Dugga 3 Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den RÖDA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GRÖNA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Enligt Sats 4.6.14 (se också sats 2.9.14) är

$$\mathrm{Rank}(A) + \dim(\mathrm{Nul}(A)) = 5.$$

Men $\mathrm{Rank}(A) \leq 3$, ty A har bara 3 rader. Då måste $\dim(\mathrm{Nul}(A)) \geq 2$.

(b) Detta är FALSKT. Snarare är $\mathrm{Rank}(A) \leq 3$, ty A har bara 3 rader, så radrummet kan inte ha en dimension högre än 3.

(c) Detta är SANT. Att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ innebär att dessa spänner upp V. Att skrivsättet är alltid entydigt innebär att vektorerna är dessutom linjärt oberoende.

(d) Detta är SANT. λ är ett egenvärde då $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Alltså är noll ett egenvärde då $\det A = 0$, dvs om och endast om A saknar invers. Se satsen efter Exempel 2 i avsnitt 5.2.

2. Vi söker skalärer c_1, c_2, c_3 sådan att

$$5 + t + 3t^2 = c_1(1 + t + t^2) + c_2(-1 + t + t^2) + c_3(1 + t - t^2).$$

Resulterande ekvationssystem kan skrivas i matrisform som

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Då vi utför på den utökade matrisen radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 2 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Efter bakåtsubstitution får vi lösningen $c_1 = 4$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$.

SVAR : Koordinatvektorn för $p(t)$ i den givna basen, som vi kan kalla för $\mathcal{B}$ säg, är $[p(t)]_{\mathcal{B}} = [4\ -2\ -1]^T$.

3. Vi beräknar

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = (-3) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att egenvärdena svarande mot våra tre egenvektorer är i tur och ordning $3, 0$ och -3. Alltså är $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den gröna versionen

1. Sant, sant, sant, falskt.
2. $[p(t)]_{\mathcal{B}} = [4\ -1\ -2]^T$.
3.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$