Tackar för inbjudan att prata här om matematikerns syn på lärande i matematik i förskolan och skolan. Eftersom jag saknar egentlig sakkunskap om detta kommer det mest att handla om några egna reflexioner och ideer. Som föregående talare (Elisabeth Dov..) på ett utmärkt sätt redogjort för, är det mycket olyckligt när matematiken uppfattas mer som ett skolämne än något man utnyttjar för att förstå sin omvärld. Det här ska väl mest handla om förskolan och grundskolan, men jag kom, efter exemplet om att räkna knappar i tamburen, att tänka på hur vuxna ibland möter matematik. Om man i t ex A-ekonomi tar upp att mjölkpriset höjts med en krona per liter, och vill belysa hur detta påverkar barnfamiljerna så kallar man in en familjeekonom som utför en multiplikation baserad på någon uppgift om normalförbrukning av mjölk, istället för att tittaren själv gör samma kalkyl med utgångspunkt från sin egen verkliga förbrukning. Man kan fundera över om sådant påverkar föräldrarnas syn på matematik och om detta i så fall möjligen överförs till barnen.

Matematik och matematisk förmåga

Att säga precis vad som är matematik är svårt eller kanske omöjligt, jag ska i alla fall inte försöka, men kanske man kan säga att matematisk verksamhet och matematik uppstår från samhälleliga behov av att kunna hantera antal, area, volym etc, för att sköta ekonomi, för att göra kalendrar, tillverka maskiner, i militära syften med mera. Den matematiska verksamheten har också renodlats i rent kulturella syften; och det finns massvis med kopplingar till filosofi, konst, musik och annan kulturell verksamhet.

Om man alls ska tala om *matematisk förmåga* så bör det då vara den medfödda förmåga vi alla har att förstå iden med t ex antal och volym, och i tanken och kanske med symboler (t ex i sanden eller på papper) reflektera över och genomföra resonemang och dra slutsatser om dessa fenomen. Det förefaller som alla barn i tidiga år utvecklar förståelse för dessa mycket avancerade abstraktioner, (försök själva att "förklara" eller definiera vad antal innebär eller vad volym är). Det fantastiska är alltså att vi överhuvudtaget har denna förmåga och inte att några av oss lär sig lite snabbare än andra; på samma sätt som att det fantastiska inte är att någon kan springa 100 meter på 10 sekunder utan att vi överhuvudtaget kan gå och springa. Detta är särskilt viktigt att understryka eftersom olyckligtvis matematik i jämförelsvis hög grad felaktigt kringgärdas av en syn att vara svår (dessutom tråkig och oanvändbart utanför skolans väggar) och endast tillgänglig för utvalt fåtal.

Matematisk kunskap är i hög grad kumulativ, dvs det är mycket mycket lättare att tillägna sig saker som andra redan tänkt ut än att komma på det själv. Som exempel kan vi ta en symbol för talet 0 som infördes rätt sent i Europa [1] men som alla små barn utan att tveka hanterar idag. Matematiken är alltså stadd i ständig utveckling och en stor del av den kända matematiken är utvecklad under 1900-talet; för under detta århundrade har det funnits möjlighet för många fler än någonsin tidigare att ägna betydande tid åt forskning i matematik. Vidare har det uppstått behov av helt ny matematik, t ex för att kunna utnyttja datorer. Det är värt att nämna i detta sammanhang att matematiken är helt internationell och står över alla eventuella kulturella och etniska gränser, [2] den finns överallt och vi alla har del i och rätt till den.

Det vi stöter på i skolan är en utvald del av detta stora kunskaps- och kulturarv; det finns alltså ingen speciell skolmatte, det är bara så att vissa delar av matematiken traditionellt tas upp i skolans kurser, t ex aritmetik och viss geometri. Det finns mycket annan skojig, nyttig och lättillgänglig matematik som också mycket väl skulle kunna tas upp.

En studie av små barn

Låt mig nämna en longitudinell studie som jag nyligen tog del av lite, av en grupp barn och deras matematiska utveckling. När studien inleddes var barnen sex år; studien har nu löpt över 12 år. Man valde ut barn som *inte* hade en stämpel på sig att vara speciellt "begåvade" eller så, man valde dock i någon mån barn som inte var alltför blyga; detta för att det skulle vara lättare att studera dem. Vid den episoden jag berättar om här var de 9 år, men slutsatserna är likartade från episoderna från yngre åldrar. De får tillgång till röda och vita (låt oss säga vanliga) legobitar med kvadratisk ovansida och uppgiften att bygga så många olika torn som möjligt. De videofilmas medan de bygger och samtalar med varandra om hur de tänker, och de har också tillgång till papper och penna. Genom att noggrant studera videofilmen samt barnens anteckningar kan man notera bl a att: barnen kan lösa uppgiften, att de presenterar olika lösningar, svarande mot principiellt

[1] PÅ medeltiden tror jag, men tycks ha funnits långt mycket tidigare flera andra kulturer.

[2] För ett par år sedan skrev jag ett arbete ihop med en koreansk matematiker; vi hade bara haft kontakt brevledes. Arbetet flöt på bra men jag kunde inte avgöra om det var en kvinna eller en man, och jag fann inget naturligt sätt att få reda på detta heller. Jag antar att denna ovisshet var ömsesidig men hade han (som det senare visade sig vara) haft någon kännedom om det det ringa antalet kvinnliga matematiker i Sverige hade han kunnat gissa att jag var man. I Sydeuropa är andelen kvinnliga matematiker markant mycket större än i vårt land; orsakerna till detta är inte plats för att spekulera över här, men detta förhållande stödjer den för mig självklara uppfattningen att matematik är något för både kvinnor och män.

olika sätt att gå till väga; [3] att de hittar på sätt att symboliskt lista de olika möjligheterna på ett papper, och inte minst att de uppvisar en spontan önskan att övertyga sig (och de andra) om att de med sina respektive metoder får med all olika tänkbara torn. När de var sex och sju år arbetade de med uppgifter som handlade om att bilda olika dräkter genom att para ihop tröjor och byxor av olika färger; man kan dra liknande slutsatser från dessa studier.

Resultaten stödjer tanken att de sätt att tänka som förekommer i matematik, inklusive abstrakt symbolnotation, är medfödda och visar sig redan i tidiga år, liksom innebörden av ett matematiskt bevis. Det är också värt att notera den stora glädjen och tillfredställelsen som barnen visar inför sin kreativa matematiska aktivitet. Jag provade på mina småpojkar (7 och 8 år) och de betedde sig på liknade sätt (jag hade förstås ingen möjlighet till ett så noggrant studium) men glädjen, önskan att resonera, samt symbolnotationen var lätt att observera. Pröva gärna själva på barn i er omgivning, men kom ihåg: inget facit, inga "rätta lösningar" etc; det är barnens inneboende förmåga som ska stimuleras.

Matematik i förskolan och skolan

De flesta känner säkert igen uttalanden som "matte är svårt", "tråkigt", "bara för sådana där snillen", "bara en massa tråkiga tal" etc. Jag tror att den attityd till ämnet som lyser fram här accentueras uppemot högstadiet, men embryot finns säkert tidigt, och sannolikt spelar lärarnas (och föräldrarnas) attityd till matematik en betydande roll, och inte bara innehållet och uppläggningen av undervisningen som sådan.

Det finns ingen anledning att tro att orsaken till denna attityd står att finna i ämnet själv; det är t ex inte särskilt svårt att göra studier musik eller språk eller tom fotboll mördande tråkiga, med sannolik konsekvens att hela ämnet upplevs som trist och svårt och bara passar för några utvalda. Förvisso finns ett betydande behov av övning i alla dessa verksamheter, men den blir väl lättare att stå ut med om de skapande, upptäckande och fascinerande sidorna lyfts fram. Vem skulle t ex komma på iden att låta 7-åringar bara ägna sig åt att träna passningar, komma ur passningsskugga etc, utan att i betydande omfattning få *spela* fotboll.

Man ska ha stor respekt för allt det säkert oftast mycket goda arbete som läggs ned i förskola och skola, men min erfarenhet (bl a genom mina barn) är att det ändå ofta verkar glädjelöst och utan så mycket fascination som borde kunna finnas. Man kan ana att lärare ibland

[3] T ex kan man först lösa problemet för lägre torn och utnyttja detta för att klara fallet med "tretorn" (dvs använda induktion över höjden), eller analysera på hur många olika sätt en av färgerna kan distribueras ut i ett "tretorn".

fokuserar för mycket på mätbara prestationer hos barnen, och mindre på vikten av att det naturliga intresse som jag menar vi har, inte förstörs under de tidiga skolåren. En negativ attityd tar man med sig till högstadiet och gymnasiet, den är rimligen till förfång för studierna där, och sannolikt för man den vidare till sina egna barn och eventuella elever.

Vad har/behöver man matematik till?

Att matematik behövs för att förutsäga vädret och för att bygga bilar och interkontinentala missiler är väl ganska välkänt; eller i snart sagt alla vetenskapliga och tekniska discipliner.[4] Men vad har den vanliga medborgaren, som inte är ingenjör eller matematiker, för anledning att lära sig matematik? Jag har här listat fyra saker utan rangordning:

- Vardagsnytta, (t ex uppskattningar och överslagsberäkningar
- Kultur(arv)
- Nöje
- För förståelse av omvärlden (t ex fysik, medicin, ekonomi, politik, sannolikheter, stort och smått)

Det är inte så dumt att då och då inte bara uppskatta mjölkkostnaderna i hushållet, utan kanske göra en överslagskalkyl av hur mycket man månatligen spenderar på t ex godis eller liknande. Kanske gör man en omvärdering när man ser inte bara varje utgift för sig utan hur mycket de blir ihop. [5] Skulle jag ändå rangordna dessa skulle jag nog hålla den sista som viktigast. Matematiken kan absolut inte förklara allting och gör inte anspråk på detta, men det finns en hel del saker som man kan förstå och se ett sammanhang i med hjälp av matematik. Låt mig bara ta ett enda exempel: Det kan behövas viss matematisk vana att t ex orientera sig i alla de sannolikheter/risker som vi dagligen möts av, och dessa kan påverka olika val vi gör, val av mat etc men även t ex politiska val. Om man utsätts för det eller detta så ökar risken med 40% att få den eller den allvarliga sjukdomen; om å andra sidan risken från början är försumbar så spelar det hela liten roll. Andra saker som

---

[4] Det finns de som hävdar att det går att skriva en lärobok i naturkunskap utan att blanda in matematik, men betyder nog snarast att de blandar ihop begreppet matematik med “formler och räkning”.

[5] En kollega sa nyligen till mig att det statliga spelbolagets verksamhet fungerar som en extra skatt för lågutbildade. Det låter cyniskt men, menar han, skälet till att många spelar är att varje utgift känns ganska liten men att chansen hela tiden finns att bli rik. De som har reflekterat lite över sannolikheter finner att summan av utgifterna lätt blir mycket stor men att chansen att bli rik är praktiskt taget obefintlig. Enda förnuftiga sättet att motivera ett spelande är då att man bedömer att njutningen i stunden är värd det den kostar.

nämns kan vara all anledning att ta på stort allvar, och kan motivera att man allvarligt överväger om man är beredd att ändra vissa vanor. Om någon grupp i skolan eller i tjänsten utsätts för en förhöjd strålning (om jag inte missminner mig var det något sådant med de svenska FN-soldaterna i Bosnien) så vill och bör massmedia redovisa detta; det är inte säkert att de däremot nämner att man kanske får tusen ggr mer strålning av samma slag genom att tillbringa ett veckoslut i Sotenäs kommun (där bakgrundsstrålningen är jämförelsevis hög).

Matematik i förskolan och skolan (igen)

Om vi nu är överens om att matematik är något som är bra för alla så finns all anledning att redan i förskolan sträva efter att *utveckla det naturliga intresse och den förmåga somredan finns.*

Man kan misstänka att det ibland saknas en känsla av säkerhet inför ämnet hos många lärare. Som jag redan nämnt är det nog viktigt att inte stirra sig för blind på mätbara förmågor och vad som (man tror) är "rätt" och "fel", utan att vara öppen för och uppmuntra barnens spontana frågor och tankar, och våga syssla med en upptäckande kreativ verksamhet i klassrummet. Detta kan kanske ta sig uttryck i en ödmjukhet inför sin egen förmåga och att man vågar visa att man inte vet allting. Om något barn t ex undrar varför $(7 \cdot 9) \cdot 13 = 7 \cdot (9 \cdot 13)$ så får man *absolut* inte säga "det bara är så"; man ser alltför många ungdomar som tror att matematiken utgörs av en samling godtyckliga regler om vad man "får" och inte "får" göra. Jag tycker också man bör undvika att säga "det där är för svårt att förklara för dig" eller "det där är du för liten för". Hellre då göra ett försök; då har man i alla fall visat på att det finns förklarbara orsaker. Om man inte har en bra förklaring till hands (det är förstås inte en ovanlig situation) så får man väl säga att man måste fundera på eller ta reda på det, och sedan också helst göra det (även om det inte står i kursplanen!). Exemplet med tornen som jag nämnde ovan, antyder att barn kan resonera meningsfullt och intresserat om många frågor som skulle leda alldeles för långt att ta in och formalisera i kursplanerna; det är alltså inte nödvändigtvis något fel på dessa. Vidare ska man inte gå omkring och tro att man kan allt man behöver för att undervisa barn i matematik för det kan ingen; för vem som helst av oss finns alltid nya saker att lära som kan berika undervisningen. [6] Slutligen bör man undvika att säga "det är självklart" för det är det (nästan) aldrig.

[6] Utöver en professionell förmåga att hjälpa barn att tillägna sig de grundläggande färdigheterna i matematik, tror jag att goda allmänna kunskaper i matematik, dess tillämpningar, historia, samhälleliga roll, filosofiska grund, problemlösning, etc, egentligen är lika viktiga för lärare på alla skolstadier.

Här har jag några lösa exempel på frågor som kan komma upp eller väckas i klassrummet:

• Finns det oändligt många naturliga tal $0, 1, 2, 3 \ldots$?

• Varför är multiplikation associativ, dvs varför är $7\cdot(9\cdot13) = (7\cdot9)\cdot13$ etc.

• Om klass $1a$ och klass $1b$ har lika många elever, samt $1b$ och $1c$, följer det då att $1a$ och $1c$ har lika många? Måste man räkna dem först?

• Hur många torn som ovan kan man bygga med höjden 4, eller 5, etc?

• Varför kan en katt hoppa från ett högt träd utan att slå sig medan en elefant dör om den trillar en halvmeter? Eller som variant: varför har elefanten så stora öron?

• Varför är det så att. . . ,

där . . . står för vilken som helst av de frågor som dyker upp i aktivitetsförslagen som kommer längre fram.

De två första [7] har jag tagit från en artikel av Peter Sjögren, [PS], och de har autentisk bakgrund. Den tredje är tänkat att leda in på skillnaden mellan "visst antal" och "lika antal"; är det nödvändigt att räkna två mängder för att bli säker på att de har lika många element eller finns det andra sätt? Hur vet man t ex att antalet äkta makar är lika stort som antalet äkta makor? Den med elefanten handlar att en förändring av längdskalan påverkar area och volym olika. Det är inte alls säkert man kan förstå den till fullo i lågstadiet men man kan reflektera över skalning[8]. Ser t ex långa personer annorlunda ut än korta?

Hur kan man då skaffa sig eller utveckla en säkerhet i och positiv nyfiken attityd till ämnet utan att underkasta sig mångåriga ytterligare studier? Jag tror att man kan komma mycket långt genom att aktivera sitt inneboende intresse t ex genom att fundera över och försöka förstå saker man inte känner till sedan tidigare. Det är svårt att tro att man kan sprida en positiv nyfiken attityd till barnen om man inte har det själv. [9] Materialet balblaa Uppslagsboken balbalba det där andra baba kan vara till stor hjälp.

[7]Frågan huruvida det finns oändligt många tal är inget matematiker kan avgöra, det är väsentligen filosofisk fråga eller en trosfråga. Däremot har matematikerna utvecklat olika sätt att *hantera* problem som involverar oändlighetsfrågor.

[8]Eftersom elefanten är så stor har den mycket stor kroppsmassa i förhållande till hudens area. Värmen som genereras i kroppen måste avledas genom huden, och arean av denna "ökas" genom att elefanten fäller ut sina stora öron.

[9]Ett viktigt skäl till att undervisande lärare i högskolan bör ägna sig åt forskning, vid sidan av att förhoppningsvis forskningsresultaten är bra till något, är just forskningens och det fortsatta lärandets kompetenshöjande effekt, och att bevara den undersökande intresserade attityden till ämnet. Jag menar inte alls att alla till

Jag tänkte avsluta med att ge (ytterligare) några löst valda exempel på saker jag tror att man kan syssla med i låga åldrar (jag har prövat samtliga på mina egna barn), och som syftar till att stimulera barnen (och deras lärare) att testa, gissa, diskutera, argumentera, försöka förklara, rita, symbolisera etc; obs, inget "rätt" eller "fel" i onödan.

- Volymer, mer eller mindre i olika glas, gissa, testa; när är detta (t ex koniska) glas halvfullt?

- Får alla barn (flickor) i klassen plats att stå på samma matta (i samma säng, på samma stol)? Om inte, hur många får plats? Försök göra en uppskattning och testa sedan.

- Tag ett schackbräde (kan räcka med 4×4 rutor) och paxa två rutor. Går det att täcka de övriga med dominobrickor (där varje bricka täcker två rutor som ligger bredvid varandra).

- Bygga torn med legobitar som ovan.

- Eulers sats om plana grafer.

- Har varje papper två olika sidor? Klistra Möbiusband. Vrid, klistra, tänk, gissa, klipp och se hur det blev. Vrid lite mer och klistra igen, etc.

Det första är roligt redan för mycket små barn, man kan sedan sprida små ledande frågor om vilket glas som innehåller mest etc, och större barn kan fundera över hur man kan avgöra när ett glas med märklig form är halvfullt, om man har ett par extra likadana glas att spara vatten i.

Den andra handlar om att göra uppskattningar; desto roligare som man sedan kan testa på nästa barnkalas.

Schackbräden kan användas till mycket annat än att spela schack på; har man inget bräde tillgängligt kan man lätt rita ett på ett papper, och istället för dominobrickor som man naturligtvis inte hittar, kan man ta t ex rektangulära legobitar.
[10]

varje pris behöver ägna sig åt forskning, men ett lärosäte där ingen gör det blir fort förstelnat.

[10]Det är lätt att se att man inte kan täcka brädet med 31 brickor så att två motstående hörn blir kvar; skälet är att varje bricka täcker en svart och en vit ruta så det måsta bli kvar en svart och en vit. Detta är ett av de elegantaste bevis jag vet, för slutsatsen är absolut inte självklar utan innebär en äkta ny kunskap, men argumentet är så lätt att förstå att man kan sälja det tom under en bättre middag. Det är svårare att visa att det alltid verkligen *går* att täcka om man paxar en svart och en vit ruta; det kan dock göras utan någon särskild matematisk kunskap och jag uppmanar alla att försöka knåpa ihop ett eget argument.

Rita först ett ändligt antal punkter på ett papper. Dra ett antal linjer mellan par av punkter. Vi får då en *graf*. Punkterna kallas *hörn*, linjerna mellan hörnen kallas *kanter* och varje inhängnat område i grafen kallas en *sida* till grafen. Vidare kräver vi att grafen är sammanhängande; detta innebär att varje punkt direkt eller indirekt är förbunden med alla de andra, se figur. Om antalet hörn, kanter och sidor betecknas med H, K respektive S, så gäller Eulers formel,

$$H + S - K = 1.$$

Man kan t ex låta varje barn rita sin egen graf, låta de räkna efter och skriva upp resultaten i en tabell på tavlan, och sedan be dem att försöka hitta ett samband.[11]

Möbiusband brukar fascinera även större barn. Man får ett Möbiusband genom att ta ett rektangulärt ganska avlångt pappersark och tejpa ihop kortändarna efter att först ha vridit arket ett halvt varv. Man ser nu att Möbiusbandet på sätt och vis bara har en sida och en kant för om man börjar färdas från en punkt säg mitt på pappret så kan man efter ett tag befinna sig "mitt emot" denna punkt. Man kan fundera över vad man får om man klipper Möbiusbandet längs mittlinjen på det ursprungliga arket, sedan klippa och kolla om man tänkt rätt. Man kan sedan generalisera genom att vrida t ex ett helt varv eller tre halva varv etc innan man tejpar ihop, och fundera över vad man får.

[PS] Peter Sjögren *En matematikers syn på svensk skolmatematik* Nämnaren nr 3 (1992)

[MM1] Carolyn A. Maher and Amy M. Martino *Teachers Building on Students' Thinking* , Arithmetic Teacher, March 1992, pp. 32-37.

[MM1] Carolyn A. Maher and Amy M. Martino *The Development of the Idea of Mathematical Proof: a 5-Year Case Study* , Joournal of Research in Mathematics Education (JRME), v. 27, no. 2,(1996) 194-214.

Nämnaren balblabla

[WWW] http://www.learner.org/channel/workshops/pupmath/support/

[11] Det är inte så lätt att ge ett strikt bevis för Eulers formel, men det är roligt även för mindre barn att försöka; t ex fundera över hur H, K och S ändras om man i en given graf lägger till ett eller annat hörn och någon extra kant.