Grupparbetsförslag 1
Sannolikhetsteori 1, ht 1999
Marianne Månsson

# Monte-Carlo integration

Antag att man vill bestämma $\int_0^a f(x)\,dx$, där $0 \leq f(x) \leq b$ för alla $x \in (0,a)$, men tyvärr är integralen alltför krånglig att beräkna exakt. En metod för att approximativt bestämma en integral är så kallad Monte-Carlo integration. Den går i stora drag ut på att med hjälp av simulerade värden på oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler skatta integralen man vill beräkna. Här kommer en mycket kort introduktion till skattningar, mer får man veta i kursen Statistikteori 1.

Låt $X$ vara en stokastisk variabel vars fördelning är mer eller mindre okänd (man kanske vet att $X$ är normalfördelad, men ej dess väntevärde och varians). Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende stokastiska varibler med samma fördelning som $X$, säger man att $X_1, \ldots, X_n$ är ett *stickprov* på $X$. Antag nu att vi är intresserade av någon speciell egenskap hos fördelningen för $X$, t.ex. väntevärdet. En *skattning* av denna egenskap, som vi kallar $\theta$, är då en funktion $f$ av ett stickprov, och betecknas ofta med $\hat{\theta}_n = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Två önskvärda egenskaper hos en skattning är

- Väntevärdesriktighet: $E[\hat{\theta}_n] = \theta$
- Att variansen går mot 0: $Var(\hat{\theta}_n) \to 0$ då $n \to \infty$

**Exempel**. Vanliga skattningar av väntevärdet $\mu$ och variansen $\sigma^2$ är stickprovsmedelvärdet

$$\hat{\mu}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n,$$

respektive stickprovsvariansen

$$\hat{\sigma^2}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2.$$

I exempel 2c respektive 3a i kapitel 7 visas att bägge dessa skattningar är väntevärdesriktiga, dvs. $E[\hat{\mu}_n] = \mu$ och $E[\hat{\sigma^2}_n] = \sigma^2$. I ex 3a visar man dessutom att $Var(\hat{\mu}_n) \to 0$ då $n \to \infty$.

Vi ska nu studera två olika sätt att approximativt bestämma integralen $\int_0^a f(x)\,dx$, där $0 \leq f(x) \leq b$ för alla $x \in (0,a)$.

1. Antag att $U_1, \ldots, U_n$ är att stickprov på $U$, som är likformigt fördelad på $(0, a)$. Då är

$$\hat{\theta}_n = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(U_i)$$

en skattning av $\int_0^a f(x)\,dx$.

2. Låt $Y$ vara likformigt fördelad i rektangeln $(0, a) \times (0, b)$, och låt

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{om } Y \text{ ligger under kurvan } f(x),\ x \in (0, a), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Om $Z_1, \ldots, Z_n$ är ett stickprov på $Z$, så är

$$\tilde{\theta}_n = \frac{ab}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

en skattning av $\int_0^a f(x)\,dx$.

**Del I**
a) Välj några integraler och utnyttja de två olika metoderna ovan för att skatta integralernas värde med hjälp av simulering.
b) Använd någon numerisk metod, tex. Simpsons, för att bestämma integralerna. Jämför med resultaten i a).

**Del II**
c) Visa att $\hat{\theta}_n$ är en väntevärdesriktig skattning av $\theta$.
d) Använd stora talens lag för att motivera att skattningen verkar rimlig.

e) Upprepa c) och d) ovan för skattningen $\tilde{\theta}_n$. Beräkna dessutom dess varians.