

Tillfälligheternas spel och naturens lagar

Introduktion till Statistik för fysiker hösten 2003

Peter Jagers.

En av de dikter som gjorde störst intryck på mig när jag gick i gymnasiet var Hjalmar Gullbergs Mekaniskt sorgespel. Där skriver han, om jag inte minns fel så är det slutstrofen:

Guds mening med orsaksförloppen
Jag spanade efter besviken.
Nu går jag med ångest i kroppen.
Mitt öga har sett mekaniken.

Med ångest har Gullberg sett hur obönhörligt allt har sin gång, världsalltet, samhället, människolivet. Han skulle gärna vilja att mekaniken inte härskade, att det skulle kunna finnas ett utrymme för något annat, något man kunde kalla för frihet, eller kanske en hårsman av slump. Det är en önskan som jag tror vi all känner igen. Å ena sidan vill vi att världen ikring oss ska vara rationell, att vi ska kunna sluta oss till vad saker och ting leder till, att orsak ska ge verkan. Å den andra sidan vill vi för Guds skull inte se våra egna liv som behårt länkade till deras förutsättningar.

Denna motsättning finns i all världsuppfattning från primitiv religiositet till modern teknik och naturvetenskap, för att inte tala om den moderna tidens märkligare trosföreställningar, som ockultism av olika slag, astrologi eller New Age. För allt i världen vill vi både tro på naturens lagbundenhet och på ett rum av frihet, nyckfullhet, eller slump. I den kristna föreställningsvärlden är människans frihet central, samtidigt som evangelisten Matteus låter Jesus säga: "Inte en sparv faller till jorden utan eder Faders vilja." I den klassiska fysiken är allt förutbestämt. Kan du som Laplaces så kallade demon — själv talade han om en "intelligence superieure" — ett enda ögonblick ange alla partiklars position och riktning kan du i princip räkna ut allt som skall ske eller har skett. Samtidigt lär vi oss av den moderna molekylärbiologin att själva livets utformning här på jorden är en produkt av slumpmässiga mutationer. Men var finns utrymmet för slump? Är det så att Gud av och till slappnar ett ögonblick i sin uppmärksamhet, finns det brott i någon av länkarna i mekanikens orsakskedja? Eller är det tvärtom, som grekerna trodde, så att de slumpmässiga händelserna är budskap från gudarna, eller kanske från stjärnornas värld? "Det var nog ödet", kan även upplysta människor säga, om dom har missat ett en buss och sedan på nästa träffat den som blev deras livs älskade. Vill dom då säga något annat än den som rycker på axlarna och trött konstaterar: "Äh, det var nog bara slumpen!" Strider slumpen emot ödet, eller uttrycker orden bara olika inställningar till samma sak?

Vi matematiker analyserar komplicerade frågor som dessa genom att bortse från verklighetens detaljrikedom och fokusera de grundläggande mönstren, ofta i exempel som är enkla, men som just därigenom öppnar sig för en mycket mer grundlig analys. Verklighetens alla hjul och tallrikar blir till geometrins cirklar. Just därför tycker många att matematik är abstrakt och kanske oviktigt, inte

har med det verkliga livet att göra. Men om de mönster som studeras döljer sig bakom många fenomen får de abstrakta resultaten en nästan obegränsad räckvidd, i motsats till historie- och samhällsvetenskapernas insikter som ofta gäller bara den beskrivna enskilda situationen, är matematikens sanningar visserligen abstrakta, men i gengäld eviga!

För att komma åt vad slump kan vara måste vi alltså tänka efter om vi kan precisera de allra enklaste situationer, där vi säger och tycker att utfallen är slumpmässiga. I läroböcker i sannolikhetsteori är det genomgående enkla hasardspel. Vi singlar slant och resultatet blir krona eller klave. Tärningen kastas med det ena eller andra resultatet. Och roulett hjulet snurrar. Än går det så och än går det så. Men i det långa loppet är allt stabilt, i 50 % av fallen får vi klave, en sjättedel av tärningskastens visar en etta. Slump förefaller det vara om vi inte kan förutsäga hur det ska gå i det enskilda fallet, men väl göra kollektiva utsagor om frekvenser och fördelningar.

Även om många är intresserade av enkla tärningsspel och perfekt blandade kortlekar, så kan det bli lite för mycket av kasino över den elementära sannolikhetsteorin, tycker åtminstone jag.

Låt mig därför illustrera med ett annat enkelt exempel, som både visar sannolikhetsbegreppets närhet till vardagslivet, och speglar den komplicerade relationen mellan slump och den orsaksbundna mekaniken och i själva verket är av samma kunskapsteoretiska karaktär som rouletter och slantsinglingar..

Bakom min arbetsplats Matematiskt Centrum finns det en liten okänd parkeringsplats, där bilar får stå i två timmar. På onsdagar får man inte ha någon bil hemma hos oss, mellan 9 och 12, så då händer det att jag parkerar min gamla Volkswagen där, och som ni förstår blir det lätt tre timmar. En gång i våras fladdrade böteslappen deprimerande från vindrutan. Det fanns inget spår av markering på hjulen. Hur kunde vakten veta att bilen inte hade varit borta mellan hans två besök?

Många vet säkert detta. Hjulställningen antecknas, ganska grovt: på vilket klockslag pekar ventilen? Pekar den på samma timma vid nästa kontroll, så är allt förlorat. Men om jag nu trots allt hade gjort en tur och återvänt till min favoritplats, så har jag ju inte begått något brott, även om vänster framhjul skall råka hamna likadant som före turen? Och det kan ju hända. Mycket osannolikt? Inte så vådligt, eftersom det finns tolv timmar är sannolikheten rimligen $1/12$, lite drygt 8 % . Är detta tillräckligt lite för att jag ska kunna anses ha brutit mot parkeringsbestämmelserna ”med till visshet gränsande sannolikhet”, som juristerna uttrycker det? Näppeligen, och det finns i själva verket ett svenskt domslut, där den klagande friades och domaren hävdade att gränsen kanske gick vid en procent, så att man skulle kontrollera två hjul i stället för bara ett. Sannolikheten för att båda efter den lilla turen hamnar som förut borde ju vara $1/144$. Den påstådda turen blir mycket osannolikare och därmed närmare det uteslutbara. Med modern DNA-teknik kommer sådana preciseringar allt oftare in i juridiska sammanhang. Just sådana ting har vi ju, tyvärr, fått läsa mycket om de gångna veckorna. Där handlar det om hur sannolikt det kan vara att en slumpmässig person visar en extrem likhet med ett visst DNA-mönster. Om mönstret är detaljerat, så att sannolikheten blir mycket, mycket liten, långt

mindre än $1/144$, drar vi den slutsatsen att de två proverna kommer från samma person.

Men åter till en mer trivial rättegång. Efter denna kontrollerar parkeringsvakter ställningen på två hjul. Men är det riktigt att sannolikheten är $1/144$ för att två hjul skall stanna i samma läge som före turen? Ja, bara om hjulen rullar oberoende av varann, vilket ju knappast är fallet. Tvärtom, så länge vägen är rak och jämn borde de rulla helt i takt!

Denna invändning kan förefalla öppna fallluckan för hela sannolikhetsresonemanget. I själva verket är ju inte bara de två hjulen kopplade utan allt bestämt av mekanikens lagar. För markisen Laplaces demoniska intelligens skulle det väl vara en lätt sak att räkna ut hjulställningen, bara hon visste hur vi startade och sedan körde. Men detta är ju en egenskap bilhjulen delar med slanten som singlar eller det snurrande roulettehjulet — just därför sade jag att de var av samma kunskapsteoretiska typ. Även slantsinglingen styrs av Newtons mekanik. Ändå måste resultatet betraktas som slumpmässigt. Men slumpen i denna mening är långt ifrån begränsad till naturvetenskap eller trivialiteter som slantsingling eller bilparkering.

Nobelpristagaren Murray Gell-Mann brukar berätta historien om Buffalo Bill's Wild West Show, som gjorde flera Europaturnéer under 1800 talets sista år. Dess stjärna var Annie Oakley, Annie-get-your-gun, som, berättar Nationalencyklopedin, ”på 30 stegs avstånd kunde träffa kanten på ett kort eller ett uppkastat mynt” med ett välriktat skott. Hennes slutnummer var att vända sig mot publiken och fråga om hon fick släcka cigaretten i någons mun. Då brukade det bli knäpptyst i cirkustältet, Annies make Frank Butler kom fram och med det avslappnade lugn som kan präglare relationen makar emellan sköt Annie cigaretten ur Franks mun. Men vid en galaföreställning i Berlin gick det annorlunda. En ung man med vaxade uppåtböjda mustascher anmälde sig. Annie, som enligt Gell-Mann, hade tagit sin vanliga whisky före, blev nervös men sköt — och träffade cigaretten. Som ni alla förstår var mannen Kaiser Wilhelm. Det finns många sådana historier. Peter Englund, vår nye akademiledamot, skrev i ex häromåret en utomordentligt detaljrik och rolig DN-artikel om Cortés landstigning i aztekernas land långfredagen den 22 april 1519 i svarta kläder, den dag då guden Quetzalcoatl förväntades återkomma med vitt anlete och svart kropp, och hur sålunda tillfälligheternas spel ledde till conquistadorernas segrar, och därmed — så småningom — till dagens Latinamerika.

Själv brukar jag gärna berätta om inledningen till Första världskriget, skottet i Sarajevo. Den 28 juni 1914 gick den bosnien-serbiske nationalisten Gavrilo Princip till en av Sarajevos huvudgator i akt och mening att skjuta Österrikes tronföljare, ärkehertigen Franz-Ferdinand, Det verkade bli en lätt sak, så lite publik och polis eller militär som hade samlats där. Men det var inte så konstigt, för Princip hade missuppfattat kortegevägen, polisen och massorna fanns på en annan gata. Dock gjorde ärkehertigens chaufför samma misstag, bilen körde fel, Princip kunde skjuta, ärkehertigen dog, första världskriget blev ett faktum, tre kejsardömen bröt samman och följdes av Hitler och Stalin, och det kalla kriget och den europeiska 1900-tals-historien blev som den blev.

Nu finns det dom s k historiedeterminister som menar att så hade det gått

i alla fall, även om princip eller chauffören hade valt rätt gata. Jag är inte så säker. Verkligheten ter sig alltid överväldigande och oundviklig när den väl har tagit form. Det fanns många andra utvecklingstendenser i det tidiga 1900-talets Europa, en fredlig industriell vetenskaplig och demokratisk uppmarsch, allt bättre kontakter mellan länder. 1900-talets europeiska historia var nog bara en slump.

Likadant är det i naturvetenskapen. En oförklarlig felkopiering vid uppbyggandet av en DNA-sträng; en mutation har inträffat, och SARS-epidemien sprider sig över världen. Hela den biologiska evolutionen byggs upp på samma sätt: först en slumpmässig mutation, sedan det naturliga urvalets bistra nödvändighet. Bara de mest lämpade mutationerna överlever. För några år sedan kom den danske vetenskapsjournalisten Tor Nørretranders ut med boken "Världen växer — en bok om slumpens historia". Det han hade i tankarna var inte slumbegreppets historia utan hela världsalltets, nämligen hela universum som en produkt av en tillfällighet.

Vad förenar alla dessa så olika slumphändelser, från slantsinglingar till kärleksmöten eller epidemiutbrott? Jo, vi har en komplicerad händelsekedja, oöverblickbar i alla sina detaljer, men med ett entydigt, enkelt resultat. Jag håller handen si och det blir klave, bara lite annorlunda, så lite att jag inte ens själv kan veta, och det blir krona.

Resultatet är, som matematiker skulle säga, en funktion av händelseförloppet. Men en som är mycket olik den klassiska matematikens och fysikens snällt kontinuerliga funktioner. I skol- och även universitets- — matematiken är de flesta funktioner sådana att en lite ändring i förutsättningarna bara ger en liten ändring i resultatet. Det är det vi kallar kontinuitet. Här har gravt diskontinuerliga funktioner: En liten darrning i Gavrilo Princip's eller Annie Oakley's hand, och Hitler hade aldrig kommit till makten.

Och det karakteristiska för själva förutsättningen är dess stora komplexitet. Kan man möjligen renodla och beskriva den matematiskt i ett idealiserat fall? Den 25 april 2003 skulle den store ryske matematikern Andrej Nikolajevitj Kolmogorov ha fyllt hundra år. Han har gjort insatser in många av matematikens grenar och försökte sig även på att precisera vad en slumpmässig följd skulle kunna vara. För enkelhets skull betraktade han följderna av nollor och ettor

```
11111111111111111111,
01010101010101010101,
0010000110101111001110
```

För den första av dessa följderna finns ett enkelt recept, en algoritm om man så vill och för den andra ett aningen mer komplicerat. Men den tredje? Kolmogorov föreslog att vi med en slumpmässig följd skall mena en sådan som det saknas korta recept för. Lite mer precist: betrakta en oändlig följd av nollor och ettor. Om den kortaste algoritm som kan generera de n första elementen är av samma storleksordning n , när $n \rightarrow \infty$, kallar vi följderna slumpmässiga. Ska vi följa Kolmogorov, är vi alltså tillbaka där vi började: världen är lagbunden men när komplexiteten blir för stor, när vi inte kan överblicka alla detaljer, då står bara en slumpmässig, stokastisk, beskrivning till buds: vi tvingas rycka på axlarna

och erkänna: det var nog bara slumpen. Men detta innebär inte att vi ger upp allt hopp om kunskap. Visst, det enskilda fallet är i sin oerhörda komplexitet oöverblickbart, men betraktar vi många sådana framträder lagbundenheten igen.

Vi behöver inte, som att den engelske matematikern John Kerrich, som var krigsfånge under 2:a Världskriget kasta ett mynt 10.000 gånger, för att veta att det blir krona i ungefär hälften av fallen, 5.067 gånger antecknade Kerrich. Det säger oss de stora talens lag. Vi kan t o m beskriva hur avvikelserna ifrån det förväntade antalet uppträder enligt den centrala gränsvärdesatsen. Det märkliga är att när komplexiteten i de enskilda fallen blir så stor att slumpmässigheten är det enda vi kan se, då får vi en kompensation i en möjlighet att med statistikens lagar överblicka helheten. Men det enskilda kan ju i sin tur vara en helhet av än mindre enskildheter. Så får vi en fascinerande hierarki av lagbundenhet och slumpmässighet i universum, från det lilla till det stora, och vice versa.

Att studera detta samspel av kaos och ordning är den matematiska statistikens uppgift.