MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: V09 kl. ospec.

Tentamen Telefonvakt: ingen

ingen

Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 20 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (10p)

2. (a) Invertera matriserna (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Med hjälp av dessa inverser, lös matrisekvationen (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Med hjälp av detta, lös följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

4. (a) Förklara vad som menas med en *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}^T$. (4p)

Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) För alla $n \times n$ matriser A, B, C gäller att $A(BC) = (AB)C$.

(b) Om matriserna A och B är radekvivalenta så har de samma nollrum.

(c) Om A är en kvadratisk matris med egenvärdet noll så är A inte diagonaliserbar.

(d) För alla $n \times n$ matriser A och B gäller att $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Ange formeln för minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och förklara vad det är som minimeras enligt formeln.

(b) Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet (6p)

$$x + 2y = 4, \quad x - y = 3, \quad 2x + y = 5.$$

7. Låt $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ vara den linjära avbildning som ges av

$$T(p(t)) = \int_1^t [2p(s) + 3p'(s)]\, ds.$$

(a) Ange matrisen för T m.a.p. standardbaserna $\{1, t\}$ för $\mathbb{P}_1$ och $\{1, t, t^2\}$ för $\mathbb{P}_2$.

(b) Är T injektiv och/eller surjektiv ? Förklara. (6p)

8. (a) Definiera begreppet *linjärt oberoende vektorer.*

(b) Bevisa att om $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende och $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{b}\}$ är linjärt beroende så måste $\mathbf{b}$ vara en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

(c) Låt $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ vara parvis ortogonala nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$, dvs $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ då $i \neq j$. Bevisa att $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ är en bas i $\mathbb{R}^n$.

Anonym kod	Linjär algebra ZV09	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange LU-faktoriseringen av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange det reella tal a för vilket $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ inte är linjärt oberoende där (2p)

$$\mathbf{v}_1 = [1\ 1\ 1]^T, \ \ \mathbf{v}_2 = [-1\ 2\ 3]^T, \ \ \mathbf{v}_3 = [2\ -1\ a]^T.$$

Lösning:

Svar: ....

(d) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på respektive $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ och bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Ange en ON-bas för planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = [1\ 2\ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [2\ 5\ 0]^T$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Svar

F.1 (a) Uppgift 1(f) på 2009-01-15..
(b) Uppgift 1(a) på 2008-08-23.
(c) Uppgift 1(b) på 2008-01-19.
(d) Uppgift 1(d) på 2008-08-23.
(e) En ON-bas är t.ex. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ där

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

F.2

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -9 & 16 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

F.3 Se uppgift 4 på 2007-03-17.

F.4 (a) Vektorerna $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ sägs utgöra en *bas* för ett underrum V i $\mathbb{R}^n$ om de är linjärt oberoende och spänner upp V.
(b) Uppgift 5(a) på 2008-01-19.

F.5 Sant, sant, falskt, sant.

F.6 (a) $(A^TA)\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Det som minimeras är avståndet mellan $\mathbf{b}$ och $\mathrm{Col}(A)$. M.a.o. vektorn $A\hat{\mathbf{x}}$ är ortogonalprojektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$.
(b) Uppgift 5(a) på 2008-03-12.

F.7 (a)

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) T är injektiv, ty nollrummet av matrisen ovan består endast av nollvektorn (som man kan kontrollera). T är dock inte surjektiv ty $\mathbb{P}_2$ har högre dimension än $\mathbb{P}_1$. Ett annat sätt att säga det är att kolonnrummet av matrisen ovan är inte hela $\mathbb{R}^3$, ty det finns ju bara 2 kolumner.

F.8 Uppgift 7 på 2009-01-15.