TMV140 Linjär algebra Z, vt 09
Kursmål

För betyget godkänd skall studenten kunna:

Vecka 1

- lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden
- förklara hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.
- använda satsen om hur pivotpositioner hänger samman med lösningars existens och entydighet i problemlösning
- förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med en vektorekvation $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$
- använda samband mellan 1.4.4 i problemlösning
- förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- skriva lösningsmängden till ett ekvationssystem på vektorform
- avgöra om en vektor är *linjär kombination* av givna vektorer
- avgöra om en given mängd av vektorer är *linjärt beroende* eller *linjärt oberoende.*
- avgöra om en given avbildning är linjär
- bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning F då $F(\mathbf{v})$ är givet för tillräckligt många vektorer $\mathbf{v}$.

Vecka 2

- addera matriser
- multiplicera matriser dels genom användning av definitionen, dels med *rad* • *kolonn*-metoden.
- utnyttja räknereglerna i sats 2 vid beräkningar
- ge exempel som visar att
  - matrismultiplikationen inte är kommutativ.
  - annulleringslagen *inte* gäller , man kan alltså inte "förkorta": $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.
  - en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
- tillämpa sats 5 och 6 i problemlösning
- beräkna matrisinvers med hjälp av sats 4 och metoden i exempel 7, avsnitt 2.2.
- tillämpa sats 8 i problemlösning
- bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.

Vecka 3

- beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av sats 1
- förenkla kalkylerna med hjälp av sats 2, 3 och 5
- utnyttja determinant för att avgöra om en matris är inverterbar
- tillämpa sats 6 i problemlösning

Vecka 4

- definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet *nollrum*, $\text{Nul}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\text{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Nul}(A)$.
- definiera begreppet *kolonnrum*, $\text{Col}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\text{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Col}(A)$.
- definiera begreppen *linjärt beroende mängd av vektorer*, *linjärt oberoende mängd av vektorer* och *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
- definiera begreppet *dimension* av ett underrum i $\mathbb{R}^n$
- definiera begreppet *rang* för en matris.
- tillämpa *Rang-satsen* vid problemlösning
- tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning

Vecka 5

- definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde.*
- förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
- bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
- bestämma egenvektorsbas till en matris
- *diagonalisera* en matris
- beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering
- utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.
- växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$, Sats 4.7.15 är central.

Vecka 6

- beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räknereglerna för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
- bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
- förklara vad som menas med $W^{\perp}$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
- tillämpa sats 3 vid problemlösning.
- förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum W och tillämpa sats 5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W.
- använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning

- förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum W.
- tillämpa sats 8 för att dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^{\perp}$ då en ortogonal bas för W är känd.
- förklara vad som menas med en ortogonal matris.
- tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$ utgående från en annan bas för W.
- förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning och tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
- tillämpa satserna 1 – 3 i kapitel 7.1 vid problemlösning. Spektralsatsen (sats 3) är extra viktig.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Vecka 1

- förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.
- bevisa sats 1.4.4
- bevisa sats 1.5.6
- redogöra för begreppen *linjär kombination*, *linjärt beroende* och *linjärt oberoende*
- förklara hur begreppen ovan hänger samman med egenskaper hos ekvationssystem, matrisekvationer och vektorekvationer
- bevisa sats 1.7.8 och 1.7.9
- bestämma standardmatrisen till linjära avbildningar som ges av en geometrisk beskrivning
- besvara frågor om injektivitet och surjektivitet för linjära avbildningar.

Vecka 2

- bevisa att $A(BC) = (AB)C$.
- förklara varför metoden i exempel 7, avsnitt 2.2, ger det önskade resultatet.
- bevisa sats 8.

.

Vecka 3

- bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$
- redogöra för determinantens tolkning som area- eller volymskala för en linjär avbildning

Vecka 4

- bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ utnyttja att dessa har olika tolkningar beroende på vad matrisen representerar.
- formulera och bevisa *Rang-satsen.*
- definiera begreppet underrum i ett vektorrum, kunna avgöra om en given delmångd av ett känt vektorrum är ett underrum
- definiera begreppen *bas* och *dimension* för ett vektorrum
- bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
- definiera begreppet *dimension* för vektorrum.
- förklara varför de olika egenskaperna som nämns i *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* är ekvivalenta.

Vecka 5

- förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer
- växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$.
- bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V, relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V
- växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar
- tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.

Vecka 6

- bevisa sats 3.
- bevisa att en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
- bevisa sats 7 då U är en ortogonal maris.
- förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonal bas.
- förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.