

TMV140 Linjär algebra Z, vt 12

Vecko-PM läsvecka 5

Lay: 5.1-5.4, 4.9, 5.7 Egenvärden och egenvektorer, Basbyten för linjära avbildningar, Tillämpningar till dynamiska system

Begreppen *egenvektor* och *egenvärde* som introduceras i **5.1** är centrala, såväl i matematik som i många tillämpningar. I många problem, matematiska eller tillämpade, är det väsentligt att bestämma en bas för \mathbb{R}^n bestående av egenvektorer till en matris A . Det första steget är då att lösa matrisens karakteristiska ekvation som nämns i **5.2**. Sedan kan man ofta stödja sig på Sats 6 för att bestämma den önskade basen. En viktig tillämpning av detta ges först i **5.3**, diagonalisering av matriser och senare då diagonaliseringen utnyttjas i olika tillämpningar. Vi kommer här att behandla matrispotenser, avbildningsmatriser för linjära avbildningar **5.4**, system av linjära differentialekvationer i **5.7** och kvadratiska former senare i kapitel 7 (om tiden räcker till).

En annan intressant tillämpning ges i hållfasthetslära. Spänningsmatrisen $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

beskriver normalspänningar σ och skjuvspänningar τ i plan parallella med koordinatplanen, genom en kropp som påverkas av inre och yttre krafter. Egenvektorer till matrisen \mathcal{S} är huvudspänningsriktningarna, motsvarande egenvärden är normalspänningen i plan vinkelräta mot egenvektorn. I dessa plan är skjuvspänningen noll. Matrisen \mathcal{S} är alltid symmetrisk och därmed, vilket vi skall se senare, alltid diagonaliserbar. Andra intressanta egenskaper kommer vi att studera under vecka 6.

I avsnitt **5.4** införs begreppet avbildningsmatris för godtycklig linjär avbildning $V \rightarrow W$. Avbildningsmatrisen A överför koordinaterna för en vektor \mathbf{x} i en viss bas för V till koordinaterna för *en annan vektor* $T(\mathbf{x})$ i en bas för W , $A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$. Basbytesmatrisen opererar på *olika koordinater för en och samma vektor*, $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Den vänsterriktade pilen i ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$ kan tjäna till att få oss att tolka matrisen rätt.

Lite tid kommer också att ägnas åt att studera *stokastiska matriser*, som behandlas i avsnitt **4.9**. Denna är en viktig källa för mer "moderna" tillämpningar av egenvärden och egenvektorer. Till skillnad från **5.7**, så är det dynamiska systemet *diskret* här, dvs man tar mätningar vid diskreta tidsintervaller. Till exempel jag kommer att beskriva grundideen i *PageRank algoritmen*, som ligger bakom Googles sökmotor.

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
5.1	definiera begreppen <i>egenvektor</i> och <i>egenvärde</i> .
5.2	förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
5.2	bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
5.3	bestämma egenvektorsbas till en matris
5.3	<i>diagonalisera</i> en matris
5.3	beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering
4.9	definiera begreppen <i>stokastisk matris</i> och <i>steady-state vector</i>
4.9	härleda den stokastiska matrisen för en given Markovprocess från en skriftlig beskrivning av sådan
	och beräkna steady-state vektorn för en given stokastisk matris
5.7	utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
5.7	förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer
5.4	bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V , relativt en given bas \mathcal{B} för V
5.4	växla mellan olika baser och tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
5.1	PP, 1, 3, 5, 6, 7, 9	13, 15, 17, 19, 21	25, 29, 31
5.2	PP, 1, 5, 9	13, 17, 21, 27, 30	18, 20, 24
5.3	PP, 1, 5, 7	3, 11, 15, 17, 21	23, 27
5.7	1, 3	15, 19	5, 7
5.4			PP, 1, 3, 5, 9, 11, 15, 21, 32
4.9		1,3,5,7	9

OBS! Bortse från frågor som berör sänka, källa eller sadelpunkt i 5.7.