TMV140 Linjär algebra Z, vt 09
Vecko–PM läsvecka 4

Lay: 2.8 - 2.9, 4.1 - 4.3, 4.4 - 4.6 Underrum i $\mathbb{R}^n$, dimension och rang. Vektorrum.

Innehållet i avsnitten 2.8 och 2.9 täcks av kapitel 4, men presenterar begreppen på ett mer konkret sätt. Samtidigt behövs den mer abstrakta synen som ges i kapitel 4. Därför kommer vi att behandla kapitlen samtidigt och i viss mån hoppa fram och tillbaka. **Även om du koncentrerar dig på 2.8-9 så bör du lösa en stor del av övningsuppgifterna ur kap.4**. Centrala begrepp är *underrum, bas för underrum, dimension och rang*, som preciserar en del vaga idéer vi mött tidigare. Underrum i $\mathbb{R}^3$ är linjer och plan genom origo, dessa har dimension 1 respektive 2, en bas består av en respektive två vektorer som spänner upp linjen/planet. I kapitlet generaliseras detta till högre dimensioner. Särskilt viktigt är nollrum och kolonnrum till matriser. Nollrummet är samma som lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kolonnrummet är samma som mängden av alla $\mathbf{b}$ för vilka ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent. I sats 2.8.12 bevisas att de är underrum och av beviset framgår hur detta hänger samman med matrismultiplikationens linjära egenskaper.
Matrisrang, som är dimensionen för kolonnrummet, är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. Rangsatsen beskriver samspelet mellan dimensioner för nollrum och kolonnrum.

Basbegreppet är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer* vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Det är väsentligt att du lär dig bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 2.8.13 beskriver hur man gör, du bör kunna bevisa den satsen.

Satsen om inverterbara matriser får ytterligare ett par viktiga punkter i detta kapitel. Den borde för övrigt inkludera även sats 3.2.4.

Kapitel 4 innebär alltså en generalisering av 2.8 och 2.9. Genom att konkretisera och jämföra med 2.8-9 så blir det mer gripbart. I övningsuppgifterna handlar det ofta om $\mathbb{R}^n$ och matriser.. Idén i kapitlet är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper och det är först genom att gå till den allmänna teorin vi kan t.ex. hantera koordinatbyten (som kommer nästa vecka) riktigt bra.

I **4.1** är sats 1 med vars hjälp man oftast enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum extra viktig.

Exempel 4.2.8 och 4.2.9 ger intressanta kopplingar till föregående kurs. Liksom för linjära ekvationssystem ges allmän lösning för vissa differentialekvationer av en partikulärlösning och allmänna lösningen till homogena ekvationen. Här får denna analogi en förklaring.

I **4.5** ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension, Sats 11 som visar att om H är äkta underrum i V så har H lägre dimension än V och sats 12, bassatsen, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas. Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.

Mål: För betyget godkänd skall du kunna:

- definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet *nollrum*, $\mathrm{Nul}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\mathrm{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\mathrm{Nul}(A)$.
- definiera begreppet *kolonnrum*, $\mathrm{Col}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\mathrm{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\mathrm{Col}(A)$.
- definiera begreppen *linjärt beroende mängd av vektorer*, *linjärt oberoende mängd av vektorer* och *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet *dimension* av ett underrum i $\mathbb{R}^n$
- definiera begreppet *rang* för en matris.
- tillämpa *Rang-satsen* vid problemlösning
- tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ utnyttja att dessa har olika tolkningar beroende på vad matrisen representerar.
- formulera och bevisa *Rang-satsen.*
- definiera begreppet underrum i ett vektorrum, kunna avgöra om en given delmångd av ett känt vektorrum är ett underrum
- definiera begreppen *bas* och *dimension* för ett vektorrum
- bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
- definiera begreppet *dimension* för vektorrum.
- förklara varför de olika egenskaperna som nämns i *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* är ekvivalenta.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
2.8	PP, 1, 3, 7, 9, 15-20, 23, 25	37	21, 22, 27, 31
2.9	PP, 1, 5, 7, 11, 13, 15		17 -26
4.1	PP, 1, 3, 4, 7	11, 13, 15, 19, 35, 36	20, 23, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 31, 37	25, 27, 30, 33, 39
4.3	PP, 3, 4, 9, 10	15, 27, 37, 38	21, 23, 29, 30, 36
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	21, 33	19, 27, 29, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	35	7, 9, 13, 15, 17, 21, 25, 30