Varianter på övningsuppgifterna

Följande är en lista över de uppgifter på övningstentorna som har lagts ut av lärarna på de andra linjerna (E,V,M) som skiljer sig avsevärt från de uppgifter jag har lagt ut. Eftersom vi skall ha gemensamma tentamensuppgifter nu på lördag så uppmanas ni att kolla varianterna nedan också. De innehåller inte någonting som vi inte har gått igenom också och ligger på samma nivå som mina motsvarande uppgifter.

NOTATION : Notationen **Ö a.b** innebär att uppgiften svarar mot det jag hade som uppgift nr. **b** på övningstenta nr. **a**.

Ö 2.4. (a, 2p) Förklara vad som menas med en *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
(b, 4p) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm koordinatvektorn för $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$, dvs beräkna $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$.

Ö 2.8. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är **sant** eller **falskt**. Ett sant påstående skall motiveras (du får vid behov hänvisa till satser i kursen) och varje falskt påstående skall motiveras genom motexempel. Alla vektorer i uppgift (a) och (b) tillhör ett $\mathbb{R}^n$.

Rätt svar med god motivering ger upp till 2 poäng. Enbart svar ger noll poäng, oavsett det är rätt eller fel.

(a) Om $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{b}\}$ är linjärt beroende så måste $\boldsymbol{b}$ vara en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m$.
(b) Om $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m\}$ är linjärt oberoende och $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{b}\}$ är linjärt beroende så måste $\boldsymbol{b}$ vara en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m$.
(c) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$, så är $\det(A^T A) = 0$.

Ö 3.4. Ett plan i $\mathbb{R}^3$ spänns upp av vektorerna $[-1\ 1\ 1]^T$ och $[1\ 2\ 2]^T$.

(a, 3p) Bestäm en ortogonalbas för planet.

(b, 3p) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $[0\ 2\ 0]^T$ på planet.

Ö 3.6. Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter och U mängden av alla polynom i $\mathbb{P}_2$ som uppfyller $p'(1) = 0$.

(a) Visa att U är ett underrum av $\mathbb{P}_2$.

(b) Bestäm en bas för U.

(c) Bestäm koordinatvektorn för polynomet $3t^2-6t+5$ i den bas du valt.

Ö 3.7. Bestäm i standardbasen matrisen M för den linjära transformation som vrider $\mathbb{R}^3$ kring en axel genom origo med riktningsvektor $[1\ 0\ 1]^T$ en åttondels varv åt valfritt håll.

Ö 3.8. Låt A vara en $n \times n$ matris.

(a) Definiera begreppet : A är en *ortogonalmatris.*

(b) Bevisa att om A är en ortogonalmatris, så är $||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$ för varje $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Bevisa att om λ är ett egenvärde till en ortogonalmatris A så är $|\lambda| = 1$.

Svar

Ö 2.4. (a) Som på min tenta.

(b) $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Ö 2.8. (a) FALSKT: ta t ex $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_m$ (ej nollvektorn) och $\boldsymbol{b}$ ej parallell med dessa.

(b) SANT: Se min tenta.

(c) SANT: A har fler kolonner än rader och därmed har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ icke-triviala lösningar. Dessa är också lösningar till ekvationen $A^TA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Den kvadratiska matrisen A^TA har då determinanten noll (Invertible Matrix Theorem + sats 4 i kapitel 3).

Ö 3.4. (a) T.ex. $\{[-1\ 1\ 1]^T, [2\ 1\ 1]^T\}$.

(b) $[0\ 1\ 1]^T$.

Ö 3.6. (a) Konstatera att nollpolynomet tillhör U och att U är slutet under addition och multiplikation med skalärer.

(b) En bas är t.ex. $\{1, t^2 - 2t\}$.

(c) I basen ovan är koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ö 3.7. Antingen

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & -2 & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 2-\sqrt{2} & 2 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

eller

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 & 2-\sqrt{2} \\ -2 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2-\sqrt{2} & -2 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

beroende på åt vilket håll man vrider.

Ö 3.8. **(a)** A kallas ortogonalmatris om $A^{-1} = A^T$. Ett annat sätt att uttrycka det är att kolonnerna i A utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^n$.
(b) Följer av $||A\boldsymbol{x}||^2 = (A\boldsymbol{x})^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A^{-1} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T I_n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}||^2$.
(c) Låt λ vara ett egenvärde och $\boldsymbol{x}$ en tillhörande egenvektor. Från **(b)** är $||A\boldsymbol{x}|| = ||x||$. Men $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, så $||A\boldsymbol{x}|| = ||\lambda\boldsymbol{x}|| = |\lambda|||\boldsymbol{x}||$. Därav följer att $|\lambda| = 1$.