TMV140 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 24/8. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = -10x_1(t) - 7x_2(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 1. \end{cases}$$

3. (a) Förklara vad som menas med att säga att matrismultiplikation är *associativ.* (1p)

(b) Illustrera med ett exempel att matrismultiplikation inte är *kommutativ.* (1p)

(c) Lös matrisekvationen (4p)

$$(AX + B)^T = X^T C,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm värdet på a som gör vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende. (3p)

(b) Låt nu $a = 1$ och låt $\mathcal{B}$ vara basen för $\mathbb{R}^3$ bestående av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ då $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}^T$. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt V och W vara vektorrum och $T : V \to W$ en avbildning. Definiera vad som menas med

i. *Kärnan* $K(T)$ och *värdemängden* $R(T)$ till T.

ii. att T är en *linjär* avbildning.

(b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter. Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ vara den linjära avbildning som ges av

$$T[p(t)] = (t^2 + t + 1)p''(t) - (1 + 2t)p'(t) + 2p(t).$$

Ange baser för de tre underrummen $K(T)$, $R(T)$ och $K(T)^\perp$ i $\mathbb{P}_2$. (Obs! För det tredje, identifiera $\mathbb{P}_2$ med $\mathbb{R}^3$ på det vanliga sättet).

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en 45-graders 'moturs' rotation kring en axel genom origo och i riktningen $\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. (6p)

Bestäm T:s matris i standardbas på formen PMP^T (Obs! Du behöver inte multiplicera ut).

Bestäm också $T(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

7. (a) Definiera begreppet : A är en *ortogonalmatris.*

(b) Bevisa att om A är en $n \times n$ ortogonalmatris, så är $||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Bevisa att om $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till en ortogonalmatris A, så är $|\lambda| = 1$.

Lycka till!
Peter H

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 110113	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\det(AB)$.

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversen till matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Bestäm en ON-bas för planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV140, Linjär Algebra Z, 110113

1. (a) Först notera att $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Eftersom matrisen B är triangulär så är dess determinant lika med produkten av talen längs diagonalen, dvs $\det(B) = 2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$. För matrisen A utför vi radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_2,$$

och därmed förvandlar den till triangulärformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att $\det(A) = 1{\cdot}(-1){\cdot}(-7) = 7$. Slutligen har vi $\det(AB) = 7{\cdot}24 = 168$.

(b) Vi ställer upp den utökade matrisen $[A|I_3]$ och förvandlar den till $[I|A^{-1}]$ genom att utföra följande sekvens av radoperationer :

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_2,$$
$$R_1 \mapsto R_1 + 2R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - R_3, \quad R_2 \mapsto -R_2.$$

Man kan bekräfta att detta ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - 4R_1,$$
$$R_2 \mapsto \frac{1}{2}R_2, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_2,$$

så förvandlas matrisen till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivoterna ligger i de två första kolonnerna och motsvarande kolonner i A spänner upp dess kolonnrum. Alltså

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

För att hitta en bas till nollrummet måste vi fortsätta och lösa ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$. Variablerna x_3 och x_4 är fria och bakåtsubstitution leder till

$$x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \quad x_2 = -x_3 + \frac{2}{3}x_4.$$

En godtycklig vektor i nollrummet ges därmed av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som i sin tur medför att

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

(d) Vi först ortogonaliserar basen genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{18}{9}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserar och producerar ON-basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ där

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Minstakvadratlösningen ges av $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$. Vi beräknar först

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix},$$
$$\Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}.$$

Näst har vi

$$A^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Slutligen,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 24 \\ -36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi först beräknar

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -10 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 50 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3),$$

som innebär att egenvärdena är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 3$.

$\lambda_1 = -2$: Vi har $A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = 3$: Vi har $A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Därmed har vi diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Pe^{tD}P^{-1}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{-2t} - 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

3. (a) Associativitet betyder att $(AB)C = A(BC)$ när som helst alla produkterna är definierade.

(b) Det finns alla möjliga exempel i världen, men här är ett : tag $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då gäller att $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ medan att $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Först kan vi transponera i båda leden och erhåller

$$AX + B = (X^T C)^T = C^T X = CX, \quad \text{ty } C^T = C.$$

Detta medför att $B = CX - AX = (C - A)X$ så, under förutsättningen att $C - A$ är inverterbar, har vi följande formel för lösningen :

$$X = (C - A)^{-1} B.$$

Nu räknar vi. Först

$$C - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (C - A)^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi ställer upp vektorerna i en matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}.$$

Radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto 5R_3 + R_2$$

förvandlar denna till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5a - 7 \end{bmatrix}.$$

De ursprungliga tre vektorerna är därmed linjärt beroende om och endast om $5a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7/5$.

(b) Vi har $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ där

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi löser systmemt genom att arbeta på den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Samma tre radoperationer som ovan förvandlar denna till trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right].$$

Via bakåtsubstitution härleder vi att $c = 5$, $b = -3$, $a = 4$.

Därmed är $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T$.

5. (a) i. $K(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$ och $R(T) = \{w \in W : \exists\, v \in V \text{ s.a. } T(v) = w\}$.

ii. T sägs vara *linjär* om, för alla $v_1, v_2 \in V$ och alla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gäller

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2).$$

(b) Vi kan räkna m.a.p. standardbasen $\{1, t, t^2\}$ för $\mathbb{P}_2$. Man kan kontrollera att

$$T(1) = 2, \quad T(t) = -1, \quad T(t^2) = 2.$$

Därmed ser man direkt att

$$R(T) = \text{Span}\{1\}, \quad K(T) = \text{Span}\{1 + 2t, 1 - t^2\}.$$

Rummet $K(T)^\perp$ spänns upp av ett polynom $a + bt + ct^2$ som satisfierar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kontrollerar lätt att lösningsrummet spänns upp av $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, som medför att $K(T)^\perp = \text{Span}\{-2 + t - 2t^2\}$.

6. Följer man metoden i Matlab 4 så får man

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vektorn $\mathbf{v}$ ligger längs rotationsaxeln så gäller att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

7. (a) En $n \times n$ matris A sägs vara en ortogonalmatris om $A^T A = I_n$.

(b)

$$||A\mathbf{x}||^2 = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2.$$

(c) Låt λ vara ett egenvärde till en $n \times n$ ortogonalmatris A. Då finns det en nollskild vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Men från (b) har vi då att

$$||\mathbf{x}|| = ||A\mathbf{x}|| = ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda|||\mathbf{x}||,$$

och eftersom $||\mathbf{x}|| \neq 0$ så måste $|\lambda| = 1$.