version 00 11 03

Nya former för matematikstudier på högskolan

De senaste åren har man på många högskolor prövat nya undervisningsformer i matematik, i vissa fall bara lokalt i en viss kurs, men i andra fall rör det sig om en omläggning av eller utveckling av ett helt program. Det finns flera motiv till detta. Det finns starka önskemål från statsmakterna och näringslivet att locka fler studenter att läsa program på högskolan med betydande inslag av matematik. Om man vill attrahera nya grupper av studenter, kanske sådana som inte har ett uttalat matematikintresse (utan eventuellt tvärtom), ställs det nya krav på uppläggning av studierna och eventuellt även på innehållet. Inledande kurser i t ex analys såg länge likadana ut, kanske delvis bara av gammal vana. Tillgängligheten till avancerad datorkraft har öppnat helt nya möjligheter till visualisering av begrepp, laborationer etc, och motiverar att vissa inslag ändras. Ett annat skäl till nya studieformer kan vara att man önskar utexaminerade studenter som utöver traditionella ämneskunskaper besitter andra förmågor, t ex kommunikativa färdigheter och samarbetsförmåga.

Jag ska här beskriva hur vi har lagt upp matematikstudierna på programmet Naturvetenskaplig problemlösning, NP, vid Göteborgs universitet, våra mål, redogöra för några problem som har uppstått, samt vad vi gjort för att bemästra dessa. Eftersom matematiken är en integrerad del av hela NP-programmet, är det dock nödvändigt att som bakgrund kort beskriva detta. Vidare redogör jag först kort för några av de tankar om inledande högskolestudier i matematik som varit vägledande vid utvecklandet av matematikinslagen på programmet.

NP-programmet

Naturvetenskaplig problemlösning, NP, är ett fyraårigt utbildningsprogram med huvudämnena matematik, fysik och miljövetenskap. De tre första åren läses i stort sett gemensamt av alla studenter och ger motsvarande ca 40 p (ett års heltidsstudier) i vartdera av dessa tre ämnen. Det fjärde året innehåller en fördjupning i ett av dessa tre ämnen och leder till magisterexamen i detta ämne. Den första studentkullen påbörjade sina studier HT-95, och följaktligen tog de första studenterna examen våren -99.

Programmet är utvecklat med stöd från Grundutbildningsrådet; det var ett av fem program i landet som fick särskilt öronmärkta pengar för att pröva icketraditionella undervisningsformer i syfte att locka nya grupper av studenter (särskilt kvinnor) till naturvetenskapliga/tekniska utbildningar, se Wistedt (1996).

Vi ville utveckla ett program som genom innehåll, uppläggning, studieformer och kunskapsmål attraherar nya såväl som traditionella grupper av studenter. Målet med utbildningen är att studenterna utöver goda ämneskunskaper även ska förvärva problemlösningsförmåga, kommunikativa färdigheter, ett vetenskapligt förhållningssätt, förmåga att arbeta i grupp, samt utveckla sitt intresse för ämnena. Observera att problemlösningsförmåga här, precis som i namnet på programmet, syftar på förmåga att formulera och behandla sammansatta (naturvetenskapliga) problem, t ex olika miljöproblem.

Utöver traditionella undervisningsformer, föreläsningar, övningar, självstudier, laborationer etc, har vi inom programmet tematiskt upplagda kurser och integration av de olika ämnena, projektarbeten (i grupper om 5–7 studenter), samt (undervisning och träning i) muntlig och skriftlig kommunikation.

En hel del av studierna sker i grupp med obligatorisk närvaro, eftersom gruppen är en viktig pedagogisk resurs. Av detta skäl, och andra, har vi särskilt lagt oss vinn om att studenterna ska ha en god studiesocial miljö; bl a har varje grupp tillgång till ett eget arbetsrum.

Har det lyckats då? Vad beträffar de önskade färdigheterna är svaret på det hela taget ja, men det har funnits vissa problem. Jag beskriver några som rör matematikinslagen nedan. Vad beträffar rekrytering av nya grupper av studenter: Ja, en stor del av våra studenter säger att de inte skulle valt ett traditionellt program med så pass stora inslag av matematik och/eller fysik, men att intresset för dessa ämnen utvecklas under studierna, se Wistedt (1997a). Som en illustration till detta kan nämnas att vi har gott om kvinnliga studenter; totalt sett är de faktiskt i majoritet.

Några tankar om inledande matematikstudier på högskolan

Det matematiska tänkandet är *inte* främst ett laborerande med kedjor av logiska argument, utan en kreativ versamhet, där intuition och känsla spelar en central roll. En matematiker som vill finna ett bevis för en sats sitter ingalunda och prövar argument på måfå, utan söker efter nya ideer eller synsätt. Som i all vetenskap är det förstås i slutändan ett absolut krav att argumentationen saknar luckor och att presentationen är stringent, men det är även högst önskvärt att de underliggande ideerna framgår tydligt. Som exempel kan man ta inledande analys, där det är en påtaglig skillnad mellan den intuitiva idemässiga uppfattningen av begreppen gränsvärde, kontinuiutet etc, och de formella definitionerna med ϵ och δ. Matematikstudier innebär både teknisk träning, dvs träning i räknefärdighet, argumentationsförmåga och presentationsförmåga, samt träning i att greppa ideerna, och skaffa sig insikt om matematikens tillämpbarhet. I det långa loppet är de båda sistnämnda som är de stora stötestenarna.

Ibland försöker jag göra en jämförelse med musik. Den tekniska exercisen tänks då svara mot skalövningar medan att förmedla ett bevis kan jämföras med att framföra ett musikstycke. I de båda senare fallen är det iden (den matematiska respektive musikaliska) som är det centrala.

För att försöka ge en illustration, låt oss titta på följande exempel:

Låt f vara en funktion definierad på den reella tallinjen $\mathbb{R}$ och betrakta följande påstående om f: Till varje x och y på $\mathbb{R}$ och varje $\epsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \textit{om} \quad |x - y| < \delta.$$

Uttrycker detta påstående att f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$?

Jag har, mest på skoj, frågat ett antal kollegor om detta; de flesta glor misstänksamt en kort stund och säger sedan " Nä, det måsta vara fel". OK säger jag då, men vad säger utsagan om funktionen f? Efter något grymtande kan svaret sedan bli allt möjligt, t ex "f är konstant". Endast någon enstaka har gett svaret "Ingenting", vilket är rätt. Vilken person som helst som känner till funktionsbegreppet kan efter en stunds eftertanke övertyga sig om att påståendet är uppfyllt för varje funktion f. Skälet till att man inte ser detta med en gång är, tror jag, just att matematik *inte* är en logisk exercis utan handlar om att laborera med matematiska ideer. Påståendet ovan är matematiskt sett meningslöst även om det strikt logiskt tolkat har en innebörd.

Man kan misstänka att ett skäl till att matematikundervisning, i skolan eller på högskolan, ibland fastnar i ett tekniskt exercerande är att läraren själv saknar insikt om ideernas betydelse. Det är då stor risk att hon/han i sina eventuella didaktiska reflexioner stannar vid lokala frågor som hur man bäst kan lära ut den ena eller andra metoden. Ännu värre är om man, när man redogör för ett bevis, reducerar det till ett flödesdiagram av logiska implikationer (tyvärr finns det t o m folk som har satt sådant i system). Vill man i sin undervisning öppna dörren för studenterna till matematikens fascinerande idevärld är det nödvändigt att själv i någon mån ha vistats i denna.

Studenter som väljer en utbildning där matematik är det uttalade målet, har rimligtvis ett visst naturligt intresse för ämnet, och för dessa kan det vara naturligt att studera ämnet på heltid inledningsvis och redan från början utsättas för grundlig teknisk träning, parallellt med inträngandet i matematikens idevärld, och dess tillämpningar. För studenter vars mål primärt inte är att studera matematik finns en risk att för mycket formellt tragglande döljer de grundläggande ideerna, och det är viktigt att den införda teorin motiveras genom sin tillämpbarhet inom t ex naturvetenskap och att det tekniska exercisen motiveras av olika problem man kan formulera och behandla.

Låt mig ge ett enkelt exempel på hur tillgången på datorkraft kan motivera förändring av kursinnehållet. I de traditionella kurserna ägnade man mycket tid åt att till en given elementär funktion f uttrycka en primitiv funktion F till f med elementära funktioner. Syftet var att med hjälp av den välkända formeln

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

kunna erhålla ett approximativt värde på integralen genom att använda ett tabellverk (för de elementära funktionerna). Med nutida tillgång till beräkningskraft är det dock ofta mycket effektivare att uppskatta integralen direkt med någon numerisk metod. Sålunda är exercisen med primitiva funktioner inte längre lika motiverad. Det finns mycket mer att säga om innehåll i och uppläggning av inledande kurser i analys, men detta kan räcka som bakgrund till det som denna artikel primärt handlar om.

Matematik på NP

Innehållet i matematik på NP skiljer sig inte radikalt från det i andra program. En ramförutsättning är att man efter sex terminer ska ha motsvarande 40 poäng och därmed behörighet att läsa fördjupningskurser. Däremot har vi i våra mål utöver goda allmänna ämneskunskaper lagt särskild tonvikt på modellering, problemlösningsförmåga, kommunikativa färdigheter, numeriska metoder (på NP läser man analys och numerisk analys integrerat), vana att använda datorer för beräkningar och simuleringar. Ett övergripande mål är dessutom att

studenterna ska utveckla sitt intresset för matematik, samt få insikt om dess betydelse och tillämpbarhet inom (främst) naturvetenskap.

Detta är särskilt viktigt eftersom vi i hög grad har att göra med studenter som har valt utbildningen av andra skäl än ett brinnande intresse för matematik från gymnasiet.

En grundtanke i uppläggningen är att den matematik som presenteras i möjligaste mån ska kunna relateras till och motiveras av de andra inblandade ämnena, så att förståelsen av matematikens betydelse och nytta utvecklas; därmed ska förhoppningsvis även intresset öka allteftersom teorin utvecklas. Av detta skäl har vi inledningsvis på programmet relativt små matematikinslag; under första året bara motsvarande drygt en halv termins heltidsstudier. Utöver traditionella studieformer, med föreläsningar och räkneövningar, så har vi bl a följande icketraditionella drag:

- Inledningsvis relativt små matematikkurser, och mer tonvikt på förståelse och intuitiv argumentation och problemlösning än på rigorös bevisföring.

• En rad små och några större projektuppgifter, de senare ofta integrerade med de andra ämnena, som behandlas i grupp.

• Integration av analys och numerisk analys. Studenterna uppmuntras att redan från början använda datorer för att illustrera begrepp etc, för numeriska beräkningar och för simuleringar.

• Delvis integration med fysik och miljövetenskap.

Matematikinnehållet första året omfattar inledande algebra och analytisk geometri samt elementär en- och flervariabelanalys. Som nämnts tidigare har vi inledningsvis tonat ned den formella exercisen, exempelvis accepterar vi grundläggande egenskaper hos kontinuerliga funktioner utan att formellt relatera till någon fundamental egenskap hos de reella talen, såsom supremumegenskapen. Istället lägger vi mer tonvikt på förståelse, tillämpningar och räknefärdighet. Kurserna i fysik bidrar också till att utveckla dessa förmågor. Träning i strikt argumentation tillgodoses dels genom att studenterna redan från början uppmuntras att skriva enkla datorprogram, dels genom arbetet med projektuppgifterna, och genom den muntliga och skriftliga presentationen och åtföljande diskussionen.

På det andra året börjar man med linjär algebra, och här har vi då de vanliga kraven på stringens, strikta definitioner, satser och bevis. Vidare läser man matematisk statistik, samt Fourieranalys och komplex analys, med tillämpningar på (ordinära och partiella) differentialekvationer. Vidare möter studenterna numeriska metoder såsom Finita elementmetoden. Under sista året ägnar man sig huvudsakligen åt differentialekvationer. Genomgående läggs stor tonvikt vid matematisk modellering. Så långt som möjligt presenteras materialet med målet att kunna formulera och behandla olika typer av problem som man stött på tidigare i matematikkurserna eller i de andra ämnena.

Projektuppgifterna är av varierande slag; de ska ge belysning av matematiken, ge träning i modellering samt problemlösningsförmåga. Studenterna får under arbetet feedback från handledaren, samt av examinatorn vid den slutgiltiga presentationen. Många av dessa uppgifter, särskilt de större, är integrerade med de andra ämnena. Det leder dock för långt att diskutera dessa här så låt mig inskränka till några exempel på uppgifter från första terminen.

Grodmannen: *En extremt uthållig grodman avser att simma närmaste vägen från Jönköping till Askersund. Hur djupt kommer han att befinna sig när han är som djupast? Hur mycket längre får han simma om han följer vattenytan? Renodla problemet genom att göra vissa (möjligen inte helt korrekta) geografiska antaganden.*

Detta är den första projektuppgiften de möter. Den kan lösas relativt lätt med gymnasiekunskaper i trigonometri; den tjänar till att inge självförtroende, för den visar på att man redan från gymnasiet har kunskaper som är tillämpliga på ett icketrivialt problem. (För den som inte ids räkna efter själv kan jag nämna att han (teoretiskt) kommer ner ca 300 meter medan sträckvinsten bara blir någon meter.)

Lösningen av denna uppgift presenteras muntligt och skriftligt för examinatorn, som utöver kommentarer till själva lösningen och dess presentation kan ta upp till diskussion hur det blir om man istället betraktar Delsjön, eller en bäbisbadbalja (grodmannen kan då tänkas vara ersatt med en liten mikrob el dyl). Den mest omedelbara uppställningen av lösningen fungerar då inte längre numeriskt; man får differensen mellan två nästan jämnstora tal, men med ledning från examinatorn brukar studenterna komma förbi detta och med numerisk överslagsberäkning få en uppskattning av storleken på djup och sträckvinst. Man får här också en försmak av nyttan av Taylors formel.

En annan mindre uppgift från första terminen är:
Ekvationen: *Bestäm alla lösningar till ekvationen*

$$e^{x^2} - 2x^3 - 5x^2 = 0.$$

Det gäller alltså att hitta alla (reella) nollställen till den givna funktionen. Avsikten är att studenterna ganska snabbt ska inse att ekvationen inte kan lösas algebraiskt, och sedan börja leta efter någon annan metod för att avgöra antalet lösningar samt bestämma dessa approximativt. Antalet lösningar brukar de få fram genom en kombination av datorer (för att "plotta" grafen till funktionen och beräkna speciella värden för denna) samt ordinarie elementär analys (som studiet av derivators teckenväxlingar etc) och asymptotiskt uppförande när $x \to \pm\infty$. Slutligen brukar de bestämma approximativa värden på nollställen genom att skriva ett datorprogram som implementerar någon iterativ metod, såsom Newtons metod eller intervallhalveringsmetoden.

Problem som uppstod och hur vi har bemästrat dessa

I början krävde vi både skriftlig och muntlig redovisning av alla projektuppgifterna, och vid examinationstillfället försökte examinatorn diskutera alla olika aspekter av resultatet; studenternas lösning och deras muntliga och skriftliga presentation av denna, såväl som alternativa lösningar samt relaterade uppgifter/problem; det senare i avsikt att stimulera till mer allmän reflexion över det givna problemet.

Det visade sig dock rätt snart att allt detta inte kunde genomföras på något vettigt sätt vare sig för studenterna eller examinatorn. Det blev för mycket totalt arbete för studenterna, det var av tidsskäl inte möjligt för examinatorn att vid examinationstillfället ge feedback och kommentera samtliga aspekter och brister, och fr a var det helt omöjligt för studenterna att få ett meningsfullt utbyte, ta till sig, mer än en viss mängd kritik vid varje tillfälle. Alltså fick inte studenterna tid nog att arbeta igenom varje aspekt av uppgiften noggrant och som en följd av detta förbättrade de inte sin förmåga i de olika avseendena i en önskvärd grad. Som en av de inblandade lärarna *slående* uttryckte det: “Studenterna förvärvar en allt bättre förmåga att skriva bristfälliga rapporter”.

Ändå så var vi fortfarande vid denna punkt övertygade om att den grundläggande iden med dessa arbetsuppgifter var bra; fastän presentationen ofta inte var nöjaktig stod det klart att uppgifterna stimulerade till en viktig reflexion, utbyte av ideer och tankar, och en värdefull träning i problemlösning som man antagligen inte kan uppnå bara genom att lösa standardproblem i kurslitteraturen. I Wistedt (1997b) finns en studie av projektexamination på NP. För en studie av gruppdynamiska effekter vid problemlösning, se Wistedt et al (1996).

Istället för att göra en drastisk förändring försökte vi med skenbart ganska små modifikationer av uppläggningen, vilka dock visade sig vara helt avgörande. Senare har vi insett att dessa förändringar var av mer principell art än vi insåg då, se Andersson et al.

Till att börja med minskade vi antalet uppgifter något; vidare började vi i de flesta fall att kräva enbart muntlig eller skriftlig presentation av resultaten. Det visar sig t ex att det är en helt annan sak att genomföra en muntlig presentation av gruppens gemensamma arbete utan att ha ett gemensamt skriftligt underlag. Den väsentliga förändringen var dock att vi vid varje uppgift och dess presentation la tonvikten vid vissa speciella kvaliteter. I den allra första projektuppgiften, till exempel, är huvudpunkten att studenterna för första gången ska ordna argumenten på ett logiskt korrekt sätt, och att överhuvudtaget skriva matematisk text och formler (i ett lämpligt ordbehandlingsprogram; vi använder Latex). Vid andra tillfället koncentrerar vi oss på matematisk-syntaktiska frågor. Det är ett visst problem, har det visat sig, att acceptera att formler i en formell text är delar av meningar och därmed har en syntaktisk roll. Vid senare tillfällen, både vid muntlig och skriftlig presentation, tar vi upp mer avancerade saker som strukturen på presentationen; t ex skillnaden mellan att beskriva allmänna ideer och tekniska argument etc.

Dessa modifikationer ledde till avsevärda förbättringar. Vi kunde genast observera betydande progression i flera av de önskade färdigheterna. På senare tid har vi diskuterat att ytterligare öka utbytet genom att göra presentationerna mer individualiserade. Iden är då att vid en given (skriftlig) presentation, en av gruppmedlemmarna ska stå som ansvarig författare. På detta sätt skulle vi bevara de gruppdynamiska fördelarna, men varje student skulle få träning i skrivprocessen, hellre än att samma gruppmedlemmar åtar sig den rollen vid varje tillfälle. Vi har redan gjort smärre försök i denna riktingen som verkar lovande.

Som för programmet i sin helhet, gör vi en åtskillnad mellan lärare/handledare och lärare/examinator. Från början hade vi tänkt att ha föreläsningar där materialet presenteras och att sedan studenterna skulle uppnå djupare förståelse såväl som praktisk och teknisk skicklighet genom individuella studier och genom arbetet i grupperna, med och utan handledare. Det visade sig dock snart att trots att grupparbetet har en betydelsefull roll i samband med de större arbetsuppgifterna som beskrivts ovan, så kunde de inte ersätta traditionella räkneövningslektioner (räknestugor) för att nöta in praktiska färdigheter. Som en av våra studenter uttryckte det (citat ur minnet) *"Uppläggningen funkar bra för de som redan har goda bakgrunskunskaper men jämförelsevis sämre för de som inte har det"* och det var ju inte alls det vi önskade åstakomma. Därför har vi senaste åren ersatt en del grupphandledning med räknestugor.

Summering

Sammanfattningsvis kan vi säga att de flesta av våra mål med matematikinslagen inom programmet är uppfyllda. Särskilt påtagligt är att intresset för ämnet utvecklas under studiernas gång. Även de kommunikativa färdigheterna utvecklas numera tillfredställande. Om man tar hänsyn till ramförutsättningen om endast ett års heltidsstudier i matematik inom programmet, förefaller studenterna uppnå en god insikt i betydelsen och tillämpbarheten av matematik, och en tillfredställande allmän kunskap och förmåga. Däremot råder en liten tveksamhet beträffande den tekniska skickligheten och en del studenter visar en liten osäkerhet när de individuellt ska behandla en given matematiskt uppgift under tidspress. Detta kan möjligen vara en följd av att det finns för lite tid till att gneta med det grundläggande materialet. Man skulle också kunna misstänka att det myckna arbetet i grupp, väl medveten om alla de positiva effekter detta har, kan vara ett hinder för att utveckla en individuell säkerhet och skicklighet. Hur som helst tror vi att detta problem kan undanröjas genom ytterligare variation av studieformerna samt mer individualiserade presentationer.

Det bör noteras att brister av detta slag förekommer bland studenter på andra program i naturvetenskap och på ingenjörsutbildningarna. Dessutom bör man hålla i minnet att NP-programmet har en profil som attraherar studenter som i stor utsträckning inte alls skulle sökt sig till något annat program med betydande inslag av matematik (och fysik).

Det finns ännu ingen formell utvärdering av hela utbildningen, men allmänt har de utexaminerade studenterna mottagits mycket väl på arbetsmarknaden, och ett oväntat stort antal har fortsatt med en forskarutbildning.

Som jag nämnde inledningsvis har liknande försök att stimulera komunikativa färdigheter gjorts på andra program och vid andra lärosäten och det finns liknande erfarenheter, se t ex Tengstrand (1999). Wistedt (1998) innehåller en utvärdering av samtliga initiativ som stöddes av Grundutbildningsrådets särskilda satsning 1993.

Andersson, M. & Hanson, M. & Räisänen, C. Using themes, projects and communication to enhance learning. (In preparation (hur f-n säger man det på svenska??)

Tengstrand, A., (1999) *Hur förbättrar man kommunikativ och kreativ förmåga i matematik* **Nämnaren -99:1**

Wistedt, I. (1996). Gender inclusive higher education in mathematics, physics, and technology. Five Swedish development projects. Högskoleverkets skriftserie 1996:5S. Stockholm: Högskoleverket.

Wistedt, I. (1997a). Utvärdering av det första året på programmet Naturvetenskaplig problemlösning vid Göteborgs Universitet. Göteborgs universitet: Fakultetskansliet för Naturvetenskap.

Wistedt, I. (1997b). Projektexamination. Göteborgs universitet: Fakultetskansliet för naturvetenskap.

Wistedt, I. (1998). Recruiting female students to higher education in mathematics, physics, and technology. An evaluation of a Swedish initiative. Stockholm: National Agency for Higher Education.

Wistedt, I., Brattström, G., & Martinsson, M. (1996). Vägar till matematisk förståelse i universitetsutbildning som syftar till att utjämna könsskillnader [Ways of learning mathematics in gender-inclusive higher education]. Stockholm University: Department of Education.