Dugga 3 Lösningar

Jag skall ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GULA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Enligt Sats 4.6.14 så gäller för en $m \times n$ matris A att

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\operatorname{Nul}(A)) = n.$$

Så i det här fallet är $\operatorname{rank}(A) = 33 - 3 = 30$.

(b) Detta är SANT. Det följer från Sats 4.5.11 att en bas till ett underrum kan alltid utökas till en bas för hela det omgivande vektorrumet.

(c) Detta är SANT. Motsvarande egenvärde är $\lambda = 458$, ty

$$\begin{bmatrix} 227 & 231 \\ 216 & 242 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227 + 231 \\ 216 + 242 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 458 \\ 458 \end{bmatrix} = 458 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Detta är FALSKT. Vi har att

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 48 & 100 \\ 39 & 84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 100 \\ 39 & 83 \end{bmatrix}.$$

Determinanten av denna matris är $47 \cdot 83 - 39 \cdot 100 = 1$. Eftersom determinanten är skild från noll så är 1 inte ett egenvärde till A.

OBS! Du behöver inte räkna ngt för att inse att determinanten är skild från noll - det är bara att konstatera att sista decimalsiffran i talet $47 \cdot 83 - 39 \cdot 100$ måste vara 1.

2. Koordinatbytesmatrisen $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ beräknas enligt

$$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E}}{P} \, \underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = [\boldsymbol{c}_1 \; \boldsymbol{c}_2]^{-1} [\boldsymbol{b}_1 \; \boldsymbol{b}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nu konstatera att

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

som innebär att

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enligt koordinatbytesformeln har vi då att

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Anmärkning : Notera att

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Vi måste diagonalisera A. Dess karakteristiska ekvation lyder

$$(4-\lambda)(-5-\lambda) - (-14) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

som har de två rötterna $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. Näst hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 2$: Vi har

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = -3$: Vi har

$$A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Då har vi att $A = PDP^{-1}$ där

$$P = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -7 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den gula versionen

1. Falskt, sant, falskt, sant.

2.

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. Till exempel,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$