Dugga 2 Lösningar

Jag skall ge fullständiga lösningar till den BLÅA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den ORANGEA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Från Sats 3.2.6 härleder vi att $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = (\det A)(\det A) = (\det A)^2$. Detta måste vara ≥ 0 ty kvadraten ur ett godtyckligt reellt tal är ≥ 0.

(b) Detta är FALSKT. Snarare gäller enligt Sats 2.1.3(d) att $(AB)^T = B^T A^T$.

(c) Detta är SANT. Se Sats 2.1.2(b).

(d) Detta är FALSKT. T.ex. tag $\boldsymbol{v} = (1/2 \;\, 1/2 \;\, 1/2)^T$. Då är $\boldsymbol{v} \in P$ ty $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0$. Men $-\boldsymbol{v} = (-1/2 \;\, -1/2 \;\, -1/2)^T$ och $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$, så $-\boldsymbol{v} \notin P$. Eftersom P är därmed inte sluten under skalärmultiplikation så kan det inte vara ett underrrum i $\mathbb{R}^3$. Notera förresten att P är inte heller sluten under addition : t.ex. om du tar $\boldsymbol{v}_1 = (1 \;\, 1 \;\, 1)^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = (-2 \;\, -1 \;\, -2)^T$ så kan du kolla att $\boldsymbol{v}_1 \in P$ och $\boldsymbol{v}_2 \in P$, men att $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \notin P$.

2 (a) Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$

så ändras inte determinanten och matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Om man nu byter plats på rad 2 och rad 4, så byter determinanten tecken och den nya matrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är övre triangulär, så dess determinant är bara produkten av talen längs huvuddiagonalen, dvs $1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) = -3$. Ty vi har bytt tecknet på determinanten längs vägen så är den ursprungliga determinanten lika med $+3$.

(b) Man ska utföra radoperationer på den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Man kan kolla att sekvensen av radoperationer

$$R_2 \mapsto -R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - 3R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 + 2R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - R_3,$$

tar vänstra delen (dvs A) till I_3, och därmed högra delen till A^{-1}, och att den senare ges av

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Man kan kolla att följden av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

tar A till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi också avläsa att

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den orangea versionen

1. Sant, falskt, falskt, sant.
2 (a) $\det(A) = 2$.
(b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$