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi att

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den gula versionen

1. Sant, falskt, falskt, sant.
2 (a) Lösningsmängden består av alla vektorer i $\mathbb{R}^5$ på formen

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där x_3 och x_5 är godtyckliga reella tal.

(b) $h = 2$.

3.

$$A_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

och

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$