Dugga 2 Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den GRÖNA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Hade matrisen A varit dessutom inverterbar hade det varit sant, men annars kan man alltid hitta olika matriser B och C sådan att $BA = CA$. T.ex. säg att $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Om man tar

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

så är $BA = CA = O_2$ oberoende av värdena av b och c.

(b) Detta är FALSKT. Den allmänna formeln för inversen till en 2×2 matris lyder

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Detta medför att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Detta är SANT. Båda påståendena är ekvivalenta med att säga att matrisen A är inte inverterbar.

(d) Detta är FALSKT. Se varningen efter Sats 6, avsnitt 3.2 i boken. Se också uppgift 42 i samma avsnitt.

2 (a) Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_4 \mapsto 2R_4 - R_3,$$

så multipliceras determinanten sammanlagt med 2, och matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Den nya matrisen är triangulär så dess determinant är bara produkten av talen längs diagonalen, dvs $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$. Den ursprungliga determinanten är alltså hälften av detta, nämligen 21.

(b) Låt

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi söker en lösning $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$ till systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där A är den 4×4 matris vars kolumner är $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$. Så vi har ett vanligt Gausselimination problem vars utökad matris är från början

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right].$$

Bara en radoperation, $R_2 \mapsto R_2 - R_1$, krävs för att förvandla systemet till diagonalform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right].$$

Efter den vanliga bakåtsubstitutionen tar vi fram den entydiga lösningen $\boldsymbol{x} = [1\ -2\ -1\ 3]^T$. Alltså gäller att

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4.$$

3 (a) Man ska utföra radoperationer på den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Man kan kolla att sekvensen av radoperationer

$$R_1 \mapsto R_1 - R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - 2R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - 2R_3,$$

tar vänstra delen (dvs A) till I_3, och därmed högra delen till A^{-1}, och att den senare ges av

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Man kan kolla att följden av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

tar A till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi också avläsa att

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

OBS! Man behöver inte räkna fram L och U för att utesluta de andra tre alternativen dock. Redan (i) och (iii) kan uteslutas eftersom i en LU-faktorisering skall L ha endast ettor på diagonalen. Och redan när vi utför första radoperationen $R_2 \mapsto R_2 - R_1$ så ser vi att (iv) är fel.

Lösningar till den orangea versionen

1. Sant, falskt, falskt, falskt.
2 (a) -27.
(b)

$$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4.$$

3 (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) (iii).