Dugga 1 Lösningar

Jag skall ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Förstås är det sant att OM $\boldsymbol{u}_3$ ligger i Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ så är $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ linjärt beroende. Men säg att $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ redan är multipler av varandra. Då är vilken som helst mängd som innehåller dessa två vektorer linjärt beroende. Det spelar ingen roll huruvida $\boldsymbol{u}_3$ ligger på linjen som dessa två spänner upp eller ej.

(b) Detta är SANT. Ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer i n obekanta kan representeras i matrisform som $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där A är en $m \times n$ matris, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

(c) Detta är FALSKT. Till exempel säg att $T(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1$ och $T(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1$. Då är $T(\boldsymbol{e}_1) \neq T(\boldsymbol{e}_2)$, men däremot är $T(2\boldsymbol{e}_1) = T(\boldsymbol{e}_2)$ så T är inte injektiv.

(d) Detta är SANT. Vi gick igenom det här på en föreläsning, men låt mig upprepa resonemanget för säkerhets skull. Kalla matrisen för A, säg en $m \times n$ matris med $m > n$. Avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ är då en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. För att denna ska vara surjektiv så måste ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ha en lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Men detta kan inte ske för, ty A har fler rader än kolumner, när den utökade matrisen $(A|\boldsymbol{b})$ reduceras till trappstegsform kommer vi att ha minst en rad av nollor till vänster. Och därmed om vektorn $\boldsymbol{b}$ inte får en nolla längst ner efter samma reduktion (som vi kan alltid se till genom att välja $\boldsymbol{b}$ lämpligt) så blir det inga lösningar.

2 (a) Det är lättast att bara skriva ut ekvationerna ty systemet är redan i trappstegsform. Kalla de obekanta för x_1, x_2, x_3, x_4. Då lyder ekvationerna så här :

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 3, \\ x_3 &= -1, \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Så x_2 är en fri parameter och lösningsmängden består alltså av alla vektorer i $\boldsymbol{R}^4$ på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3x_2 \\ x_2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

där x_2 är ett godtyckligt reellt tal.

(b) Låt A vara den matris som har dessa tre vektorer som sina kolumner. Sätt $\boldsymbol{b} := [b_1\ b_2\ b_3]^T$. Då vi på den utökade matrisen $(A|\boldsymbol{b})$ utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 4R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & 3 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 5b_1 \end{array}\right].$$

De vektorer $\boldsymbol{b}$ som ligger i spannet av de tre givna är alltså de som uppfyller ekvationen

$$b_3 - b_2 - 5b_1 = 0.$$

Detta är ekvationen till ett plan genom origo med normalvektor $\boldsymbol{n} = (5, 1, -1)$. Det är detta plan som de tre givna vektorerna spänner upp. Vi ser också att de är linjärt beroende för om vi tar $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ då har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ oändligt många lösningar pga raden av nollor i trappstegsformen.

3. Kalla avbildningens matris för A_T. Dess kolumner är $T(\boldsymbol{e}_1)$ och $T(\boldsymbol{e}_2)$, så vi kan skriva ner direkt att

$$A_T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi att

$$T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den orangea versionen

1. Sant, falskt, sant, falskt.
2 (a) Lösningsmängden består av alla vektorer i $\mathbb{R}^4$ på formen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

där x_2 är ett godtyckligt reellt tal.

(b) Precis samma uppgift som i den vita upplagan.

3.

$$A_T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$