TMV140 Linjär algebra Z, vt 09
Vecko–PM läsvecka 6

Lay: 6.1-6.6 Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden 7.1-7,2 Reella symmetriska matriser och diagonalisering, kvadratiska former.

I kapitel **6.1** införs *skalärprodukt, dot product* och *längd*, eller *norm* som kanske är ett bättre namn. Dessa motsvarar skalärprodukt och längd för geometriska vektorer då vektorerna ges i en ON-bas. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. Ortogonala komplementet till ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är ett begrepp som generaliserar normalen till ett plan genom origo.

I avsnitt **6.2** är begreppet ON-bas, ortonormerad bas, viktigt. **Sats 4** säger att ortogonalitet garanterar linjärt oberoende. Sats 5 visar hur lätt det är att bestämma koordinater i en ortogonal bas. Ännu enklare är det i en ON-bas, då är $x_k = \mathbf{x}{\bullet}e_k$

Projektionsformeln, som ger projektionen av en vektor på en annan,är samma somi inledande kursen. Motiveringen till formeln måste vara algebraisk eftersom vi inte har några vinklar i $\mathbb{R}^n$. Vi använde projektionsformeln i inledande kursen för att dela upp en vektor i två ortogonala komposanter, den ena med en given riktning och den andra i planet ortogonalt mot denna riktning. En vidareutveckling av denna idé kommer i sats 8 och sats 10 i **6.3**. Begreppet ortogonala matriser som nämns i förbigående i 6.2 kommer att användas mycket i kapitel 7.

I **6.4** ges Gram-Schmidt processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W. Metoden är enkel, det gäller att i varje steg använda projektionsformeln för att ersätta en vektor i basen med en som är ortogonal mot de redan bestämda vektorerna i den sökta ortogonala basen.

I avsnitt **6.5** ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning.* I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna lösning till ekvationen `Ax = b` av `x=A\b`.
Sats 13 ger metoden i en liten ask. Däremot har man inte direkt nytta av sats 14, det viktiga är att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 13 entydig lösning.
I boken definieras *minstakvadrat-felet* som $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$ då $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta-kvadrat lösningen. Ofta använder man istället *kvadratiska medelfelet* som är $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| / \sqrt{n}$ då n är antalet ekvationer i systemet. I **6.6** tillämpas metoden på t.ex anpassning av linje till mätpunkter. Minsta kvadrat-felet ökar då i allmänhet om man lägger till mätpunkter under det att kvadratiska medelfelet t.o.m. kan minska.

I kapitel **7.1** studeras diagonalisering av reella symmetriska matriser, alltså matriser som uppfyller att $A^T = A$. Spänningsmatrisen $\mathcal{S}$ vars egenvärden och egenvektorer vi behandlade förra veckan, är alltid symmetrisk. Väldigt många andra tillämpningar leder också till symmetriska matriser så resultaten i kapitlet är mycket användbara. I avsnittet ges två mycket viktiga satser. Dels sats 2, som säger att de reella symmetriska matriserna, och inga andra, alltid kan diagonaliseras med en ortogonal matris. *Spektralsatsen*, sats 3, beskriver situationen mer i detalj och ger hjälp vid problemlösning. Bevisen av satserna i kapitlet ryms inte i kursen. Utöver att man nu väljer en ortonormerad bas av egenvektorer är det ingen väsentlig skillnad på diagonalisering av symmetriska matriser och osymmetriska som behandlades i kapitel 5.3.

I kapitel 7.2 studerar vi kvadratiska former – funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ som ges av ett andragradspolynom som endast har termer av grad två, t.ex. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$. Sådana funktioner passar in i denna kurs genom att de ges av en matris A, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Matrisen A är inte entydigt bestämd, men det finns en entydigt bestämd *symmetrisk* matris som ger f. Eftersom alla symmetriska matriser kan diagonaliseras kan man alltid göra ett koordinatbyte som förenklar funktionsuttrycket. Detta ger en intressant och mycket användbar tillämpning av diagonalisering. Normalspänningen på en viss snittyta med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ i ett kontinuum ges av $\sigma = \mathbf{n}^T \mathcal{S}\mathbf{n}$. Detta är alltså en kvadratisk form, diagonalisering visar hur normalspänningen i en viss riktning samspelar med huvudspänningarna.

Mål:

För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räknereglerna för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
- bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
- förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
- tillämpa sats 3 vid problemlösning.
- förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum W och tillämpa sats 5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W.
- använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning
- förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum W.
- tillämpa sats 8 för att dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^\perp$ då en ortogonal bas för W är känd.
- förklara vad som menas med en ortogonal matris.
- tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$ utgående från en annan bas för W.

- förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning och tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
- tillämpa satserna 1 – 3 i kapitel 7.1 vid problemlösning. Spektralsatsen (sats 3) är extra viktig.
- tillämpa sats 7.2.4 **Satsen om principalaxlar** för att skriva kvadratisk form utan blandade termer.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa sats 3.
- bevisa att en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
- bevisa sats 7 då U är en ortogonal maris.
- förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonal bas.
- förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.
- förklara vad som menas med positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form och tillämpa sats 7.2.5 för klassificering av kvadratiska former.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
6.1	PP, 1, 6, 8, 11	15, 17, 24, 34	19, 26, 29
6.2	PP, 3, 5	9, 17, 21	23, 27, 29
6.3	PP, 1, 3, 5	9 11, 15, 25	21, 23
6.4	PP, 1, 3, 5	9, 11, 13, 15, 24	17, 19, 23
6.5	PP, 1, 3, 5	7, 9, 11, 15	13, 17
6.6	PP, 1, 4	7, 10, 11	
7.1	PP, 1, 2, 4 - 6, 7, 9	15, 17, 24, 37	26, 28, 29
7.2	PP, 1, 3, 5, 7	9	21a-e, 22