



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی

عنوان

**روش اجزای متناهی پخش در جهت مسیر جریان و
گالرکین ناپیوسته برای معادلات خطی شده
بولتزمان**

نگارش

احسان کاظمی

اساتید راهنما

دکتر رضامختاری

پروفیسور محمد اسدزاده

۱۳۹۴

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری

**روش اجزای متناهی پخش در جهت مسیر جریان و گالرکین ناپیوسته برای
معادلات خطی شده بولتزمان**

نگارش: احسان کاظمی

امضاء:

استاد راهنما: دکتر رضا مختاری

امضاء:

استاد راهنما: پروفسور محمد اسدزاده

امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکتر

امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر

تقديم

سپاسگزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. ...

تیر ۱۳۹۵

چکیده

معادله فرمی دارای کاربردهای زیادی در علوم مختلف است. این معادله را می‌توان در حالت حدی از معادله بولتزمان به دست آورد. این معادله تباهیده است به این معنی که جمله پخش و جمله انتقال در فضاهاى فیزیکی متفاوت هستند و همچنین ضریب جمله پخش کوچک است. در این پایان‌نامه روش‌های اجزای محدود پخش در جهت مسیر جریان و گالرکین ناپیوسته از نوع hp و h برای حل این معادله طراحی شده‌اند. برای این روش‌ها در حل معادله فرمی نشان می‌دهیم که نرخ همگرایی با توجه به درجه همواری تابع جواب بهینه است. در قسمت دوم این پایان‌نامه جریان گاز رقیق در تونل طولانی با سطح مقطع دلخواه بررسی شده

است. معادله حاکم این جریان سیال، معادله بولتزمان است. از آنجا که حل عددی معادله بولتزمان در سه بعد از لحاظ محاسباتی پیچیده است، با توجه به شرایط فیزیکی مربوط به این جریان، می‌توان این معادله را بر اساس معادله BGK مدل و سپس خطی‌سازی کرد. در نهایت معادله حاکم یک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی در فضای دو بعدی است. روش ترکیبی مدل گسسته قائم و پخش در جهت مسیر جریان برای این معادله به کار برده شده است. برای این روش ترکیبی، پایداری و کران خطای بهینه در نرم L_2 با توجه به همواری جواب را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادله فرمی؛ تشعشع ذرات؛ گاز رقیق؛ معادله خطی شده BGK؛ روش پخش در مسیر جریان؛ روش گالرکین ناپیوسته؛ روش گسسته قائم؛ پایداری؛ همگرایی

پیشگفتار

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۱	۱-۱ تعریف‌ها و قراردادهای لازم	۱
۵	۲-۱ معرفی فصل‌های رساله	۵
۶	۲ معادله فرمی-فوکر-پلانک و مقدمات روش اجزای محدود	۶
۶	۱-۲ معادله فرمی-فوکر-پلانک	۶
۸	۲-۲ تعایف و پیش نیازهای روش اجزای محدود	۸
۹	۱-۲-۲ تخمین خطای درونیایی	۹
۹	۳-۲ مقدمات روش اجزای متناهی برای معادله فرمی	۹
۱۱	۳ روش اجزای متناهی پخش در مسیر جریان (SD) برای معادله فرمی	۱۱
۱۱	۱-۳ روش اجزای متناهی پخش در مسیر جریان SD	۱۱
۱۲	۱-۱-۳ روش SD از نوع h	۱۲
۱۳	۲-۱-۳ روش SD از نوع hp	۱۳
۱۷	۴ روش اجزای محدود گالرکین ناپیوسته (DG) برای معادله فرمی	۱۷
۱۷	۱-۴ روش گالرکین ناپیوسته (DG)	۱۷
۱۸	۱-۱-۴ روش DG از نوع h	۱۸
۲۴	۲-۱-۴ روش DG از نوع hp	۲۴
۳۰	۵ حل معادله خطی شده BGK با روش اجزای متناهی SD و مدل گسسته قائم	۳۰
۳۰	۱-۵ مقدمه	۳۰
۳۱	۲-۵ معادلات حاکم	۳۱
۳۵	۳-۵ مدل گسسته قائم و روش اجزای متناهی SD	۳۵
۴۴	۶ نتایج عددی	۴۴
۵۴	۷ نتیجه‌گیری	۵۴
۵۶	مراجع	۵۶

۶۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۶۶

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مقدمه

در این فصل نمادگذاری، تعاریف و قضایای ارائه می‌شوند که در فصل‌های بعد از آن استفاده می‌شوند. مطالب این فصل را می‌توان در مراجع مربوط به آنالیز تابعی مانند [۱] یافت.

۱-۱ تعریف‌ها و قراردادهای لازم

تعریف ۱-۱-۱ الگوی دو خطی فرض کنید V یک فضای برداری با ضرائب حقیقی است. تابع $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ یک الگوی دو خطی است هرگاه نسبت به هر دو متغیر یک عملگر خطی باشد، یعنی برای هر $u, v, w \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داشته باشیم،

$$\begin{aligned} A(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda A(u, w) + \mu A(v, w), \\ A(w, \lambda u + \mu v) &= \lambda A(w, u) + \mu A(w, v). \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

تعریف ۲-۱-۱ الگوی دو خطی متقارن الگوی دو خطی $A(\cdot, \cdot)$ را متقارن گویند هرگاه برای هر $u, v \in V$

$$A(u, v) = A(v, u). \tag{۲-۱}$$

تعریف ۳-۱-۱ صورت دو خطی نیمه-معین مثبت الگوی دو خطی $A(\cdot, \cdot)$ را نیمه-معین مثبت می‌گویند هرگاه برای هر $v \in V$

$$A(v, v) \geq 0. \tag{۳-۱}$$

تعریف ۴-۱-۱ صورت دو خطی معین مثبت الگوی دو خطی $A(\cdot, \cdot)$ را معین مثبت می‌گویند هرگاه برای هر $v \in V$ و $v \neq 0$,

$$A(v, v) > 0. \quad (4-1)$$

تعریف ۵-۱-۱ ضرب داخلی یا ضرب نرده ای الگوی دو خطی متقارن و معین مثبت روی v را یک ضرب داخلی یا ضرب نرده ای روی V گویند.

تعریف ۶-۱-۱ نرم فضای ضرب داخلی اگر V یک فضای برداری و (\cdot, \cdot) یک ضرب داخلی روی آن باشد، آنگاه نرم متناظر برای هر $v \in V$ چنین تعریف می‌شود،

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}. \quad (5-1)$$

قضیه ۷-۱-۱ نامساوی کشی - شوارتز فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی (\cdot, \cdot) و نرم متناظر $\|\cdot\|$ است. آنگاه برای هر $v, w \in V$ داریم،

$$|(w, v)| \leq \|w\| \|v\|, \quad (6-1)$$

و برابری زمانی برقرار است که $w = \lambda v$ یا $v = \lambda w$ برای برخی $\lambda \in \mathbb{R}$.

قضیه ۸-۱-۱ نامساوی مثلثی فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با نرم متناظر $\|\cdot\|$ است. آنگاه به ازای هر $v, w \in V$ داریم،

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|. \quad (7-1)$$

تعریف ۹-۱-۱ تعامد دو عنصر v, w از فضای ضرب داخلی V را متعامد می‌گویند هرگاه،

$$(v, w) = 0. \quad (8-1)$$

تعریف ۱۰-۱-۱ فضای هیلبرت فضای ضرب داخلی V که در آن هر دنباله کشی همگرا است را فضای هیلبرت می‌نامیم.

قضیه ۱-۱-۱۱ قضیه تصویر فرض کنید V_0 یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت V است. آنگاه هر $v \in V$ را می‌توان بصورت $v = v_0 + w$ تفکیک کرد که در آن $v_0 \in V_0$ و w بر V_0 عمود است، یعنی برای هر $v \in V_0$ داریم $(w, v) = 0$. عنصر منحصر به فرد v_0 نزدیکترین عنصر به v در V_0 است، یعنی

$$\|v - v_0\| = \min_{u \in V_0} \|v - u\|. \quad (9-1)$$

v_0 تصویر قائم v به V_0 نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۲ فرض کنید V یک فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|$ است. صورت دوخطی $A(\cdot, \cdot)$ روی $V \times V$ را V -بیضوی (تراکم‌پذیر) گویند هر گاه ثابت مثبت α وجود داشته باشد بطوریکه،

$$A(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V. \quad (10-1)$$

تعریف ۱-۱-۱۳ بردارگرادین فرض کنید f یک تابع اسکالری از \mathbb{R}^d $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ و دارای مشتقات جزئی از مرتبه اول نسبت به x_i که در آن $1 \leq i \leq d$ است. گرادین f که با ∇f نمایش داده می‌شود به صورت بردار زیر،

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right), \quad (11-1)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۴ دیورژانس فرض کنید $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)$ یک تابع برداری است و نیز مولفه f_i ، $0 \leq i \leq d$ دارای مشتق جزئی از مرتبه اول نسبت به x_i است. در این صورت دیورژانس \mathbf{f} در (x_1, \dots, x_d) به صورت کمیت اسکالر زیر تعریف می‌شود،

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (12-1)$$

تعریف ۱-۱-۱۵ عملگر لاپلاس اگر $f \in C^2(\Omega)$ که در آن Ω یک دامنه در \mathbb{R}^d است آنگاه لاپلاسیان f در $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ که با Δf نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}. \quad (13-1)$$

به آسانی دیده می‌شود که عملگر لاپلاس یک عملگر خطی است.

تعریف ۱۶-۱-۱ فضاهای L^p فرض کنید Ω یک دامنه در \mathbb{R}^d و $1 \leq p < \infty$ یک عدد حقیقی و f یک تابع اندازه‌پذیر و تعریف شده روی Ω است. اگر،

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (14-1)$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ مجموعه همه f هایی است که $\|f\|_p < \infty$.

تعریف ۱۷-۱-۱ فضای سوبولف H^m فرض کنید m یک عدد صحیح و نامنفی است. فضای سوبولف از مرتبه m که با $H^m(\Omega)$ نشان داده می‌شود که در آن Ω یک دامنه در \mathbb{R}^d است، فضای همه توابع در $L^2(\Omega)$ است که تمام مشتقات ضعیف تا مرتبه m در $L^2(\Omega)$ است یعنی،

$$H^m = H^m(\Omega) = \{f : \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\| < \infty\}. \quad (15-1)$$

که در آن $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ بطوریکه $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$ است. همچنین اگر D_i عملگر مشتق ضعیف نسبت به متغیر i باشد آنگاه $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}$ است. ضرب داخلی در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$(f, g)_m = (f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g dx \quad \forall f, g \in H^m(\Omega). \quad (16-1)$$

در نتیجه نرم متناظر با این ضرب داخلی بصورت،

$$\|f\|_{m, \Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \quad \forall f \in H^m(\Omega), \quad (17-1)$$

و یک شبه-نرم متناظر با آن بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$|f|_{m, \Omega}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \quad \forall f \in H^m(\Omega), \quad (18-1)$$

قضیه ۱۸-۱-۱ قضیه اثر فرض کنید Ω دامنه کراندار با مرز پیوسته لیپ-شیتس $\partial\Omega$ است. آنگاه نگاشت خطی $\gamma_0 : \Omega \rightarrow \partial\Omega$ وجود دارد بطوری که $\gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}$ برای هر $f \in H^s(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. در نتیجه، با توجه به قضیه اثر ثابت مثبت C وجود دارد بطوری که برای هر $f \in H^1(\Omega)$

$$\|f\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)}. \quad (19-1)$$

۲-۱ معرفی فصل‌های رساله

در این بخش مروری مختصر و کلی بر فصل‌های این رساله خواهیم داشت. همان‌طور که دیدیم فصل اول شامل تعریف‌ها و نمادهای لازم در رساله است.

در فصل دوم معادله فرمی معرفی و توصیف شده است و همچنین مقدمات و تعاریف مربوط به روش اجزای متناهی آورده شده است.

در فصل سوم به مطالعه و بررسی روش اجزای متناهی پخش در جهت خط جریان (SD) می‌پردازیم. مطالب این فصل نتایج مقاله‌های [۳۴] و [۱۰] است. در این فصل پایداری و کران خطای بهینه برای روش SD از نوع h و hp نشان داده شده است.

در فصل چهارم به تشریح روش گالرکین ناپیوسته از نوع h و hp برای معادله فرمی می‌پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از مقاله [۱۰] است. در این فصل پایداری و تخمین خطای روش DG برای معادله فرمی نشان داده شده است.

در فصل پنجم یک مدل انرژی جنبشی (BGK) برای جریان گاز در تونل طولانی معرفی شده و سپس مدل گسسته قائم و روش اجزای متناهی SD برای این معادله به کار برده شده است. سپس پایداری و همگرایی این روش در حل جریان گاز بررسی شده است. این نتایج در مقاله [۱۱] آمده است.

در نهایت در فصل ششم نتایج عددی مربوط به مدل ایستای انرژی جنبشی در فصل پنجم آورده شده است و در مورد نتایج نظری به دست آمده در فصل قبل تحقیق شده است. این نتایج در مقاله [۱۱] آمده است.

در فصل هفتم ضمن جمع‌بندی نتایج به دست آمده در این پایان‌نامه، برخی از مهم‌ترین مسائل که در زمینه حل عددی معادلات انتقال وجود دارد را آورده و کارهایی که در دست انجام است ارائه می‌شود.

فصل ۲

معادله فرمی-فوکر-پلانک و مقدمات روش اجزای محدود

۱-۲ معادله فرمی-فوکر-پلانک

معادله تشعشع ذرات بر روی یک قطعه با ضخامت متناهی در نظر گرفته شده است. ذرات در نقطه‌ای که آن را مبدا یعنی $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ، می‌نامیم در جهت مثبت محور x وارد می‌شوند. فرض می‌کنیم که زاویه توزیع ذرات کوچک است و از زوایای بزرگ چشم‌پوشی می‌کنیم. این فرض برای ذرات باردار مانند الکترون‌ها، پروتون‌ها و یون‌های سنگین معتبر است. زاویه ذرات تشعشع با حرکت در عمق قطعه بزرگ می‌شود. این مساله که چگونه زاویه تشعشع گسترده می‌شود ابتدا در سال ۱۹۹۰ توسط فرمی مطرح شد. او ابتدا با استفاده از تعبیرهای فیزیکی یک معادله تک انرژی با یک جواب تحلیلی به دست آورد. نتایج فرمی براساس یک تحقیق بر روی تشعشعات کهکشانی در فضا بود. این مساله فیزیکی دارای کاربردهای زیادی در ستاره‌شناسی، علم مواد، میکروسکوپیهای الکترونی و رادیوتراپی است. معادله فرمی را می‌توان از معادله بولتزمان خطی در حالت حدی به دست آورد هنگامی که سطح مقطع تشعشعات به سمت صفر میل می‌کند [۱۶]. معادله بولتزمان برای مساله انتقال تابش بدون جذب و بدون وابستگی به انرژی با معادله زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \int_{\mathcal{F}\pi} \sigma_s(\underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}') [\psi(x, \underline{\Omega}') - \psi(x, \underline{\Omega})] d^2 \underline{\Omega}', \\ 0 < x < 1, & \\ \psi(0, y, z, \underline{\Omega}) &= \delta(y) \delta(z) \frac{\delta(1 - \mu)}{2\pi}, \quad 0 < \mu \leq 1, \\ \psi(1, y, z, \underline{\Omega}) &= 0, \quad -1 \leq \mu < 0. \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

در این معادله متغیرهای مربوط به مکان به گونه‌ای بدون بعد شده‌اند که عرض قطعه واحد است. عرض قطعه بر حسب میانگین مسیر برخورد σ_t^{-1} است که در آن $\sigma_t = 2\pi \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu_0) d\mu_0$. در این معادله

$\underline{\Omega} = (\mu, \eta, \xi)$ بردار سرعت را نشان می‌دهد که در آن

$$\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \quad \xi = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi.$$

سطح مقطع دیفرانسیلی توزیع هنگامی که جذب وجود ندارد دارای توزیع زیر است،

$$\sigma_s(\mu_0) = \sigma_t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} f_n P_n(\mu_0), \quad f_0 = 1, \quad f_1 = \bar{\mu}_0. \quad (2-2)$$

که در آن P_n جمله n ام چندجمله‌ای لژاندر است. تقریب فوکر-پلانک برای معادله بولترمان با رابطه زیر داده شده است،

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi}{\partial \psi} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\sigma_{tr}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(x, \underline{\Omega}), \quad 0 < x < 1, \\ \psi(0, y, z, \underline{\Omega}) &= \delta(y)\delta(z) \frac{\delta(1 - \mu)}{2\pi}, \quad 0 < \mu \leq 1, \\ \psi(1, y, z, \underline{\Omega}) &= 0, \quad -1 \leq \mu < 0. \end{aligned} \quad (3-2)$$

که در آن $\sigma_{tr} = \sigma_t(1 - \bar{\mu}_0)$ است. معادله فوکر-پلانک عموماً از معادله انتقال به دست می‌آید با این فرض که زوایای توزیع کوچک به زوایای توزیع بزرگ غالب است و سپس شار زاویه‌ای ψ در معادله ۳-۲ با استفاده از سری تیلور حول $\underline{\Omega}' = \underline{\Omega}$ تا درجه دوم بسط داده می‌شود. فرمی معادله زیر را برای تشعشع در حالت $\sigma_{tr} \ll 1$ پیشنهاد داد،

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\sigma_{tr}}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \psi(x, \underline{\Omega}), \quad 0 < x < 1, \\ \psi(0, y, z, \eta, \xi) &= \delta(y)\delta(z)\delta(\eta)\delta(\xi). \end{aligned} \quad (4-2)$$

یکی از ویژگی‌های معادله فرمی این است که با توسیع دامنه η و ξ به همه اعداد حقیقی و با استفاده از تبدیل فوریه با توجه به متغیرهای y, z, η, ξ می‌توان یک جواب تحلیلی در حالت $\sigma_{tr} = \sigma_{tr}(x)$ بدست آورد. با این حال در حالت کلی جواب تحلیلی برای $\sigma_{tr} = \sigma_{tr}(x, y, z)$ نمی‌توان بدست آورد. با معرفی متغیرهای

$$v_1 = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}, \quad v_2 = \frac{\xi}{\mu} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}, \quad (5-2)$$

معادله فرمی سه بعدی در یک چندوجهی کراندار $\Omega_x \subset \mathbb{R}^3$ با بردار سرعت $v \in \Omega_v \subset \mathbb{R}^2$ بصورت زیر است،

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + v \cdot \nabla_{\perp} f = \frac{\sigma_{tr}}{2} (\Delta_v f), & \text{در } (0, L] \times \Omega, \\ f(0, x_{\perp}, v) = f_0(x_{\perp}, v), & \text{در } \Omega = \Omega_{x_{\perp}} \times \Omega_v, \\ f(x, x_{\perp}, v) = 0, & \text{در } (0, L] \times ([\Gamma_v^- \times \Omega_v] \cup [\Omega_{x_{\perp}} \times \partial\Omega_v]), \end{cases} \quad (6-2)$$

بطوری که $f \in L^2(\Omega)$ و مرز با شارش خارجی برای هر $v \in \Omega_v$ بصورت زیر است،

$$\Gamma_v^- = \{x_\perp \in \partial\Omega_{x_\perp} : \mathbf{n}(x_\perp) \cdot v < 0\}. \quad (7-2)$$

در اینجا $\mathbf{n}(x_\perp)$ نرمال یکه خارجی بر مرز Ω_{x_\perp} یعنی $\partial\Omega_{x_\perp}$ در نقطه $x_\perp \in \partial\Omega_{x_\perp}$ است بطوریکه $\nabla_\perp = (\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ، $v = (v_1, v_2)$ ، $x_\perp = (y, z)$ و $\sigma_{tr} = \sigma_{tr}(x, y, z)$ سطح مقطع انتقال است.

۲-۲ تعایف و پیش نیازهای روش اجزای محدود

تعریف ۱-۲-۲ المان مرجع دامنه لیپ-شیتس ثابت \hat{K} را المان مرجع نامیده می شود هرگاه برای هر المان K نگاشت آفین معکوس پذیر F_K وجود داشته باشد بطوریکه

$$F_K(\hat{K}) = K. \quad (8-2)$$

تعریف ۲-۲-۲ خانواده آفین مثلث بندی T_h یک خانواده آفین است هرگاه هر المان $K \in T_h$ با المان مرجع هم ارز باشد.

تعریف ۳-۲-۲ خانواده منظم خانواده افزایشی $\{T_h\}_{h>0}$ را منظم گویند اگر ثابت C مستقل از h وجود داشته باشد بطوریکه

$$C \cdot h_K \leq \rho(K), \quad \forall K \in \bigcup_{h>0} \{T_h\}, \quad (9-2)$$

که در آن $\rho(K)$ تابعی از قطر دایره محاط در المان K است.

تعریف ۴-۲-۲ خانواده شبه-یکنواخت خانواده افزایشی $\{T_h\}_{h>0}$ را شبه-یکنواخت گویند اگر ثابت τ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $h > 0$ ،

$$h_K \geq \tau h, \quad \forall K \in \bigcup_{h>0} \{T_h\}. \quad (10-2)$$

۱-۲-۲ تخمین خطای درونیابی

فرض کنید X_K فضای توابع پایه‌ای ϕ_i^K بر روی المان K است. عملگر $I_K : H^{k+1} \rightarrow X_K \subset H^m(K)$ با

$$I_K(v) = \sum_{i=1}^N v(x_i^K) \phi_i^K, \quad (11-2)$$

تعریف می‌کنیم که در آن نقاط گره‌ای در المان K هستند بطوریکه،

$$\phi_i^K(x_j^K) = \delta_{ij}. \quad (12-2)$$

آنگاه برای هر $v \in H^{k+1}(K)$

$$|v - I_K(v)|_{m,K} \leq Ch_K^{k+1} |v|_{k+1,K}, \quad (13-2)$$

که در آن ثابت C مستقل از K است. به علاوه اگر شبکه \mathcal{T}_h منظم باشد آنگاه برای هر $K \in \mathcal{T}_h$ تخمین خطای زیر برقرار است،

$$\|v - I_K(v)\|_{m,K} \leq Ch_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}. \quad (14-2)$$

قضیه ۵-۲-۲ تخمین خطای سراسری فرض کنید $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ یک خانواده آفین منظم از افرازه‌ها از Ω است. آنگاه ثابت C مستقل از h وجود دارد بطوریکه برای هر $v \in H^{k+1}(\Omega)$ و $k > 0$

$$\|v - I_h(v)\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} |v|_{k+1,\Omega}, \quad m = 0, 1. \quad (15-2)$$

قضیه ۶-۲-۲ نامساوی معکوس فرض کنید $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ یک خانواده شبه-یکنواخت از افرازه‌ها از $\bar{\Omega}$ است. آنگاه ثابت C_I وجود دارد بطوریکه برای هر $v_h \in V_h$

$$\|\nabla v_h\|^2 \leq C_I h^{-2} \|v_h\|^2. \quad (16-2)$$

۳-۲ مقدمات روش اجزای متناهی برای معادله فرمی

یک گسسته‌سازی بر روی دامنه $\Omega_{x_\perp} \times \Omega_v$ بصورت زیر است: فرض کنید $T_h^{x_\perp} = \{\tau_{x_\perp}\}$ یک افراز از Ω_{x_\perp} به اجزای τ_{x_\perp} و $T_h^v = \{\tau_v\}$ یک افراز از Ω_v به اجزای τ_v است. $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = L$

یک افراز از بازه $I = (0, L]$ به زیر بازه‌های $I_m = (x_{m-1}, x_m)$, $m = 1, \dots, M$ است. فرض کنید \mathcal{C}_h افراز $Q_L := (0, L] \times \Omega$ به اجزای $K = I_m \times \tau$ با اندازه شبکه $h = \text{diam } K$ است. فرض کنید $P_p(K)$ مجموعه چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر p بر روی المان K در متغیرهای x , x_\perp و v است. فضای تابعی از بعد متناهی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$V_h = \{g \in \tilde{\mathcal{H}}_0 : g \circ F_K \in P_p(\hat{K}); \forall K \in \mathcal{C}_h\}, \quad (17-2)$$

بطوریکه،

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \prod_{m=1}^M H_0^1(S_m), \quad S_k = I_k \times \Omega, \quad k = 1, \dots, M, \quad (18-2)$$

و

$$H_0^1(S_m) = \{g \in H^1(S_m) : g \equiv 0 \quad \partial\Omega_v \text{ روی } \partial\Omega_v\}. \quad (19-2)$$

به‌علاوه از نمادهای زیر برای ضرب داخلی توابع در نرم L_2 استفاده می‌شود،

$$\begin{aligned} (f, g)_m &= (f, g)_{S_m}, & \|g\|_m^2 &= (g, g)_m, \\ \langle f, g \rangle_m &= (f(x_m, \cdot, \cdot), g(x_m, \cdot, \cdot))_\Omega, & |g|_m^2 &= \langle g, g \rangle_m, \\ \langle f, g \rangle_{\Gamma^-} &= \int_{\Gamma^-} f g (\beta \cdot \mathbf{n}) ds, & \langle f, g \rangle_{\Gamma_m^-} &= \int_{I_m} \langle f, g \rangle_{\Gamma^-} ds, \\ \langle f, g \rangle_{\Gamma_I^-} &= \int_I \langle f, g \rangle_{\Gamma^-} ds, \end{aligned} \quad (20-2)$$

بطوریکه،

$$\Gamma^- = \{(x_\perp, v) \in \Gamma = \partial(\Omega_{x_\perp} \times \Omega_v) : \beta \cdot \mathbf{n} < 0\}.$$

در این رابطه $\beta = (v, \mathbf{0})$ و $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_{x_\perp}, \mathbf{n}_v)$ که \mathbf{n}_{x_\perp} و \mathbf{n}_v به ترتیب بردارهای نرمال به خارج مرز $\partial\Omega_{x_\perp}$ و $\partial\Omega_v$ هستند در ادامه ثابت C یک ثابت عمومی است که مستقل از پارامترها و همچنین توابع است مگر اینکه به طور صریح وابستگی آن به متغیری بیان شود. در نهایت برای چند جمله‌ای‌های قطعه‌ای بر روی شبکه $\mathcal{C}'_h \subset \mathcal{C}_h$ با $\mathcal{C}'_h = \{K\}$ از نماد

$$(D_1 w_1, D_2 w_2)_{Q'} = \sum_{K \in \mathcal{C}'_h} (D_1 w_1, D_2 w_2)_K, \quad Q' = \bigcup_{K \in \mathcal{C}'_h} K, \quad (21-2)$$

استفاده می‌شود که در آن D_i یک عملگر دیفرانسیلی است و $(\cdot, \cdot)_{Q'}$ یک ضرب داخلی در فضای $L_2(Q')$ است. نرم متناظر با این ضرب داخلی $\|\cdot\|_{Q'}$ است.

فصل ۳

روش اجزای متناهی پخش در مسیر جریان (SD) برای معادله فرمی

۱-۳ روش اجزای متناهی پخش در مسیر جریان SD

در اینجا ما از توابع تقریب پیوسته در x_{\perp} و v استفاده می‌کنیم که ممکن است در متغیر x در نقاط گره‌ای از افراز T_h از $[0, L]$ ناپیوسته باشند. در متغیر x جهش را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$[g] = g_+ - g_-, \quad (1-3)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} g_{\pm} &= \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} g(x + s, x_{\perp}, v), & (x_{\perp}, v) &\in \text{Int}(\Omega_{x_{\perp}}) \times \Omega_v, \quad x \in I \text{ برای}, \\ g_{\pm} &= \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} g(x + s, x_{\perp} + sv, v), & (x_{\perp}, v) &\in \partial\Omega_{x_{\perp}} \times \Omega_v, \quad x \in I \text{ برای}. \end{aligned} \quad (2-3)$$

که در آن $\text{Int}(\Omega_{x_{\perp}}) = \Omega_{x_{\perp}} - \partial\Omega_{x_{\perp}}$. فرم تغییراتی معادله (۲-۶) با شرایط مرزی در فضای L_2 بصورت زیر است،

مطلوب است $f^h \in V_h$ برای $m = 0, 1, \dots, M-1$ و هر $g \in V_h$ بطوریکه

$$\begin{aligned} \sum_{K \in I_m \times T_h} [(f_x^h + v \cdot \nabla_{\perp} f^h, g + \delta(g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g))_K + \sigma(\nabla_v f^h, \nabla_v g)_K \\ - \delta\sigma(\Delta_v f^h, g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g)_K] + \langle f_+^h, g_+ \rangle_m - \langle f_+^h, g_+ \rangle_{\Gamma_m^-} = \langle f_-^h, g_+ \rangle_m. \end{aligned} \quad (3-3)$$

در روش اجزای متناهی SD از نوع h ، با استفاده از توابع آزمون به شکل $g + \delta(g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g)$ با $g + \delta(g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g)$ یک جمله پخش از مرتبه h^{α} در جهت خط جریان $(1, v, 0)$ ایجاد می‌شود که در آن $\alpha \geq 1$ ، $\delta \sim h^{\alpha}$ بردار صفر در فضای سرعت است. در نتیجه می‌توان یک کران برای جمله $\|g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g\|$ به دست آورد. در روش hp انتخاب δ به پارامترهای موضعی h و p بستگی دارد، در نتیجه در روش hp ، برای هر المان، δ به صورت موضعی تعریف می‌شود.

۳-۱-۱ روش SD از نوع h

روشی عددی SD از نوع h برای معادله فرمی (۲-۶) با توابع پایه‌ای ناپیوسته در نقاط گره‌ای در متغیر x را در ادامه تعریف می‌کنیم. ابتدا فرم دو خطی \tilde{B} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{B}(f, g) = B(f, g) + \sum_{m=1}^{M-1} \langle [f], g_+ \rangle_m + \langle f_+, g_+ \rangle_\circ - \langle f_+, g_+ \rangle_{\Gamma_I^-}, \quad (۴-۳)$$

که در آن

$$B(f, g) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} [(f_x + v \cdot \nabla_\perp f, g + \delta(g_x + v \cdot \nabla_\perp g))_{Q_L} + \sigma(\nabla_v f, \nabla_v g)_K - \delta\sigma(\Delta_v f, g_x + v \cdot \nabla_\perp g)_K] + \langle f, g \rangle_\circ - \langle f, g \rangle_{\Gamma^-}. \quad (۵-۳)$$

همچنین فرم خطی \tilde{L} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{L}(g) = \langle f_\circ, g_+ \rangle_\circ,$$

معادله (۳-۳) به صورت فرم تغییراتی زیر بازنویسی می‌شود،

$$\tilde{B}(f^h, g) = \tilde{L}(g), \quad \forall g \in V_h. \quad (۶-۳)$$

خطای روش SD از نوع h در نرم زیر بدست می‌آید،

$$|||g|||^2 = \frac{1}{\nu} \left[|||g|||^2 + \delta \|g_x + v \cdot \nabla_\perp g\|_{Q_L}^2 + \sum_{m=1}^{M-1} |[g]|_m^2 \right], \quad (۷-۳)$$

که در آن

$$|||g|||^2 = \left[\sigma \|\nabla_v g\|_{Q_L}^2 + |g|_M^2 + |g|_\circ^2 + \int_{I \times \partial\Omega} g^2 |\beta \cdot \mathbf{n}| dv ds \right]. \quad (۸-۳)$$

در زیر نتایج اصلی مربوط به روش SD از نوع h آورده شده است [۳۴].

لم ۳-۱-۱ فرم دو خطی \tilde{B} در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$\tilde{B}(g, g) \geq |||g|||^2 \quad \forall g \in V_h.$$

قضیه ۳-۱-۲ فرض کنید توابع f و f^h به ترتیب در معادلات (۲-۶) و (۳-۶) صدق کنند، آنگاه

$$|||f - f^h||| \leq Ch^{k+1/\nu} \|f\|_{k+1, Q_L}. \quad (۹-۳)$$

۳-۱-۲ روش SD از نوع hp

در این بخش تخمین‌های مربوطه به روش SD از نوع hp به دست آورده می‌شوند بطوریکه این تخمین‌ها به طور همزمان در پارامترهای h و p بهینه هستند. در حقیقت نتایج مربوط به همگرایی روش اجزای متناهی SD از نوع h به روش اجزای متناهی SD از نوع hp گسترش می‌یابد. به این منظور فرم تغییراتی دو خطی زیر،

$$\hat{B}_\delta(f, g) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} [(f_x + v \cdot \nabla_\perp f, g + \delta(g_x + v \cdot \nabla_\perp g))_K + \sigma(\nabla_v f, \nabla_v g)_K - \delta\sigma(\Delta_v f, g_x + v \cdot \nabla_\perp g)_K] + \sum_{m=1}^{M-1} [\langle [f], g_+ \rangle_m + \langle f, g \rangle_\circ - \langle f, g \rangle_{\Gamma^-}]$$

و فرم خطی،

$$\hat{L}_\delta(g) = \langle f_\circ, g_+ \rangle_\circ,$$

تعریف می‌شوند که در آن δ یک پارامتر بطور قطعه‌ای ثابت بصورت زیر است،

$$\delta|_K = \delta_K \quad \delta_K = \text{ثابت} \quad K \in \mathcal{C}_h \text{ برای.}$$

مقدار دقیق δ در روش عددی باید تعیین شود. فرمول تغییراتی (۳-۶) در حالت موضعی بصورت زیر است،

تابع $f^h \in V_h^p$ در فضای توابع با بعد متناهی از چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر p مطلوب است بطوریکه

$$\hat{B}_\delta(f^h, g) = \hat{L}(g) \quad \forall g \in V_h^p, \quad (۱۰-۳)$$

در روش اجزای متناهی SD از نوع hp ، تابع δ بطور موضعی در سطح المان تغییر می‌کند که با δ_K نشان می‌دهیم. نرم $\| \cdot \|_\delta$ که از رابطه (۳-۷) با جایگزینی $\delta(h)$ با δ_K به دست می‌آید به صورت زیر است،

$$\| \|g\| \|_\delta^2 =: \frac{1}{\nu} \left[\| \|g\| \|_\delta^2 + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \delta_K \| g_x + v \cdot \nabla_\perp g \|_K^2 + \sum_{m=1}^{M-1} \| [g] \|_m^2 \right]. \quad (۱۱-۳)$$

لم ۳-۱-۳ فرض کنید که پارامتر SD ، δ_K در بازه

$$0 < \delta_K \leq \frac{h_K^2}{\sigma C_I p^4}, \quad \forall K \in \mathcal{C}_h, \quad (۱۲-۳)$$

است بطوریکه ثابت C_I مربوط به نامساوی معکوس (۲-۱۶) است. آنگاه فرم دو خطی $\hat{B}_\delta(\cdot, \cdot)$ در فضای تراکم‌پذیر $V_h^p \times V_h^p$ است یعنی،

$$\hat{B}_\delta(g, g) \geq \frac{1}{\nu} \| \|g\| \|_\delta^2, \quad \forall g \in V_h^p. \quad (۱۳-۳)$$

برهان. نامساوی زیر

$$\begin{aligned} \delta_K \sigma(\Delta_v g, g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g)_K &\leq \frac{1}{p} C_I h_K^{-1} p^{\gamma} \sqrt{\sigma \delta_K} [\sigma \|\nabla_v g\|_K^2 + \delta_K \|g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g\|_K^2] \\ &\leq \frac{1}{p} [\sigma \|\nabla_v g\|_K^2 + \delta_K \|g_x + v \cdot \nabla_{\perp} g\|_K^2], \end{aligned}$$

که از نامساوی کشی-شوارتز و نامساوی معکوس بدست می‌آید، نتیجه مورد نظر را بدست می‌دهد. ■

لم ۴-۱-۳ نامساوی درونیاب فرض کنید $g \in H^s(K)$ و $\|\cdot\|_{s,K}$ یک نرم سوبولف بر روی K باشد. آنگاه ثابت C وابسته به s و r ولی مستقل از g و h_K وجود دارد بطوریکه چندجمله‌ای $\Pi_p g$ از درجه p وجود دارد بطوریکه

$$\|g - \Pi_p g\|_{r,K} \leq C \frac{h_K^{\mu-r}}{p^{s-r}} \|g\|_{s,K}, \quad \text{برای } 0 \leq r \leq s, \quad \mu = \min(p+1, s). \quad (14-3)$$

همچنین به یک تقریب درونیاب که پیوستگی بر کل دامنه را تضمین کند نیاز است.

لم ۵-۱-۳ فرض کنید $r > 2$ فرض کنید $g \in H^s(Q_L) \cap L^r(I, H^r(\Omega))$ ، بطوریکه $g|_K \in H^s(K)$ که در آن $K \in \mathcal{C}_h$ و $s \geq r$. آنگاه درونیاب $\Pi_p g \in V_h^p$ از g که بر روی Ω پیوسته است وجود دارد بطوریکه،

$$\|g - \Pi_p g\|_{1,K} \leq C \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|g\|_{s,K}. \quad (15-3)$$

در اینجا $C > 0$ یک ثابت مستقل از h و p است و $\mu = \min(p+1, s)$.

برای اثبات این لم به [۲۹] و [۱۸] ارجاع می‌دهیم. در ادامه همچنین از قضیه اثر ۱-۱-۱۸ استفاده می‌کنیم،

$$\|\eta\|_{\partial K}^2 \leq C(\|\nabla \eta\|_K \|\eta\|_K + h_K^{-1} \|\eta\|_K^2), \quad \forall K \in \mathcal{C}_h. \quad (16-3)$$

قضیه ۶-۱-۳ فرض کنید \mathcal{C}_h یک خانواده از افرازاها با شکل منظم بر روی Q_L و f جواب دقیق معادله فرمی (۶-۲) است که در شرایط لم ۵-۱-۳ صدق می‌کند. فرض کنید f^h یک جواب از معادله (۱۰-۳) است و فرض کنید برای هر $K \in \mathcal{C}_h$ ، $0 < \delta_K \leq \frac{h_K^{\gamma}}{\sigma C_I p^{\gamma}}$. آنگاه

$$\|f - f^h\|_{\delta}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{\gamma s - \gamma}} \left(\frac{1}{p^{\gamma}} + \frac{1}{p} + \sigma h_K^{-1} + \delta_K h_K^{-1} + \frac{h_K}{\delta_K p^{\gamma}} \right) \|f\|_{s,K}^2. \quad (17-3)$$

برهان. با توجه به نامساوی مثلی

$$\| \|f - f^h\| \|_\delta \leq \| \|\eta\| \|_\delta + \| \|\xi\| \|_\delta, \quad (18-3)$$

بطوریکه $\eta = f - \Pi_p f$ و $\xi = f^h - \Pi_p f$. در این رابطه $\Pi_p f \in V_h^p$ عملگر درونیاب در لم ۳-۱-۵ است. با استفاده از لم ۲-۲ و رابطه تعامد گالرکین یعنی $\hat{B}_\delta(e, \xi) = 0$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \| \|\xi\| \|_\delta^2 &\leq \hat{B}_\delta(\xi, \xi) = \hat{B}_\delta(\eta, \xi) - \hat{B}_\delta(e, \xi) = \hat{B}_\delta(\eta, \xi) \\ &= \sigma(\nabla_v \eta, \nabla_v \xi)_{Q_L} - \sigma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \delta_K (\Delta_v \eta, \xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi)_K \\ &\quad + (\eta_x + v \cdot \nabla_\perp \eta, \xi)_{Q_L} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \delta_K (\eta_x + v \cdot \nabla_\perp \eta, \xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi)_K \quad (19-3) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{M-1} \langle [\eta], \xi_+ \rangle_m + \langle \eta_+, \xi_+ \rangle_0 - \langle \eta, \xi_+ \rangle_{\Gamma_I^-} = \sum_{i=1}^{\gamma} T_i. \end{aligned}$$

جملات T_1 و $T_7 - T_\gamma$ با استفاده از روشهای متداول به آسانی تقریب زده می‌شوند. برای جمله T_6 ، با استفاده از نامساوی معکوس و مفروضات بر σ و δ_K داریم،

$$|T_6| \leq C_I \delta_K \sigma p^\gamma h_K^{-1} (\|\nabla_v \eta\|_K) (\|\xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi\|_K) \leq 2\sigma \|\eta\|_K^2 + \frac{\delta_K}{\lambda} \|\xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi\|_K^2.$$

در نهایت رابطه (۱۹-۳) به صورت زیر در می‌آید،

$$\| \|\xi\| \|_\delta \leq C(I_1 + I_2), \quad (20-3)$$

که در آن I_1 و I_2 با روابط زیر تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\delta_K^{-1} \|\eta\|_K^2 + \delta_K \|\eta_x + v \cdot \nabla_\perp \eta\|_K^2 + \sigma \|\nabla_v \eta\|_K^2), \\ I_2 &= \sum_{m=1}^{M-1} |\eta_-|_m^2 + \int_{I \times \partial\Omega} \eta^\gamma |\beta \cdot \mathbf{n}| dv ds. \end{aligned}$$

برای تقریب I_1 با استفاده از لم ۳-۱-۵ و فرضیات مربوط به δ_K داریم،

$$I_1 \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\gamma\mu-\gamma}}{p^{\gamma s-\gamma}} (\delta_K^{-1} \frac{h_K^\gamma}{p^\gamma} + \delta_K + \sigma) \|f\|_{s,K}^2. \quad (21-3)$$

برای تقریب I_2 با استفاده از نامساوی اثر (۱۶-۳) داریم،

$$I_2 \leq \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(\frac{h_K^{\mu-1}}{p^{s-1}} \frac{h_K^\mu}{p^s} + h_K^{-1} \frac{h_K^{\gamma\mu}}{p^{\gamma s}} \right) \|f\|_{s,K}^2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\gamma\mu-1}}{p^{\gamma s-1}} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \|f\|_{s,K}^2. \quad (22-3)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۲۰-۳) تا (۲۲-۳) داریم،

$$\| \|\xi\| \|_\delta \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\gamma\mu-1}}{p^{\gamma s-\gamma}} \left(\frac{1}{p^\gamma} + \frac{1}{p} + \sigma h_K^{-1} + \delta_K h_K^{-1} + \frac{h_K}{\delta_K p^\gamma} \right) \|f\|_{s,K}^2. \quad (23-3)$$

در نهایت با روش مشابه می‌توان $[[|\eta|]]_\delta$ را به صورت زیر تقریب زد،

$$[[|\eta|]]_\delta^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{\nu s - \nu}} \left(\frac{1}{p} + \sigma h_K^{-1} + \delta_K h_K^{-1} \right) \|f\|_{s,K}^2. \quad (24-3)$$

با جایگذاری روابط (۲۳-۳) و (۲۴-۳) در رابطه (۱۸-۳) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. ■

تبصره ۷-۱-۳ در قضیه ۴-۲، δ_K برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ به صورت موضعی تغییر می‌کند. δ_K به صورتی انتخاب می‌شود که در مفروضات قضیه ۶-۱-۳ صدق کند. در نتیجه در صورتیکه σ نسبت به h_K و $1/p$ کوچک باشد، کران

$$[[|f - f^h|]]_\delta^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{\nu s - \nu}} \|f\|_{s,K}^2. \quad (25-3)$$

را برای خطای روش SD از نوع hp به دست می‌دهد. مفروضات بر σ در بدست آوردن این کران خطای بهینه اساسی است.

تبصره ۸-۱-۳ مفروضات قضیه ۵-۱-۳ در مورد همواری جواب در کل دامنه محدود کننده است ولی با توجه به اینکه در روش SD فرض می‌کنیم توابع آزمون در متغیرهای (x_\perp, v) پیوسته هستند لذا برداشتن این شرایط در این روش امکان‌پذیر نیست. در روش اجزای متناهی گالرکین ناپیوسته این شرایط کاهش می‌یابد.

تبصره ۹-۱-۳ در نتایجی که به دست آمد، به دلیل ساده‌سازی در نمادگذاری پارامترهای p و s برای همه المان‌های شبکه بطور یکسان انتخاب شدند. این نتایج می‌تواند به حالتی گسترش یابد که درجه چند جمله‌ای‌ها p ، به صورت موضعی در سطح هر المان به p_K و همچنین درجه همواری s به صورت موضعی در سطح هر المان به s_K تغییر کند. در این صورت پارامتر عمومی $\mu = \min(p+1, s)$ به پارامتر موضعی $\mu_K = \min(p_K+1, s_K)$ تغییر می‌کند.

فصل ۴

روش اجزای محدود گالرکین ناپیوسته (DG) برای معادله فرمی

۱-۴ روش گالرکین ناپیوسته (DG)

در این بخش فرض می‌کنیم توابع تقریب بر هر المان K از درجه $k \geq 1$ باشند و همچنین توابع تقریب ممکن است در مرزهای بین المانها در همه متغیرها ناپیوسته باشند. تعریف می‌کنیم،

$$\partial K_{\pm}(\tilde{\beta}) = \{(x, x_{\perp}, v) \in \partial K : \tilde{\beta} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_x(x, x_{\perp}, v) + \mathbf{n}_{x_{\perp}}(x, x_{\perp}, v) \cdot v \geq 0\}, \quad K \in \mathcal{C}_h,$$

بطوریکه $\tilde{\beta} = (1, v, 0)$ و $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_{x_{\perp}}, \mathbf{n}_v)$ بردار یکه عمود به ∂K در جهت بیرون k است. برای گسسته‌سازی جمله پخش در معادله دیفرانسیل، با استفاده از توابع تقریب ناپیوسته، عملگر R را با توجه به مراجع [۷] و [۱۹] تعریف می‌کنیم. به این منظور ابتدا فضاها V_h ، \tilde{V} و \mathbf{W}_h را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{V} = \prod_{K \in \mathcal{C}_h} H^1(K),$$

$$V_h = \{w \in L^2(Q_L) : w|_K \in P_k(K) : \forall K \in \mathcal{C}_h; w = 0 \text{ on } \partial\Omega_v\}, \quad (1-4)$$

$$\mathbf{W}_h = \{\mathbf{w} \in [L^2(Q_L)]^3 : \mathbf{w}|_K \in [P_k(K)]^3; \forall K \in \mathcal{C}_h\}.$$

آنگاه برای تابع $g \in \tilde{V}$ داده شده عملگر $R : \tilde{V} \rightarrow \mathbf{W}_h$ با فرم ضعیف زیر تعریف می‌شود،

$$(R(g), \mathbf{w}) = - \sum_{I_m \times \tau_{x_{\perp}}} \int_{I_m \times \tau_{x_{\perp}}} \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \int_e [[g]] \mathbf{n}_v \cdot (\mathbf{w})^{\circ} dv, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_h.$$

که در آن \mathcal{E}_v مجموعه تمام یالهای درونی از مثلث بندی T_h^v از دامنه Ω_v^h و \mathbf{n}_v بردار نرمال یکه خارجی از المان τ_i به τ_j با $i > j$ است که در آن المان τ_i و المان τ_j در یال e اشتراک دارند. برای تابع χ کمیت‌های زیر تعریف می‌کنیم،

$$(\chi)^{\circ} := \frac{\chi + \chi^{ext}}{2}, \quad [[\chi]] := \chi - \chi^{ext}, \quad (2-4)$$

بطوریکه χ^{ext} متناظر با تابع χ در المان τ_v^{ext} است که با المان τ_v دارای یال مشترک $e \in \mathcal{E}_v$ است. به عبارت دیگر $[[\chi]]$ مقدار پرش تابع در یال e و $(\chi)^\circ$ میانگین مقدار تابع در بین دو المان مجاور است. سپس برای هر یال $e \in \mathcal{E}_v$ عملگر r_e که تحدید R به المانهایی است که در یال $e \in \mathcal{E}_v$ مشترک هستند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$(r_e(g), \mathbf{w})_{Q_L} = - \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_e [[g]] \mathbf{n}_v \cdot (\mathbf{w})^\circ dv, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_h.$$

از تعاریف عملگرهای r_e و R نتیجه می‌شود که بر روی هر المان τ_v ،

$$\sum_{e \in \partial \tau_v \cap \mathcal{E}_v} r_e = R. \quad (۳-۴)$$

که از آن رابطه زیر بدست می‌آید،

$$\|R(g)\|_K^2 \leq \kappa \sum_{e \in \partial \tau_v \cap \mathcal{E}_v} \|r_e(g)\|_K^2, \quad (۴-۴)$$

در این رابطه τ_v متناظر با المان K و $\kappa > 0$ یک ثابت است. با توجه به اینکه محمل هر عملگر r_e المان‌هایی است که در یال e اشتراک دارند داریم،

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_v} \|r_e(g)\|_{Q_L}^2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{e \in \partial \tau_v \cap \mathcal{E}_v} \|r_e(g)\|_K^2. \quad (۵-۴)$$

۱-۱-۴ روش DG از نوع h

فرم تغییراتی روش DG از نوع h برای معادله (۲-۶) بصورت زیر است،
مطلوبست تابع $f^h \in V_h$ که در رابطه زیر صدق کند،

$$B_{\delta, \theta}(f^h, g) = \langle f_\circ, g_+ \rangle_\circ, \quad \forall g \in V_h, \quad (۶-۴)$$

که در آن

$$B_{\delta, \theta}(f, g) = A_\delta(f, g) + D_\theta(f, g). \quad (۷-۴)$$

فرمهای دو خطی A_δ و D_θ متناظر با جمله انتقال و جمله پخش معادله فرمی بصورت زیر است،

$$\begin{aligned} A_\delta(f^h, g) &= \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (f_x^h + v \cdot \nabla_\perp f^h, g + \delta_K(g_x + v \cdot \nabla_\perp g))_K + \langle f_+, g_+ \rangle_\circ \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [f] g_+ |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}|, \quad \partial K_-(\tilde{\beta})' = \partial K_-(\tilde{\beta}) \setminus \{\circ\} \times \Omega, \end{aligned} \quad (۸-۴)$$

$$D_\theta(f^h, g) = \sigma(\nabla_v f^h, \nabla_v g)_{Q_L} + \sigma(\nabla_v f^h, R(g))_{Q_L} + \sigma(R(f^h), \nabla_v g)_{Q_L} \\ + \lambda \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_v} (r_e(f^h), r_e(g))_{Q_L} - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \theta_K \sigma(\Delta_v f^h, g_x + v \cdot \nabla_\perp g)_K. \quad (9-4)$$

در اینجا $[f^h] = f_+^h - f_-^h$ بطوریکه f_\pm^h از رابطه (۲-۳) تعریف می‌شود. در اینجا $\delta_K > 0$ یک ثابت مثبت بر روی المان K ، $0 \leq \theta_K \leq \delta_K$ و $\lambda > 0$ یک ثابت داده شده است. نرمهای متناظر با فرمهای دو خطی A_δ و D_θ بصورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\| \|g\| \|_{A_\delta}^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \delta_K \|g_x + v \cdot \nabla_\perp g\|_K^2 + |g|_M^2 + |g|_0^2 + \int_{I \times \partial\Omega_+} g^2 |v \cdot \mathbf{n}_{x_\perp}| \right. \\ \left. + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [g]^2 |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| \right],$$

و

$$\| \|g\| \|_{D_\theta}^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sigma \|\nabla_v g\|_{Q_L}^2 + 2\sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \|r_e(g)\|_{Q_L}^2 \right].$$

در نهایت نرم عمومی زیر را تعریف می‌کنیم،

$$\| \|g\| \|_{\delta, \theta}^2 = \| \|g\| \|_{A_\delta}^2 + \| \|g\| \|_{D_\theta}^2. \quad (10-4)$$

باتوجه به اینکه دیورژانس $\tilde{\beta} = (1, v, 0)$ صفر است، در نتیجه $(\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n})$ در مرز بین المانها در شبکه \mathcal{C}_h پیوسته است و در نتیجه ∂K_\pm خوش تعریف است. در صورتیکه $\delta_K := h$ و $\theta_K := h$ برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ ، آنگاه می‌توان مسأله تغییراتی (۴-۶) بصورت زیر نوشت،

$$B_*(f^h, g) = \langle f_+, g_+ \rangle_0, \quad \forall g \in V_h, \quad (11-4)$$

بطوریکه

$$B_*(f^h, g) = A(f^h, g) + D(f^h, g). \quad (12-4)$$

در ادامه هنگامی که $\delta_K := h$ و $\theta_K := h$ از اندیس δ از A_δ و از اندیس θ از D_θ برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ صرفنظر می‌شود. لم زیر تراکم‌پذیری مجموع عملگرهای A_δ و D_θ را بدست می‌دهد.

لم ۴-۱-۱ لم تراکم‌پذیری تعمیم یافته فرض کنید که ثابت δ_K در رابطه (۲-۳) برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ صدق کند و $\lambda > \max(2, 2\kappa)$. آنگاه ثابت $1/2 < \alpha < 1$ وجود دارد بطوریکه

$$A_\delta(g, g) + D_\theta(g, g) \geq \alpha (\| \|g\| \|_{A_\delta}^2 + \| \|g\| \|_{D_\theta}^2), \quad \forall g \in V_h.$$

برهان. باتوجه به تعریف A_δ در رابطه (۸-۴) داریم،

$$A_\delta(g, g) = (g_x + v \cdot \nabla_\perp g, g)_{Q_L} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \delta_K \|g_x + v \cdot \nabla_\perp g\|_K^2 + |g|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [g]g_+ |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}|. \quad (13-4)$$

به علاوه با توجه به فرمول گرین رابطه زیر برقرار است،

$$(g_x + v \cdot \nabla_\perp g, g)_{Q_L} = \frac{1}{\tilde{\nu}} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} g^\vee \tilde{\beta} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\tilde{\nu}} \left[- \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} g_+^\vee |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_+(\tilde{\beta})'} g_-^\vee |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| \right]. \quad (14-4)$$

در نتیجه،

$$(g_x + v \cdot \nabla_\perp g, g)_{Q_L} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [g]g_+ |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| + |g|_0^2 = \frac{1}{\tilde{\nu}} \left[\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [g]^\vee |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| + \int_{I \times \partial \Omega_+} g^\vee |v \cdot \mathbf{n}_{x_\perp}| + |g|_0^2 + |g|_M^2 \right]. \quad (15-4)$$

بطور مشابه با توجه به تعریف D_θ و با استفاده از رابطه (۷-۴) داریم،

$$D_\theta(g, g) = \sigma \|\nabla_v g\|_{Q_L}^2 + \nu \sigma (\nabla_v g, R(g))_{Q_L} + \lambda \sigma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_v \cap \partial \tau_v} \|r_e(g)\|_K^2 - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \theta_K \sigma (\Delta_v g, g_x + v \cdot \nabla_\perp g)_K. \quad (16-4)$$

در نهایت با توجه به رابطه (۴-۴) برای برخی $\frac{1}{\tilde{\nu}} < \varepsilon < \circ$ نامساوی زیر را دست می‌آوریم،

$$\nu \sigma (\nabla_v g, R(g))_{Q_L} \leq \sigma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\varepsilon \|\nabla_v g\|_K^2 + \frac{\kappa}{\varepsilon} \sum_{e \in \mathcal{E}_v \cap \partial \tau_v} \|r_e(g)\|_K^2 \right]. \quad (17-4)$$

بنابراین،

$$\nu \sigma (\nabla_v g, R(g))_{Q_L} + \lambda \sigma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_h \cap \partial \tau_v} \|r_e(g)\|_K^2 \geq \sigma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[-\varepsilon \|\nabla_v g\|_K^2 + \left(\lambda - \frac{\kappa}{\varepsilon} \right) \sum_{e \in \mathcal{E}_v \cap \partial \tau_v} \|r_e(g)\|_K^2 \right]. \quad (18-4)$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی معکوس و اینکه $\theta_K \leq \delta_K$ و مفروضات بر روی پارامترهای σ و δ_K داریم،

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sigma \theta_K (\Delta_v g, g_x + v \cdot \nabla_\perp g)_{Q_L} \leq \frac{1}{\tilde{\nu}} \left(\sigma \|\nabla_v g\|_{Q_L}^2 + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \delta_K \|g_x + v \cdot \nabla_\perp g\|_K^2 \right).$$

با انتخاب $\alpha = \min[\frac{1}{\lambda} - \varepsilon, \lambda - \frac{\kappa}{\varepsilon}]$ که برای $\frac{\kappa}{\lambda} < \varepsilon < \frac{1}{\lambda}$ یک کمیت مثبت است نتیجه مطلوب به دست می‌آید.



نتیجه ۲-۱-۴ فرم دوخطی B_* در رابطه (۱۲-۴) در رابطه تحذب زیر صدق می‌کند،

$$B_*(g, g) \geq \alpha \|g\|_*^2, \quad \forall g \in V_h, \quad (19-4)$$

که در آن $\|g\|_*^2 =: \|g\|_A^2 + \|g\|_D^2$ است.

فرض کنید $f^h \in W^h$ جواب معادله تغییراتی (۶-۴) و f جواب معادله فرمی (۶-۲) است. همچنین فرض کنید $\tilde{f}^h \in V_h$ یک درونیاب از f است. آنگاه داریم،

$$e := f - f^h = (f - \tilde{f}^h) - (f^h - \tilde{f}^h) \equiv \eta - \xi. \quad (20-4)$$

لم ۳-۱-۴ ثابت C مستقل از اندازه شبکه h وجود دارد که برای هر δ_K که در رابطه (۱۲-۳) صدق کند تخمین‌های زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} A_\delta(\eta, \xi) &\leq \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{A_\delta}^2 + C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\delta_K^{-1} \|\eta\|_K + \delta_K \|\nabla \eta\|_K) \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (|\eta|_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} + |\eta|_{\Gamma_+} + |\eta|_{\circ} + |\eta|_M), \quad (21-4) \\ D_\theta(\eta, \xi) &\leq \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{A_\delta}^2 + \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{D_\theta}^2 + C \sigma \|\nabla_v \eta\|_{Q_L}^2. \end{aligned}$$

برهان. در این لم باید کران‌های خطا برای جملات مربوط به جهش و مرز را به دست بیاوریم. با توجه به تعریف A_δ داریم،

$$\begin{aligned} A_\delta(\eta, \xi) &= \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\eta_x + v \cdot \nabla_\perp \eta, \xi + \delta_K (\xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi))_K \\ &\quad + \langle \eta_+, \xi_+ \rangle_{\circ} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [\eta] \xi_+ |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}|. \quad (22-4) \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء تساوی زیر را به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} &(\eta_x + v \cdot \nabla_\perp \eta, \xi)_{Q_L} + \langle \eta_+, \xi_+ \rangle_{\circ} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} [\eta] \xi_+ |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| \\ &= -(\eta, \xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi)_{Q_L} - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K_-(\tilde{\beta})'} \eta_- [\xi] |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}| \quad (23-4) \\ &\quad + \langle \eta_-, \xi_- \rangle_M + \int_{I \times \partial \Omega_+} \eta_- \xi_- |\tilde{\beta} \cdot \mathbf{n}|. \end{aligned}$$

با جایگذاری (۲۳-۴) در (۲۲-۴) و استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم،

$$A_\delta(\eta, \xi) \leq \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{A_\delta}^2 + C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\delta_K^{-1} \|\eta\|_K^2 + \delta_K \|\nabla \eta\|_K^2) \\ + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (|\eta|_{\partial K^-(\tilde{\beta})}^2 + |\eta|_{\Gamma_+}^2 + |\eta|_0^2 + |\eta|_M^2). \quad (24-4)$$

به طور مشابه برای فرم دو خطی D_θ داریم،

$$D_\theta(\eta, \xi) = \sigma(\nabla_v \eta, \nabla_v \xi)_{Q_L} + \sigma(\nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} + \sigma(R(\eta), \nabla_v \xi)_{Q_L} \\ + \lambda \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_v} (r_e(\eta), r_e(\xi))_{Q_L} - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \theta_K \sigma(\Delta_v \eta, \xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi)_K := \sum_{i=1}^5 T_i.$$

در این رابطه T_1 و T_5 را می توان با روش هایی که در قضایای قبلی استفاده شد تقریب زد و یک کران برای جملات T_2, T_3, T_4 به دست می آوریم. از آنجا که تابع η پیوسته است، با توجه به تعریف عملگرهای R و r_e داریم $T_3 = T_4 = 0$. برای تقریب T_2 با توجه به روابط (۴-۴) و (۵-۴) نامساوی زیر را بدست می آوریم،

$$|T_2| \leq \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sigma \|\nabla_v \eta\|_K \|R(\xi)\|_K \leq \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(C \sigma \|\nabla_v \eta\|_K^2 + \frac{\sigma}{C_1} \|R(\xi)\|_K^2 \right). \quad (25-4)$$

در نتیجه با توجه به نامساوی کشی-شوارتز و شرایط مفروض بر پارامتر σ نامساوی زیر برقرار است،

$$D_\theta(\eta, \xi) \leq \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{A_\delta}^2 + \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{D_\theta}^2 + C \sigma \|\nabla_v \eta\|_{Q_L}^2, \quad (26-4)$$

و در نتیجه اثبات کامل می شود. ■

در ادامه از لم زیر استفاده می شود که برای اثبات آن به [۷] ارجاع می دهیم.

لم ۴-۱-۴ اگر $u \in L^2(I \times \Omega_{x_\perp}, H^1(\Omega_v))$ و $\Delta_v u \in L^2(Q_L)$ و $w \in V_h$ آنگاه

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{\partial \tau_v} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_v} = \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \int_e [[w]] \mathbf{n}_v \cdot (\nabla_v u)^\circ. \quad (27-4)$$

قضیه ۵-۱-۴ قضیه همگرایی فرض کنید $f^h \in V^h$ و f به ترتیب جوابهای (۴-۱۱) و (۲-۶) باشند آنگاه ثابت C مستقل از اندازه شبکه h وجود دارد به طوری که تخمین خطای زیر برقرار است،

$$\|f - f^h\|_* \leq Ch^{k+1/\nu} \|f\|_{k+1, Q_L}. \quad (28-4)$$

برهان. با استفاده از لم ۴-۱-۱ و ۴-۲۰ داریم،

$$\alpha \|\xi\|_*^2 \leq B_*(\xi, \xi) = B_*(\eta - e, \xi) = B_*(\eta, \xi) - B_*(e, \xi). \quad (29-4)$$

فرم دو خطی $B_*(e, \xi)$ را بصورت زیر تفکیک می‌کنیم،

$$B_*(e, \xi) = A(e, \xi) + D(e, \xi). \quad (30-4)$$

با توجه به اینکه،

$$D(e, \xi) = D(f, \xi) - D(f^h, \xi). \quad (31-4)$$

بنابراین با توجه به تعریف D و اینکه $R(f) = r_e(f) = 0$ داریم،

$$\begin{aligned} D(f, \xi) &= \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{\tau_v} \sigma \nabla_v f \nabla_v \xi - \sigma \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \int_e [[\xi]] \mathbf{n}_v \cdot (\nabla_v f)^\circ \\ &= \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K -\sigma (\Delta_v f) \xi + \sigma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{\partial \tau_v} \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_v} \\ &\quad - \sigma \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \int_e [[\xi]] \mathbf{n}_v \cdot (\nabla_v f)^\circ = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K -\sigma (\Delta_v f) \xi, \end{aligned}$$

که در بدست آوردن آخرین مساوی در رابطه بالا از لم ۴-۱-۴ استفاده شد. در نتیجه مسأله تغییراتی سازگار (۴-۱۱) است و داریم $B_*(e, \xi) = 0$. به علاوه از رابطه (۴-۲۹) به نامساوی زیر می‌رسیم،

$$\alpha \|\xi\|_*^2 \leq B_*(\eta, \xi) = A(\eta, \xi) + D(\eta, \xi). \quad (32-4)$$

در نهایت با استفاده از لم ۴-۱-۳، نامساوی اثر (۳-۱۶) و تخمین خطا برای عملگرهای درونیاب در رابطه (۲-۱۵) داریم،

$$A(\eta, \xi) \leq \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_A^2 + Ch^{\nu_{k+1}} \|f\|_{k+1, Q_L}^2, \quad (33-4)$$

و

$$D(\eta, \xi) \leq \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_*^2 + Ch^{\nu_{k+1}} \|f\|_{k+1, Q_L}^2. \quad (34-4)$$

با جایگذاری (۴-۳۳) و (۴-۳۴) در رابطه (۴-۳۲) نتیجه زیر را به دست می‌آوریم،

$$\|\xi\|_*^2 \leq Ch^{\nu_{k+1}} \|f\|_{k+1, Q_L}^2. \quad (35-4)$$

از طرفی با استفاده از خطای درونیابی به طور مشابه داریم،

$$\|\eta\|_*^2 \leq Ch^{\nu_{k+1}} \|f\|_{k+1, Q_L}^2. \quad (36-4)$$

با بکارگیری نامساوی های (۴-۳۵) و (۴-۳۶) و همچنین نامساوی مثلثی نتیجه مطلوب (۴-۲۸) به دست می‌آید. ■

تبصره ۴-۱-۶ با انتخاب $0 \leq \theta_K < \delta_K$ در رابطه (۴-۹)، به خصوص $\theta_K = 0$ ، یعنی با در نظر گرفتن یک جمله پخش در متغیر x برای جمله انتقال، رابطه تعامد گالرکین دیگر برقرار نخواهد بود و این باعث می‌شود که روش عددی (۴-۶) به یک فرم تغییراتی ناسازگار تبدیل شود. این خطای سازگاری باعث می‌شود که یک جمله اضافی از مرتبه $\mathcal{O}(h^3)$ در تحلیل همگرایی روش بوجود بیاید زیرا،

$$B_{\delta,\theta}(f - f^h, \xi) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\delta_K - \theta_K) \sigma(\Delta_v f, \xi_x + v \cdot \nabla_{\perp} \xi)_K = T_{\xi}, \quad (37-4)$$

و کران خطای سازگاری به صورت زیر بدست می‌آید،

$$|T_{\xi}| \leq C \delta_K \sigma^2 \|\Delta_v f\|_{Q_L}^2 + \frac{1}{\lambda} \|\xi\|_{\delta,\theta}^2. \quad (38-4)$$

در نتیجه همگرایی این روش نمی‌تواند از همگرایی از مرتبه $\mathcal{O}(h^3)$ بهتر شود و این مرتبه همگرایی از درجه چند جمله‌ای مستقل است. در نتیجه جمله پایدار ساز در این حالت باعث می‌شود که مرتبه همگرایی بهینه حاصل نشود.

۴-۱-۲ روش DG از نوع hp

در این بخش با به کارگیری روش استفاده شده در [۴۲]، یک کران خطای بهینه در پارامترهای h و p برای معادله فرمی در فرم تغییراتی DG به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که خانواده افرازاها $\{C_h\}$ با توجه به رابطه (۲-۱۰) دارای شکل منظم است و هر المان $K \in C_h$ هم ارز آفین با یک مکعب در فضای \mathbb{R}^5 است. در این حالت شبکه می‌تواند یک شبکه غیر منظم از نوع اول باشد به این معنی که المان‌ها ممکن است دارای گره‌های معلق باشند. ابتدا فرم دوخطی زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\tilde{D}_{\delta} = D_{\delta}(f, g) + D_s(f, g), \quad (39-4)$$

که در آن D_{δ} از رابطه (۴-۹) است و عملگر پایدار ساز D_s بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$D_s(f, g) = \sigma \sum_{I_m \times \tau_{x_{\perp}}} \int_{I_m \times \tau_{x_{\perp}}} \int_{\mathcal{E}_v} \gamma(h_e)[[f]][[g]]. \quad (40-4)$$

$\gamma(h_e)$ تابع مقیاس ناپیوستگی است که در ادامه با روش عددی مشخص می‌شود. فرم دو خطی \tilde{B}_{δ} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{B}_{\delta} = A_{\delta} + \tilde{D}_{\delta}. \quad (41-4)$$

آنگاه فرم تغییراتی DG از نوع hp برای معادله (۲-۶) به صورت زیر است،

مطلوب است $f^h \in V_h^p$ بطوریکه،

$$\tilde{B}_\delta(f^h, g) = \langle f^h, g \rangle. \quad \forall g \in V_h^p. \quad (۴۲-۴)$$

از نماد V_h^p برای فضای اجزای متناهی استفاده میشود که نشان میدهد که چندجمله‌ایها در این فضا از درجه p بر روی شبکه با اندازه h هستند. باید توجه داشت هنگامی که $\gamma(h_e)$ برابر با صفر است و برای پارامتر SD ، $\delta_K \approx h$ برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ رابطه (۴۲-۴) معادل با فرم تغییراتی (۱۱-۴) است. در ادامه فرض می‌کنیم که جواب f از معادله (۶-۲) بر روی Ω_v به اندازه کافی هموار است بطوریکه $f \in L^2(I, \Omega_{x_\perp}, H^1(\Omega_v)) \cap L^2(I, \Omega_{x_\perp}, H^2(\Omega_v))$. بنابراین f بر روی مرزهای داخلی Ω_v پیوسته است و در نتیجه $D_s(f, g) = 0$ برای همه $g \in V_h^p$. بدین ترتیب رابطه تعامد گالرکین، $\tilde{B}_\delta(f - f^h, g) = 0$ برای همه $g \in V_h^p$ برقرار است. پایداری روش (۴۲-۴) در نرم زیر به دست می‌آید،

$$\| \|g\| \|_{\gamma, \delta}^2 = \| \|g\| \|_{A_\delta}^2 + \| \|g\| \|_{D_\delta}^2 + \sigma \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{\mathcal{E}_v} \gamma(h_e) [[g]]^2. \quad (۴۳-۴)$$

لم ۷-۱-۴ ثابت C وجود دارد به طوریکه،

$$\tilde{B}_\delta(g, g) \geq C \| \|g\| \|_{\gamma, \delta}^2, \quad \forall g \in V_h^p. \quad (۴۴-۴)$$

برهان. با استفاده از روابط (۴۱-۴) و (۳۹-۴) داریم،

$$\tilde{B}_\delta(g, g) = A_\delta(g, g) + D_\delta(g, g) + D_s(g, g), \quad (۴۵-۴)$$

که در آن

$$D_s(g, g) = \sigma \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{\mathcal{E}_v} \gamma(h_e) [[g]]^2. \quad (۴۶-۴)$$

با جایگذاری (۴۶-۴) در (۴۵-۴) و استفاده از لم ۱-۱-۴ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. ■

قبل از اینکه تخمین‌های خطای روش DG از نوع hp را به دست بیاوریم نتایج زیر برای تخمین خطای درونیابی در فضای v_H^p را بیان می‌کنیم [۳۰]. فرض کنید فضای همه چندجمله‌ای‌ها با درجه حداکثر k در المان K است.

لم ۸-۱-۴ فرض کنید $K \in \mathcal{C}_h$ و همچنین $g \in H^s(K)$ برای برخی عدد صحیح $s \geq 1$. آنگاه برای عدد صحیح $\mu = \min(p+1, s)$ که در آن $p \geq 0$ داریم،

$$\|g - Pg\|_{L^2(\partial K)} \leq C \left(\frac{h_K}{p+1} \right)^{\mu - \frac{1}{p}} \|g\|_{\mu, K}, \quad (۴۷-۴)$$

بطوریکه C یک ثابت مستقل از h_K و p است و $P : L^2(K) \rightarrow Q_p(K)$ تصویر L^2 از درجه p بر روی المان K است.

گیریم P_v یک عملگر درونیاب است که تحدید آن به هر المان $\tau_v \in T_h^v$ تصویر L^2 در المان τ_v است. خطای موضعی $f - P_v f$ را می توان از لم ۴-۱-۸ به دست آورد. در حقیقت برای هر $K \in \mathcal{C}_h$ داریم،

$$\|f - P_v f\|_{L^2(I_m, \tau_{x_\perp}, \partial\tau_v)} \leq C \left(\frac{h_K}{p+1} \right)^{\mu-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^2(I_m, \tau_{x_\perp}, H^\mu(\tau_v))}. \quad (48-4)$$

بطوریکه $K := I_m \times \tau_{x_\perp} \times \tau_v$. همچنین با توجه به لم ۳-۱-۵ در صورتیکه،

$$f \in L^2(I, \Omega_{x_\perp}, H^s(\Omega_v)) \cap L^2(I, \Omega_{x_\perp}, H^2(\Omega_v)), \quad (49-4)$$

و با فرض اینکه $s \geq 2$ و

$$f|_K \in H^s(K), \quad \forall K \in \mathcal{C}_h, \quad (50-4)$$

آنگاه تابع درونیاب $\Pi_p f \in L^2(I, \Omega_{x_\perp}, H^s(\Omega_v))$ وجود دارد که بر روی Ω_v پیوسته است. همچنین با توجه به تخمین خطای موضعی (۳-۱۴) با $r = 1$ داریم،

$$\|f - \Pi_p f\|_{1,K} \leq C \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{s-1}} \|f\|_{s,K}, \quad \mu = \min(p+1, s). \quad (51-4)$$

قضیه ۴-۱-۹ برای هر $h_e \in \mathcal{E}_v$ ، تابع مقیاس ناپیوستگی γ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\gamma(h_e) = \frac{p^2}{h_e}. \quad (52-4)$$

فرض کنید که δ_K در رابطه (۳-۱۲) و تابع f در روابط همواری (۴-۵۰) - (۴-۴۹) صدق کنند. آنگاه ثابت C مستقل از h و p وجود دارد بطوریکه برای $\mu = \min(p+1, s)$ ،

$$\|f - f^h\|_{\gamma, \delta}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{\mu-1}} \|f\|_{\mu, K}^2 \quad (53-4)$$

برهان. اثبات مشابه قضیه ۴-۲-۵ است، با این تفاوت که در این حالت جمله خطا را به صورت زیر تفکیک می کنیم،

$$e := f - f^h = (f - \tilde{f}^h) + (\tilde{f}^h - f^h) \equiv \eta + \xi, \quad (54-4)$$

بطوریکه $\tilde{f}^h \in V_h^p$ یک تابع درونیاب hp از f است که در رابطه (۴-۵۱) صدق می کند، یعنی $\tilde{f}^h := \Pi_p f$. با استفاده از لم ۴-۱-۷ داریم،

$$C_I \|\xi\|_{\gamma, \delta} \leq \tilde{B}_\delta(\xi, \xi) = \tilde{B}_\delta(e - \eta, \xi) = \tilde{B}_\delta(-\eta, \xi), \quad (55-4)$$

که در آن از رابطهٔ تعامد گالرکین استفاده شده است. در حقیقت تعامد گالرکین یعنی $\tilde{B}_\delta(e, \xi) = 0$ از رابطهٔ (۴-۴۲) با $g = \xi$ و تعریف مساله تغییراتی با توجه به درجهٔ همواری مفروض بر روی f نتیجه میشود. در نتیجه

$$C_I \| \xi \|_{\gamma, \delta} \leq | \tilde{B}_\delta(\eta, \xi) | \leq | A_\delta(\eta, \xi) | + | \tilde{D}_\delta(\eta, \xi) |. \quad (۵۶-۴)$$

با توجه به اینکه $\eta \in L^2(I, \Omega_{x_\perp}, H^1(\Omega_v))$ داریم،

$$[[\eta]] = 0, \quad \mathcal{E}_v \quad \text{بر روی}, \quad (۵۷-۴)$$

همچنین،

$$R(\eta) = 0, \quad \Omega \quad \text{بر روی} \quad \text{و} \quad r_e(\eta) = 0, \quad \Omega \quad \forall e \in \mathcal{E}_v. \quad (۵۸-۴)$$

بنابراین،

$$| \tilde{D}_\delta(\eta, \xi) | \leq I + II + III, \quad (۵۹-۴)$$

بطوریکه،

$$\begin{aligned} I &= \sigma | (\nabla_v \eta, \nabla_v \xi)_{Q_L} |, & II &= \sigma | (\nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} |, \\ III &= \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sigma \delta_K | (\Delta_v \eta, \xi_x + v \cdot \nabla_\perp \xi)_K |. \end{aligned} \quad (۶۰-۴)$$

I توسط لم ۴-۱-۳ تقریب زده می شود. تصویر متعامد به $L^2(Q_L)$ نتیجه می دهد،

$$\begin{aligned} \sigma (\nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} &= \sigma (\nabla_v \eta - P_v \nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} + \sigma (P_v \nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} \\ &= \sigma (\nabla_v \eta - P_v \nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} + \sigma (\nabla_v \eta, R(\xi))_{Q_L} = T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (۶۱-۴)$$

با توجه به تعریف عملگر R و اینکه افراز دارای شکل منظم است داریم،

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \int_e [[\xi]] \mathbf{n}_v \cdot (\nabla_v \eta - P_v \nabla_v \eta)^\circ \\ &\leq \sigma \| \sqrt{\gamma} [[\xi]] \|_{\mathcal{E}_v} \| \gamma^{-\frac{1}{2}} (\nabla_v \eta - P_v \nabla_v \eta)^\circ \|_{\mathcal{E}_v} \\ &\leq C \sigma \| \sqrt{\gamma} [[\xi]] \|_{\mathcal{E}_v} \left(\sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{\tau_v \in T_h^v} p^{-2} h_{\tau_K} \| \nabla_v \eta - P_v \nabla_v \eta \|_{L^2(I_m, \tau_{x_\perp}, \partial \tau_v)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

در رابطهٔ فوق از نماد،

$$\| g \|_{\mathcal{E}_v} = \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \int_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \int_e g dv.$$

استفاده شده است. به علاوه از آنجا که $\nabla_v(\Pi_p f) \in V_h^p \times V_h^p$ و تصویر L_2 حافظ چندجمله‌ای است،

$$\nabla_v \eta - P_v \nabla_v \eta = \nabla_v f - \nabla_v \Pi_p f - P_v \nabla_v f + P_v \nabla_v \Pi_p f = \nabla_v f - P_v \nabla_v f.$$

در نتیجه،

$$T_1 \leq C\sigma \|\sqrt{\gamma}[\xi]\|_{\mathcal{E}_v} \left(\sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{\tau_v \in T_h^v} p^{-\nu} h_K \|\nabla_v f - P_v \nabla_v f\|_{L^{\nu}(I_m, \tau_{x_\perp}, \partial\tau_v)} \right)^{1/2}.$$

به علاوه با استفاده از (۴-۴) و (۵-۴)، جمله T_1 به صورت زیر تقریب زده می‌شود،

$$T_1 \leq \sqrt{\sigma} \|(\nabla_v \eta)\|_{Q_L} \left(\sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_v} \|r_e(\xi)\|_{Q_L}^{\nu} \right)^{1/2}.$$

در نهایت در زیر جمله III تخمین زده می‌شود. با توجه به نامساوی معکوس و مفروضات (۳-۱۲) داریم،

$$\sigma \delta_K |(\Delta_v \eta, \xi_x + v \cdot \nabla_{\perp} \xi)_K| \leq \sqrt{\sigma \delta_K} \|\nabla_v \eta\|_K \|\xi_x + v \cdot \nabla_{\perp} \xi\|_K. \quad (۶۲-۴)$$

با جایگذاری تقریبهای بالا برای T_1 و T_2 در (۴-۶۱) و سپس استفاده از رابطه (۴-۶۲) و جایگذاری (۴-۶۰) در (۴-۵۹) با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز به دست می‌آوریم،

$$|\tilde{D}_\delta(\eta, \xi)| \leq C_1 \|\xi\|_{\gamma, \delta}^{\nu} + C\sigma \left(\|(\nabla_v \eta)\|_{Q_L}^{\nu} + \sum_{I_m \times \tau_{x_\perp}} \sum_{\tau_v \in T_h^v} p^{-\nu} h_K \|\nabla_v f - P_v \nabla_v f\|_{L^{\nu}(I_m, \tau_{x_\perp}, \partial\tau_v)}^{\nu} \right), \quad (۶۳-۴)$$

بطوریکه $C_1 \leq \frac{1}{4} C_I$. به همین ترتیب برای جمله $|A_\delta(\eta, \xi)|$ با استفاده از لم ۴-۱-۳ و با قرار دادن $C_2 \leq \frac{1}{4} C_I$ داریم،

$$|A_\delta(\eta, \xi)| \leq C_2 \|\xi\|_{\gamma, \delta}^{\nu} + C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\delta_K^{-1} \|\eta\|_K^{\nu} + \delta_K \|\eta_x + v \cdot \nabla_{\perp} \eta\|_K^{\nu} + \|\eta\|_{\partial K}^{\nu}). \quad (۶۴-۴)$$

با جایگذاری (۴-۶۳) و (۴-۶۴) در رابطه (۴-۵۳) و به کارگیری تخمین‌های (۴-۵۱) و (۴-۴۸) و نامساوی اثر به دست می‌آوریم،

$$\|\xi\|_{\gamma, \delta}^{\nu} \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\nu\mu-1}}{p^{\nu s-\nu}} \left(\delta_K h_K^{-1} + \sigma h_K^{-1} + \frac{h_K}{p^{\nu} \delta_K} \right) \|f\|_{s,K}^{\nu} + \frac{h_K^{\nu\mu-1}}{p^{\nu\mu-1}} \|f\|_{\mu,K}^{\nu}. \quad (۶۵-۴)$$

به طور مشابه با توجه به روابط (۴-۵۷) و (۴-۵۸) برای خطای درونیابی نامساوی زیر را بدست می‌آوریم،

$$\|\eta\|_{\gamma, \delta}^{\nu} \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (h_K^{-1} \|\eta\|_K^{\nu} + \sigma \|\nabla_v \eta\|_K^{\nu} + \delta_K \|\eta_x + v \cdot \nabla_{\perp} \eta\|_K^{\nu}). \quad (۶۶-۴)$$

بنابراین در نهایت با استفاده از رابطه درونیایی (۵۱-۴) و نامساوی اثر (۱۶-۳) داریم،

$$\|\eta\|_{\gamma,\delta}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \frac{h_K^{\mu-1}}{p^{\nu s - \nu}} \left(\delta_K h_K^{-1} + \frac{1}{p^\nu} + \frac{1}{p} + \sigma h_K^{-1} \right) \|f\|_{s,K}^2. \quad (۶۷-۴)$$

با جایگذاری کران خطا برای $\|\eta\|_{\gamma,\delta}$ و جایگذاری رابطه (۶۵-۴) در رابطه (۵۶-۴) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. ■

تبصره ۱۰-۱-۴

در قضیه ۹-۱-۴ فرض می‌کنیم $2 \leq s \leq p+1$ و با انتخاب $\delta_K = \frac{h_K^\nu}{\sigma C_I p^\nu}$ برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ ، فرض $1 \sim \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{h_K}\right)$ برای همه $K \in \mathcal{C}_h$ ، با توجه به قضیه ۹-۱-۴ روش DG از نوع hp در نرم $\|\cdot\|_{\gamma,\delta}$ با نرخ $\mathcal{O}\left(\frac{h^{\mu-\frac{1}{p}}}{p^{\mu-\frac{1}{p}}}\right)$ همگرا خواهد شد. در نتیجه کران‌های خطا در متغیرهای h و p بهینه هستند. پارامتر δ_K ممکن است به صورت،

$$\delta_K = C_\delta \frac{h_K}{p}, \quad \forall K \in \mathcal{C}_h. \quad (۶۸-۴)$$

انتخاب شود که در آن ثابت C_δ با توجه به محدودیت بر روی δ_K در قضیه ۹-۱-۴ انتخاب می‌شود. در این حالت پارامتر $\delta_K h_K^{-1}$ در (۵۳-۴) برابر با $\frac{1}{p}$ خواهد بود و خطای روش DG از مرتبه $\mathcal{O}\left(\frac{h^{\mu-\frac{1}{p}}}{p^{\mu-\frac{1}{p}}}\right)$ است که بطور همزمان در h و p بهینه است.

فصل ۵

حل معادله خطی شده BGK با روش اجزای متناهی SD و مدل گسسته قائم

۱-۵ مقدمه

در این بخش به حل عددی جریان گاز در تونل با سطح مقطع دلخواه می‌پردازیم. معادله حاکم این جریان معادله دو بعدی خطی شده بهتنگر-گراس-کروک (BGK) است. این معادله ابتدا با مدل گسسته قائم در فضای سرعت گسسته شده و سپس در متغیر مکان با روش اجزای متناهی SD تقریب زده می‌شود. این مسأله فیزیکی دارای کاربردهای متفاوتی در فن‌آوری نانو و الکترومکانیک است. ماکروتوربین‌ها و تجهیزاتی که در فضای خلأ استفاده می‌شوند مثالهایی از وسایل صنعتی هستند که در آنها جریان گاز در تونل با عدد نادسون دلخواه وجود دارد. از آنجایی که حل عددی معادله بولتزمان بر یک ناحیه هندسی دلخواه به یک شبکه شش بعدی (سه بعد در بردار مکان فیزیکی و سه بعد در بردار سرعت) نیاز دارد، استفاده از این روش از لحاظ محاسباتی بسیار گران و پرهزینه است. بنابراین، لازم است بهینه‌سازی کمی و کیفی هم در معادله مورد نظر و هم روش عددی صورت پذیرد. در بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی با توجه به شرایط جریان، می‌توان معادله جنبشی حاکم را خطی‌سازی کرد و تعداد متغیرها در مکان فیزیکی و مختصات سرعت را کاهش داد. بنابراین در چنین حالتی می‌توان یک روش عددی کارا طراحی کرد که مشکلات محاسباتی این نوع جریان کاهش پیدا کند. به همین منظور، از مدل گسسته قائم به عنوان یکی از روش‌های اساسی در حل عددی معادله بولتزمان و معادلات جنبشی مشابه در فضای همگن استفاده می‌شود [۱۵، ۲۰]. این روش برای حل مسائل مخلوط [۲۳] و حل مدل‌های گاز چند اتمی با واکنش‌های شیمیایی [۱۴] استفاده شده است. مدل گسسته قائم بر اساس جایگزینی عملگر برخورد با یک عملگر گسسته مجموع در نقاط انتگرال است، و لذا فقط نیاز است که معادله حاکم در نقاط انتگرالی برقرار باشد. سپس، مدل گسسته شده در فضای سرعت، در فضای مکان فیزیکی با یک روش سازگار مانند روش تفاضلات متناهی گسسته می‌شود. در این حالت این روش ممکن است از لحاظ محاسباتی برای دامنه‌هایی با مرز منحنی مشکل باشد، زیرا روش‌های متعارف در گسسته‌سازی فضای مکان بر این اساس

است که شبکه مستطیلی و بدون انحناء است. این مهمترین مشکل مسائلی است که در آن جریان در دامنه‌هایی است که دارای مرز منحنی است. برای حل این جریان‌ها در دامنه‌های پیچیده به نظر می‌رسد که مناسب باشد که از روش اجزای متناهی که ساختارشان بر اساس شبکه غیرمنظم و غیرمستطیلی استفاده شود. در این زمینه روش اجزای متناهی SD برای مسائل هذلولوی، پایدار و دارای مرتبه دقت بالاست. در روش اجزای متناهی SD که در این فصل استفاده می‌شود یک ضریب از جمله انتقال (از مرتبه اندازه شبکه) در معادله به توابع آزمون اضافه می‌شود. این باعث می‌شود که بتوان یک کران از جمله باقیمانده جواب عددی اجزای متناهی بدست آورد. مشکل دیگر در زمینه روشهای عددی متداول این است که در جریان‌های تبدیل حالت و یا جریان‌های مشابه جریان پیوسته، شرایط پایداری روش تفاضلات متناهی باعث می‌شود که گام زمانی بسیار کوچک باشد که از مرتبه اندازه شبکه در فضای مکان است. در نتیجه هزینه محاسباتی برای جریان‌های ایستا و نزدیک به پیوسته ممکن است بسیار بالا باشد و نتایج ممکن است برای جریان‌های با پارامتر ترقیق فقط تا عدد 5^0 قابل استفاده باشد. در اینجا بر اساس روش اجزای متناهی، آهنگ جریان ماده برای جریان پوازوی در تونل برای یک دامنه وسیع از اعداد نادسون که از جریان‌های گازی تا جریان‌های شبه پیوسته است، محاسبه می‌شود. در مجموع هدف از حل این جریان با مدل گسسته قائم و روش اجزای متناهی SD به ترتیب زیر است: ۱ - طراحی و تحلیل یک روش عددی کلی برای حل جریان گاز که از شکل هندسی سطح مقطع تونل مستقل است. ۲ - روش عددی طراحی شده باید پایدار بوده و دارای مرتبه دقت بالا باشد بطوریکه برای همه جریان‌ها شامل جریان گاز، جریان‌های تبدیلی و شبه پیوسته کاربرد داشته باشد.

۲-۵ معادلات حاکم

بر اساس برخی شرایط فیزیکی، معادله حاکم بر توزیع مولکول‌های گاز، معادله بولتزمان است. با توجه به تعداد زیاد متغیرهای این معادله هایپربولیک، حل این معادله مشکل است. یک روش برای ساده‌سازی این معادله جایگزین کردن عملگر برخورد در این معادله بر اساس یک مدل انرژی جنبشی مانند BGK است که علاوه بر اینکه محاسبات عددی را ساده می‌کند، بسیاری از خاصیت‌های معادله اصلی را دارد. یک مدل برای جریان ایستا بصورت زیر است، مطلوب است \tilde{f} بطوریکه

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{f}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = J(\tilde{f}), \quad (1-5)$$

که در آن $\mathbf{x} = (x, y, z)$ متغیر مکان فیزیکی و $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ بردار سرعت است. به‌علاوه

$$J(\tilde{f}) = \nu \left(\tilde{f}^M - \tilde{f} \right), \quad (2-5)$$

که گرادیان نسبت به متغیر \mathbf{x} است. در این رابطه ν فرکانس برخورد و \tilde{f}^M توزیع ماکسولین استاندارد است که دارای چگالی، سرعت و دمایی می‌باشد که تابع توزیع \tilde{f} دارد. غیرخطی بودن عملگر برخورد از

آنجاست که سرعت، دما و چگالی گاز همگی توابعی از تابع توزیع \tilde{f} هستند. مدل BGK دارای تمام ناورداهای برخورد است. فرض کنید توابع $\varphi_i, i = 0, \dots, 4$ ناورداهای برخورد هستند که با $\varphi_0 = 1$ ، $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \mathbf{v}$ و $\varphi_4 = |\mathbf{v}|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2$ تعریف می‌شوند. برای اینکه مدل خطی شده BGK را بدست آوریم فرض می‌کنیم تابع \tilde{f} به صورت زیر تعریف شده باشد،

$$\tilde{f} = f_0(1 + \varepsilon g), \quad (3-5)$$

بطوریکه f_0 توزیع ماکسولین مطلق است که با انتخاب بعدهای مناسب برای جرم و سرعت و همچنین با استفاده از تبدیل گالیله با رابطه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$f_0 = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-|\mathbf{v}|^2}, \quad (4-5)$$

در رابطه (3-5)، g یک تابع خاص است که در ادامه تعریف می‌شود. با جایگذاری رابطه (3-5) در (1-5) داریم،

$$\mathbf{v} \cdot \nabla g = \nu_0 \left[\sum_{i=0}^4 \varphi'_i(\varphi'_i, g)_{f_0} - g \right], \quad (5-5)$$

که در این رابطه ضرب داخلی وزن دار بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$(f, g)_{f_0} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{v})g(\mathbf{v})f_0 d\mathbf{v}. \quad (6-5)$$

در این رابطه ν_0 فرکانس برخورد در حالت تعادل است که یک کمیت ثابت می‌باشد و $\varphi'_i, i = 0, \dots, 4$ ناورداهای برخورد هستند که با $\varphi'_0 = 1$ ، $(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3) = \sqrt{2}\mathbf{v}$ و $\varphi'_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\varphi'_1|^2 + |\varphi'_2|^2 + |\varphi'_3|^2 - 3) = \sqrt{\frac{2}{3}}(|\mathbf{v}|^2 - \frac{3}{2})$ تعریف می‌شوند و نسبت به ضرب داخلی نرمال شده‌اند. عملگر برخورد که با رابطه،

$$\mathcal{C}(g) = \left[\sum_{i=0}^4 \varphi'_i(\varphi'_i, g)_{f_0} - g \right], \quad (7-5)$$

تعریف می‌شود، نسبت به ضرب داخلی (6-5) متقارن است و یک عملگر نیمه-منفی معین است یعنی $(\mathcal{C}(g), g)_{f_0} \leq 0$ صدق می‌کند. به علاوه داریم،

$$\text{Ker } \mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=0}^4 c_i \varphi'_i : c_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad (8-5)$$

که در آن $\text{Ker } \mathcal{C}$ فضای پوچ عملگر \mathcal{C} است. جریان پوازوی یعنی جریان گاز در یک تونل طولانی با عرض متناهی که توسط اختلاف فشار، دما یا چگالی ایجاد شده است، مانند جریان کوئت را می‌توان با معادله خطی شده BGK مدل کرد. برای ساده‌سازی، محاسبات روش عددی برای معادله پوازوی شرح داده

می‌شود. بر اساس خواص جریان، می‌توان متغیر z را از تابع g تفکیک کرده و آن را بصورت زیر بازنویسی کرد،

$$g(x, y, z, \mathbf{v}) = z + \psi(x, y, \mathbf{v}). \quad (9-5)$$

با توجه با اینکه جریان هم‌دما است و سرعت‌های عمود بر دیوار صفر هستند، می‌توان معادله زیر را برای ψ بدست آورد،

$$v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = \delta(2v_z u - \psi(x, y, \mathbf{v})) - v_z. \quad (10-5)$$

در اینجا δ پارامتر ترقیق نام دارد که در این حالت معادل با فرکانس برخورد ν است. به‌علاوه،

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{r}{2}}} \int_{\mathbb{R}^r} v_z e^{-|\mathbf{v}|^2} \psi(x, y, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (11-5)$$

همچنین فرض کردیم که،

$$\frac{1}{\pi^{\frac{r}{2}}} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-|\mathbf{v}|^2} g d\mathbf{v} = z. \quad (12-5)$$

این مفروضات برای جریان‌های سیالی که در تونل‌ها توسط اختلاف فشار ایجاد شده‌اند متداول هستند که برای توضیحات بیشتر می‌توان به [۴۱] مراجعه کرد. با ضرب معادله (۱۰-۵) در $\frac{v_z}{\sqrt{\pi}} e^{-v_z^2}$ و انتگرال‌گیری نسبت به متغیر v_z داریم،

$$v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = \delta(\tilde{u} - \phi(x, y, v_x, v_y)) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (13-5)$$

بطوریکه،

$$\phi(x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} v_z e^{-v_z^2} \psi dv_z, \quad (14-5)$$

در اینجا \tilde{u} که متناظر با u در عبارت (۱۰-۵) در فضای دو بعدی سرعت است، سرعت حجمی گاز است که با،

$$\tilde{u}(x, y) \equiv u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v_x^2 - v_y^2} \phi(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y. \quad (15-5)$$

تعریف می‌شود. بنابراین معادله دیفرانسیلی-انتگرالی زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \delta \mathcal{C}(f) + S(\mathbf{v}, \mathbf{x}), \quad (16-5)$$

که در شرایط مرزی شارش داخلی آن بصورت زیر است،

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{v}}^-. \quad (17-5)$$

در این معادله عملگر برخورد با رابطه،

$$\mathcal{C}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) e^{-|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} - f(\mathbf{v}, \mathbf{x}), \quad (18-5)$$

تعریف می‌شود و برای هر $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ،

$$\Gamma_{\mathbf{v}}^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} < 0\}. \quad (19-5)$$

در اینجا $\mathbf{x} = (x, y)$ بردار متغیر مکانی و $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ بردار سرعت، Ω دامنه متغیر مکان فیزیکی و \mathbf{n} بردار نرمال خارجی به $\partial\Omega$ در نقطه $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ است. همان‌گونه که پیشتر گفته شد بردارهای دوبعدی \mathbf{x} و \mathbf{v} در سطح مقطع تونل تعریف می‌شوند. در اینجا $S(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ یک جمله منبع است که برای جریان پوازوی در تونل، یک کمیت ثابت است. در نهایت δ که به آن پارامتر ترقیق می‌گوییم، یک پارامتر بدون بعد است که درجه ترقیق گاز را نشان می‌دهد. شرایط مرزی نشان دهنده ذراتی هستند که از دیوار و به سمت داخل حرکت می‌کنند. به منظور ساده‌سازی در نمادگذاری یک ضرب داخلی وزن دار به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$(f, g)_{\hat{f}} = \int_{\mathbb{R}^2} f g \hat{f} d\mathbf{v}, \quad (20-5)$$

که در آن $\hat{f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi} e^{-|\mathbf{v}|^2}$ تابع وزن است. عملگر برخورد \mathcal{C} نسبت به این ضرب داخلی متقارن است. به علاوه $\text{Ker } \mathcal{C}$ ناتهی است و \mathcal{C} بر متمم $\text{Ker } \mathcal{C}$ معین منفی است. از لحاظ فیزیکی در این نوع جریان، آهنگ شارش که یک کمیت بدون بعد بوده و با رابطه،

$$G = \frac{2}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (21-5)$$

تعریف می‌شود، مهم است. در بخش نتایج عددی این کمیت برای جریانهای با پارامتر ترقیق مختلف محاسبه می‌شود. در این رابطه $|\Omega|$ مساحت سطح مقطع تونل و $u(\mathbf{x})$ سرعت جریان مخزن برای (۱۶-۵) است که با رابطه زیر تعریف می‌شود،

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) e^{-|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v}. \quad (22-5)$$

در ادامه از تعریف‌های فرمولی زیر استفاده خواهیم کرد،

$$\langle f, g \rangle_{\Gamma_{\mathbf{v}}^{\pm}} = \int_{\Gamma_{\mathbf{v}}^{\pm}} f g (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (23-5)$$

بطوریکه،

$$\Gamma_{\mathbf{v}}^{\pm} = \{\mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \gtrless 0\}. \quad (24-5)$$

۳-۵ مدل گسسته قائم و روش اجزای متناهی SD

برای طراحی روش مدل گسسته قائم و روش اجزای متناهی SD، ابتدا انتگرال در عملگر برخورد در معادله (۱۸-۵) را در فضای سرعت گسسته نموده و با استفاده از یک روش انتگرال‌گیری عددی تقریب می‌زنیم. به این منظور از روش انتگرال‌گیری،

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{v}) d\sigma \sim \sum_{\mathbf{v} \in \Delta} \omega_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}), \quad (25-5)$$

استفاده می‌کنیم که در آن $\omega_{\mathbf{v}}$ وزنه‌های نامنفی انتگرال‌گیری عددی هستند بطوریکه $\sum_{\mathbf{v} \in \Delta} \omega_{\mathbf{v}} \equiv 1$ و Δ یک مجموعه گسسته از گره‌ها است که در ادامه تعریف می‌شود. با استفاده از مختصات قطبی بردار سرعت $\mathbf{v} = (c \cos \theta, c \sin \theta)$ که در آن $c = |\mathbf{v}|$ و جایگذاری در رابطه انتگرال‌گیری عددی داریم،

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(c, \theta) e^{-c^2} c dc d\theta \sim \sum_{\mathbf{v} \in \Delta} \omega_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}). \quad (26-5)$$

در این رابطه

$$\Delta = \{ \mathbf{v}_{ij} : \mathbf{v}_{ij} = c_i(\cos(\theta_j), \sin(\theta_j)), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \}, \quad (27-5)$$

نقاط گره‌ای برای انتگرال‌گیری عددی هستند که در آن از متغیر زاویه‌ای θ به طور یکنواخت $\theta_j = 2\pi j/M$ گسسته‌سازی شده‌اند. همچنین در متغیر شعاعی، نقاط انتگرال‌گیری عددی گوسی برابر با $c_i = r_i/\sqrt{2}$ که در آن r_i صفرهای چندجمله‌ای متعامد هرمیت متناظر با تابع $d\sigma(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr$ روی بازه $(0, \infty)$ هستند. برای روش انتگرال‌گیری (۲۶-۵) که برای چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر m دقیق است می‌توان با توجه به [۲] ثابت کرد که،

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{v}) d\sigma - \sum_{\mathbf{v} \in \Delta} \omega_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}) \right| \leq C m^{-\alpha} \|F\|_{\alpha}, \quad \forall F \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \geq 1. \quad (28-5)$$

در این رابطه α درجه بیشینه همواری تابع F است که می‌تواند یک عدد غیر صحیح مثبت باشد. عملگر برخورد \mathcal{C} در (۱۸-۵) را با عملگر گسسته شده $\hat{\mathcal{C}}$ بصورت زیر تقریب می‌زنیم،

$$\hat{\mathcal{C}}(f) = -f(c, \theta, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \omega_{ij} f(c_i, \theta_j, \mathbf{x}). \quad (29-5)$$

با توجه به رابطه (۱۸-۵)، معادله (۱۶-۵) را در فضای سرعت می‌توان به صورت زیر گسسته کرد،

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla f^{ij} = \delta \hat{\mathcal{C}}(f^{ij}) + S^{ij}, & \text{در } \Delta \times \Omega \\ f^{ij} = 0 & \text{بر روی } \Gamma_{ij}^- \end{cases} \quad (30-5)$$

که در آن f^{ij} تقریب تابع $f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)$ است و $\Gamma_{ij}^- =: \Gamma_{\mathbf{v}_{ij}}^-$ مرز با شارش داخلی است. در اینجا \mathbf{v}_{ij} از رابطه (۲۷-۵) تعریف شده است. دستگاه معادلات (۳۰-۵) یک دستگاه معادلات هذلولوی از مرتبه اول در فضای متغیر فیزیکی است که آن را با روش اجزای متناهی گسسته می‌کنیم. به علاوه $\mathbf{g} := \{g^{ij}\}_{i,j}$ یا به طور ساده $\mathbf{g} := \{g^{ij}\}$ و زیر فضای W را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W = \{\mathbf{g} : g^{ij}(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega), \quad \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega), \quad \text{with } g^{ij}|_{\Gamma_{ij}^-} = 0\}. \quad (31-5)$$

برای $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in W$ ضرب نرده‌ای زیر را تعریف می‌کنیم،

$$\langle\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \omega_{ij} \int_{\Omega} f^{ij} g^{ij} d\mathbf{x}. \quad (32-5)$$

با توجه به تعریف عملگر \hat{C} ، برای هر دو توزیع $\mathbf{f} \in W$ و $\mathbf{g} \in W$ داریم،

$$\langle\langle \hat{C}(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{f}, \hat{C}(\mathbf{g}) \rangle\rangle. \quad (33-5)$$

باتوجه به نامساوی کشی-شوارتز و اینکه $\sum_{i,j} \omega_{ij} \leq 1$ داریم،

$$\begin{aligned} \langle\langle \hat{C}(\mathbf{f}), \mathbf{f} \rangle\rangle &= \sum_{i,j} \omega_{ij} \int_{\Omega} \hat{C}(f^{ij}) f^{ij} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(- \sum_{i,j} \omega_{ij} (f^{ij})^2 + \sum_{i,j} \omega_{ij} f^{ij} \sum_{i,j} \omega_{ij} f^{ij} \right) d\mathbf{x} \leq 0. \end{aligned} \quad (34-5)$$

رابطه (۳۴-۵) در حقیقت خاصیت نیمه-منفی معین بودن عملگر برخورد گسسته را نشان می‌دهد. بنابراین روابط (۳۳-۵) و (۳۴-۵) نشان می‌دهد که عملگر گسسته برخورد \hat{C} متقارن و نامثبت است. فرض کنید $\hat{\Pi}$ تصویر متعامد بر روی متمم فضای پوچ عملگر گسسته برخورد \hat{C} است، آنگاه داریم،

$$\hat{C}(\mathbf{f}) = \hat{C}(\hat{\Pi} \mathbf{f}). \quad (35-5)$$

با توجه به تعریف $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ و رابطه (۳۵-۵)، با به کارگیری نامساوی کشی-شوارتز، برای همه $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in W$ داریم،

$$-\langle\langle \hat{C}(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle\rangle \leq 2 \langle\langle \hat{\Pi} \mathbf{f}, \hat{\Pi} \mathbf{f} \rangle\rangle^{1/2} \langle\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle\rangle^{1/2}. \quad (36-5)$$

که نشان می‌دهد که عملگر گسسته برخورد \hat{C} در فضای W کراندار است. در اینجا فرم تغییراتی معادله (۳۰-۵) را با ضرب معادله در تابع آزمون g در فضای تابعی مناسب و با انتگرال‌گیری بر روی فضای مکان فیزیکی تشکیل می‌دهیم. در روش SD، توابع آزمون متشکل از جمله تابع آزمون g در روش متعارف گالرکین و یک جمله اضافی به شکل $(\mathbf{v} \cdot \nabla g)$ ، که جمله انتقال در جهت خط جریان است،

می‌باشد. اضافه کردن این جمله باعث ایجاد یک جمله پخش مصنوعی در معادله می‌شود. به این ترتیب فضای توابع آزمون و تقریب که از بعد متناهی هستند، متفاوت هستند. در نتیجه فرم تغییراتی پیوسته به صورت زیر است،

مطلوب است $\gamma(\mathbf{v} \cdot \nabla g) \in W$ بطوریکه برای همه $\{g^{ij}\}$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla f^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} - \delta(\hat{C}(f^{ij}), g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} \\ & = (S^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega}, \end{aligned} \quad (37-5)$$

بطوریکه γ_{ij} یک پارامتر مثبت است که معمولاً برای مسائل هذلولوی از مرتبه اندازه شبکه است. با ضرب فرم تغییراتی در وزن‌های انتگرال‌گیری عددی و جمع‌بندی بر روی مجموعه گره‌های انتگرال عددی، روش نیمه-گسسته در مدل گسسته قائم به صورت بدست می‌آید،

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \omega_{ij} \left\{ (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla f^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} - \delta(\hat{C}(f^{ij}), g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} \right\} \\ & = \sum_{i,j} \omega_{ij} (S^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega}. \end{aligned} \quad (38-5)$$

برای گسسته‌سازی در فضای متغیر مکانی، فرض کنید $\mathcal{C}_h = \{K\}$ یک افراز اجزای متناهی از Ω به المان‌های K با اندازه شبکه $h = \text{diam } K$ است. به علاوه فرض کنید $P_k(K)$ مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر k بر روی المان K در متغیر \mathbf{x} است. فضای اجزای متناهی از توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای پیوسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$V_h = \{g : g \text{ پیوسته است}; g \in P_k(K); \forall K \in \mathcal{C}_h\}. \quad (39-5)$$

به علاوه فضای اجزای متناهی متناظر با مدل گسسته قائم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$V_h = \{\{g^{ij}\} \in (V_h)^{NM} : g^{ij}|_{\Gamma_{ij}^-} = 0\}. \quad (40-5)$$

در این فضا فرم دو خطی متناظر برای همه $\mathbf{f}_h, \mathbf{g} \in V_h$ به صورت زیر است،

$$\begin{aligned} B(\mathbf{f}_h, \mathbf{g}) & = \sum_{i,j} \omega_{ij} \left\{ (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla f_h^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} \right. \\ & \quad \left. - \delta(\hat{C}(f_h^{ij}), g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} \right\}. \end{aligned} \quad (41-5)$$

اکنون هدف ما حل مسأله گسسته شده تغییراتی زیر است،

مطلوب است $\mathbf{f}_h \in V_h$ بطوریکه،

$$B(\mathbf{f}_h, \mathbf{g}) = L(\mathbf{g}), \quad \forall \mathbf{g} \in V_h, \quad (42-5)$$

که در آن L یک عملگر خطی است که از طرف راست رابطه (۳۸-۵) به صورت زیر تعریف می‌شود،
 (۳۸-۵):

$$L(\mathbf{g}) = \sum_{i,j} \omega_{ij} (S^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega}. \quad (۴۳-۵)$$

در ادامه برای روش (۴۲-۵)، رابطه تراکم‌پذیری زیر را برای فرم دو خطی B بدست می‌آوریم و کران‌های خطا را در نرم $\|\cdot\|$ که بر روی فضای \mathbf{V}_h بصورت زیر تعریف می‌شود به دست می‌آوریم،
 (۴۴-۵)

$$\|\mathbf{g}\|^2 = \sum_{i,j} \omega_{ij} \left(\|\sqrt{\gamma_{ij}}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij})\|_{\Omega}^2 + \delta \|\hat{\Pi} g^{ij}\|_{\Omega}^2 + \int_{\Gamma_{ij}^+} (g^{ij})^2 (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) ds \right).$$

در اینجا $\hat{\Pi}$ تصویر متعامد بر روی متمم فضای پوچ عملگر گسسته برخورد در \mathbf{V}_h است. از آنجا که فضای \mathbf{V}_h با بعد متناهی است و با توجه به رابطه (۳۴-۵) که نشان می‌دهد عملگر گسسته برخورد نیمه معین منفی است، ثابت مثبت $\hat{\lambda}$ وجود دارد که،

$$\hat{\lambda} \langle \hat{\Pi} \mathbf{f}, \hat{\Pi} \mathbf{f} \rangle \leq -\langle \hat{C}(\mathbf{f}), \mathbf{f} \rangle. \quad (۴۵-۵)$$

در لم زیر نشان می‌دهیم که عملگر دو خطی B تراکم‌پذیر است.

لم ۱-۳-۵ فرض کنید که پارامتر SD ، γ_{ij} در رابطه

$$\gamma_{ij} \sim \frac{\hat{\lambda}_0}{\delta}, \quad (۴۶-۵)$$

صدق کند، آنگاه ثابت $\alpha > 0$ وابسته به $\hat{\lambda}$ وجود دارد بطوریکه،

$$B(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \geq \alpha \|\mathbf{g}\|^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{V}_h. \quad (۴۷-۵)$$

برهان. در رابطه (۴۱-۵) قرار می‌دهیم $\mathbf{f}^h = \mathbf{g}$ ، آنگاه

$$B(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = \sum_{i,j} \omega_{ij} \left\{ (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}, g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} - \delta (\hat{C}(g^{ij}), g^{ij} + \gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}))_{\Omega} \right\}. \quad (۴۸-۵)$$

با استفاده از فرمول گرین و همچنین شرایط مرزی شارش داخلی صفر داریم،

$$(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}, g^{ij})_{\Omega} = \frac{1}{\gamma} \int_{\Gamma_{ij}^+} (g^{ij})^2 (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{v}. \quad (۴۹-۵)$$

به علاوه با توجه به رابطه (۴۵-۵) داریم،

$$-\sum_{i,j} \omega_{ij} (\hat{C}(g^{ij}), g^{ij})_{\Omega} \geq \hat{\lambda}_0 \sum_{i,j} \omega_{ij} \|\hat{\Pi} g^{ij}\|_{\Omega}^2, \quad (۵۰-۵)$$

با استفاده از رابطه (۳۶-۵) نامساوی زیر را به دست می‌آوریم،

$$\sum_{i,j} \omega_{ij} \left(\hat{C}(g^{ij}), \gamma_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}) \right)_{\Omega} \leq 2 \left(\sum_{i,j} \omega_{ij} \|\hat{\Pi} g^{ij}\|_{\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j} \omega_{ij} \|\sqrt{\gamma_{ij}} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij})\|_{\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (51-5)$$

در نتیجه،

$$\sum_{i,j} \omega_{ij} \delta \left(\hat{C}(g^{ij}), \gamma_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij}) \right)_{\Omega} \leq \sum_{i,j} \omega_{ij} (\hat{\lambda}_0 \delta \|\hat{\Pi} g^{ij}\|_{\Omega}^2 + \frac{\delta}{\hat{\lambda}_0} \|\sqrt{\gamma_{ij}} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g^{ij})\|_{\Omega}^2), \quad (52-5)$$

که با انتخاب γ_{ij} از رابطه (۴۶-۵) و همچنین روابط (۴۸-۵)-(۵۲-۵) نتایج مورد نظر به دست می‌آید. ■

قضیه همگرایی برای مسأله اجزای متناهی SD به صورت زیر است.

قضیه ۲-۳-۵ فرض کنید $\{f^{ij}\}$ و \mathbf{f}_h به ترتیب جواب معادلات (۳۷-۵) و (۴۲-۵) باشند. آنگاه اگر پارامتر SD ، γ_{ij} ، در رابطه

$$\gamma_{ij} \sim \min \left\{ \frac{\hat{\lambda}_0}{\delta}, \frac{h}{\|\mathbf{v}_{ij}\|_{\infty}} \right\}, \quad (53-5)$$

صدق کند، آنگاه ثابت $C = C(\Omega)$ وجود دارد بطوریکه،

$$\| \| \{f^{ij}\} - \mathbf{f}_h \| \| \leq Ch^{k+1/2} \left(\sum_{i,j} \omega_{ij} (\delta + \|\mathbf{v}_{ij}\|_{\infty}) \|f^{ij}\|_{k+1,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (54-5)$$

برهان. با استفاده از نامساوی مثلثی داریم،

$$\| \| \{e^{ij}\} \| \| \leq \| \| \{\eta^{ij}\} \| \| + \| \| \{\xi^{ij}\} \| \| . \quad (55-5)$$

با استفاده از تعریف نرم $\| \| \cdot \| \|$ و تقریب خطای درونیاب (۱۵-۲) داریم،

$$\| \| \{\eta^{ij}\} \| \| \leq Ch^{k+1/2} \left(\sum_{i,j} \omega_{ij} (\delta + \|\mathbf{v}_{ij}\|_{\infty}) \|f^{ij}\|_{k+1,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (56-5)$$

با استفاده از رابطه تعامد گالرکین $B(\{e^{ij}\}, \{\xi^{ij}\}) = 0$ ، و اینکه γ_{ij} از رابطه (۵۳-۵) در رابطه

(۴۶-۵) صدق می‌کند، نامساوی زیر را بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \alpha \| \| \{\xi^{ij}\} \| \| ^2 &\leq B(\{\xi^{ij}\}, \{\xi^{ij}\}) = B(\{\eta^{ij}\} - \{e^{ij}\}, \{\xi^{ij}\}) = B(\{\eta^{ij}\}, \{\xi^{ij}\}) \\ &= \sum_{i,j} \omega_{ij} \left\{ (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \eta^{ij}, \xi^{ij} + \gamma_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \xi^{ij}))_{\Omega} \right. \\ &\quad \left. - \delta (\hat{C}(\eta^{ij}), \xi^{ij} + \gamma_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \xi^{ij}))_{\Omega} \right\}. \end{aligned} \quad (57-5)$$

به علاوه با انتگرال گیری جزء به جزء و اینکه $\operatorname{div} v \equiv 0$ ، با انتگرال گیری نامساوی کشی-شوارتز داریم،

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \eta^{ij}, \xi^{ij})_{\Omega} &= -(\eta^{ij}, \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \xi^{ij})_{\Omega} + \frac{1}{\varphi} \int_{\Gamma_{ij}^+} \eta^{ij} \xi^{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) ds \\ &\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ij}}} \eta^{ij} \right\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\varphi} \left\| \sqrt{\gamma_{ij}} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \xi^{ij} \right\|_{\Omega}^2 \\ &\quad + \int_{\Gamma_{ij}^+} |\eta^{ij}|^2 (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) ds + \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_{ij}^+} |\xi^{ij}|^2 (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) ds. \end{aligned} \quad (58-5)$$

بطور مشابه برای بدست آوردن یک کران خطا در (57-5)، با استفاده از رابطه (36-5) و به کارگیری نامساوی کشی-شوارتز و رابطه (33-5) داریم،

$$-\sum_{i,j} \omega_{ij} \delta \left(\hat{C}(\eta^{ij}), \xi^{ij} \right)_{\Omega} \leq \sum_{i,j} \omega_{ij} \left\{ C \delta \left\| \eta^{ij} \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\delta}{\varphi} \left\| \hat{\Pi} \xi^{ij} \right\|_{\Omega}^2 \right\}, \quad (59-5)$$

و

$$-\sum_{i,j} \omega_{ij} \delta \left(\hat{C}(\eta^{ij}), \gamma_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \xi^{ij}) \right)_{\Omega} \leq \sum_{i,j} \omega_{ij} \left\{ C \delta \left\| \hat{\Pi} \eta^{ij} \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\delta}{\varphi \lambda_0} \left\| \gamma_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \xi^{ij}) \right\|_{\Omega}^2 \right\}. \quad (60-5)$$

همچنین با توجه به روابط (57-5)-(60-5) و رابطه (53-5) به نامساوی زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned} \left\| \{ \xi^{ij} \} \right\|_{\Omega}^2 \leq B(\eta, \xi) &\leq \frac{1}{\varphi} \left\| \{ \xi^{ij} \} \right\|_{\Omega}^2 + C \sum_{i,j} \omega_{ij} \left[\left\| \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ij}}} \eta^{ij} \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\gamma_{ij}} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \eta^{ij}) \right\|_{\Omega}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_{ij}^+} |\eta^{ij}|^2 (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) ds \right]. \end{aligned} \quad (61-5)$$

در نهایت با استفاده از روابط (15-2) و (53-5) نامساوی زیر را به دست می‌آوریم،

$$\left\| \{ \xi^{ij} \} \right\|_{\Omega} \leq Ch^{k+1/2} \left(\sum_{i,j} \omega_{ij} (\delta + \|\mathbf{v}_{ij}\|_{\infty}) \|f^{ij}\|_{k+1, \Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (62-5)$$

با جایگزین کردن نامساوی‌های (56-5) و (62-5) در (55-5) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. ■

در زیر با استفاده از قضیه ۲-۳-۵، تخمین خطای روش گسسته قائم و روش اجزای متناهی SD را به دست می‌آوریم.

قضیه ۲-۳-۵ فرض کنید f جواب دقیق معادله (16-5)-(19-5) است. فرض کنید $f \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^2, H^{k+1}(\Omega))$ و رابطه انتگرال گیری عددی (28-5) برقرار باشد. آنگاه ثابت $C > 0$ مستقل از m و h وجود دارد بطوریکه برای مسأله گسسته شده (42-5)-(43-5) رابطه زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \left\| \{ f_h^{ij}(\mathbf{x}) \} - \{ f(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}) \} \right\|_{\Omega}^2 &\leq Ch^{2k+1} \sum_{i,j} \omega_{ij} (\delta + \|\mathbf{v}_{ij}\|_{\infty}) \|f^{ij}\|_{k+1, \Omega}^2 \\ &\quad + m^{-2\alpha} \int_{\Omega} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha}^2 d\mathbf{x} + (\delta Z m^{-\alpha}) \left(\int_{\Omega} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha}^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (63-5)$$

برهان. برای اثبات قضیه خطای ناشی از انتگرال‌گیری عددی در محاسبات باید لحاظ شود. خطای کلی روش گسسته قائم و روش اجزای متناهی را بصورت زیر تفکیک میکنیم،

$$\{f_h^{ij}\} - \{f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)\} = \{f_h^{ij}\} - \{f^{ij}\} + \{f^{ij}\} - \{f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)\}. \quad (64-5)$$

آنگاه با استفاده از نامساوی مثلثی داریم،

$$|||\{f_h^{ij}\} - \{f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)\}||| \leq |||\{f_h^{ij}\} - \{f^{ij}\}||| + |||\{f^{ij}\} - \{f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)\}|||. \quad (65-5)$$

در اینجا $|||\{f^{ij}\} - \{f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)\}|||$ خطای مربوط به انتگرال‌گیری عددی (5-25) است که باید کران آن محاسبه شود. به این منظور طرفین رابطه (5-16) را به ازای $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{ij}$ را از رابطه (5-30) کسر می‌کنیم. بنابراین،

$$\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij} - \delta \hat{C}(\chi^{ij}) = \rho(\mathbf{x}), \quad \chi^{ij} = 0 \text{ بر روی } \Gamma_{ij}^-, \quad (66-5)$$

که در آن $\chi^{ij} = f^{ij} - f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot)$ و

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) e^{-|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} - \sum_{i,j} \omega_{ij} f(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}). \quad (67-5)$$

با استفاده از ضرب نرده ای از رابطه (5-6) و ضرب معادله (5-66) در $\{\gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij})\}$ داریم،

$$\begin{aligned} & \langle \langle \{\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij}\}, \{\gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij})\} \rangle \rangle - \delta \langle \langle \{\hat{C}(\chi^{ij})\}, \{\gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij})\} \rangle \rangle \\ & = \langle \langle \rho, \{\gamma_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij})\} \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (68-5)$$

در اینجا با به کارگیری نامساوی کشی-شوارتز همراه با (5-36) و (5-53) به نامساوی زیر می‌رسیم،

$$\sum_{i,j} \omega_{ij} \gamma_{ij} \|\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \chi^{ij}\|_{\Omega}^2 \leq C \left(\|\rho\|_{\Omega} \right)^2 + \delta^2 \sum_{i,j} \omega_{ij} \|\hat{\Pi} \chi^{ij}\|_{\Omega}^2. \quad (69-5)$$

به طور مشابه با ضرب داخلی معادله (5-66) در $\{\chi^{ij}\}$ و به کارگیری قضیه گرین و همچنین به کارگیری شرایط مرزی در (5-66) داریم،

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i,j} \omega_{ij} \int_{\Gamma_{ij}^+} (\chi^{ij})^2 \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n} ds - \sum_{i,j} \omega_{ij} \delta \int_{\Omega} \hat{C}(\chi^{ij}) \chi^{ij} d\mathbf{x} = \sum_{i,j} \omega_{ij} \int_{\Omega} \chi^{ij} \rho d\mathbf{x}. \quad (70-5)$$

دوباره، با به کارگیری نامساوی کشی - شوارتز و رابطه (5-45) نامساوی زیر را خواهیم داشت،

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i,j} \omega_{ij} \int_{\Gamma_{ij}^+} (\chi^{ij})^2 \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n} ds + \delta \sum_{i,j} \omega_{ij} \|\hat{\Pi} \chi^{ij}\|_{\Omega}^2 \leq CZ \|\rho\|_{\Omega}, \quad (71-5)$$

که در آن $Z = \max_{i,j} \|\chi^{ij}\|_{\Omega}$. در اینجا فقط باید یک کران برای $\|\rho\|_{\Omega}$ بدست آوریم. با توجه به خطای انتگرال‌گیری عددی (5-28) داریم،

$$|\rho(\mathbf{x})| \leq Cm^{-\alpha} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha}, \quad (72-5)$$

و آنگاه با انتگرالگیری از مجذور این رابطه بر روی Ω بدست می‌آوریم،

$$\|\rho\|_{\Omega}^2 \leq Cm^{-2\alpha} \int_{\Omega} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha}^2 d\mathbf{x}. \quad (73-5)$$

در نهایت با ادغام کردن روابط (۶۹-۵)، (۷۱-۵) و (۷۳-۵) داریم،

$$\begin{aligned} \|\{f^{ij}\} - \{f(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x})\}\|^2 &\leq Cm^{-2\alpha} \int_{\Omega} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha}^2 d\mathbf{x} \\ &+ C\delta Zm^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha}^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (74-5)$$

بر اساس نامساوی مثلثی (۶۵-۵)، قضیه ۲-۳-۵ و تقریب خطای (۷۴-۵) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. ■

تبصره ۴-۳-۵ در اینجا به بیان برخی خواص معادله (۱۶-۵) - (۱۹-۵) می‌پردازیم: بخاطر نبودن یک جمله جذب در معادله (۱۶-۵)، تخمین‌های پایداری هیچ‌گونه کران پایداری برای نرم L_2 تابع جواب به دست نمی‌دهد. در حقیقت یک کران خطا برای نرم L_2 تصویر متعامد جواب بر روی فضای پوچ عملگر گسسته برخورد به دست آوردیم. با تغییر متغیر از نوع تغییر متغیر نمایی، می‌توان یک جمله جذب در معادله تبدیل یافته بوجود آورد. از طرف دیگر، می‌توان با توجه به خاصیت‌های عملگر $\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla$ یک تخمین در نرم $L_2(\Omega)$ برای تابع جواب بدست آورد. از آنجا که $\nabla \cdot \mathbf{v}_{ij} = 0$ با توجه به [۲۶]، عملگر انتقال $\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla : W \rightarrow L_2(\Omega)$ ایزومورفیسم است، داریم،

$$\alpha \|g\|_{\Omega} \leq \|\mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla g\|_{\Omega}, \quad \forall g \in W, \quad (75-5)$$

برای برخی $\alpha > 0$. باید توجه داشت که در تقریب‌های فوق، نیم-نرم یعنی نرم مشتقات جواب، با یک ضریب از مرتبه $O(\sqrt{h})$ ظاهر می‌شود. با توجه به این موضوع و همچنین قضیه ۳-۳-۵، ضریب γ_{ij} در نرم L_2 تابع نیز ظاهر می‌شود. در نتیجه در نتایج عددی نرخ همگرایی جواب از مرتبه $O(h^k + m^{-\alpha} h^{-1/2})$ است، یعنی نرخ همگرایی جواب با مرتبه $h^{1/2}$ کاهش می‌یابد.

نتیجه ۵-۳-۵ فرض کنید G نرخ شارش جرم است که با رابطه (۲۱-۵) تعریف شده است و تقریب عددی آن G_h با رابطه زیر تعریف می‌شود،

$$G_h = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i,j} \omega_{ij} \int_{\Omega} f_h^{ij}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (76-5)$$

آنگاه داریم،

$$|G - G_h| \sim C_{\delta}^{-1} O(\delta^{1/2} h^{k+1/2} + m^{-\alpha} + \delta^{1/2} m^{-\alpha/2}). \quad (77-5)$$

که در آن $C_{\delta} = \min\{\delta, \frac{1}{\delta}, \gamma_{ij}\}$.

برهان. با توجه به نامساوی مثلثی زیر،

$$|G - G_h| \leq |G - \hat{G}| + |\hat{G} - G_h|, \quad (78-5)$$

که در آن،

$$\hat{G} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i,j} \omega_{ij} \int_{\Omega} f(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (79-5)$$

و با توجه به خطای روش انتگرال‌گیری عددی در رابطه (28-5) داریم،

$$|G - \hat{G}| \leq C m^{-\alpha} \int_{\Omega} \|f(\cdot, \mathbf{x})\|_{\alpha} d\mathbf{x}. \quad (80-5)$$

به‌علاوه با توجه به نامساوی هولدر برای جمله دوم در رابطه (78-5) نامساوی زیر را بدست می‌آوریم،

$$|\hat{G} - G_h| \leq \sum_{i,j} \omega_{ij} \|f(\mathbf{v}_{ij}, \cdot) - f_h^{ij}\|_{\Omega}. \quad (81-5)$$

با توجه به قضیه 3-3-5 و تبصره 4-3-5 نتیجه می‌گیریم،

$$|\hat{G} - G_h| \sim C_{\delta}^{-1} \mathcal{O}(\delta^{1/2} h^{k+1/2} + m^{-\alpha} + \delta^{1/2} m^{-\alpha/2}), \quad (82-5)$$

بطوریکه $C_{\delta} = \min\{\delta, \frac{1}{\delta}, \gamma_{ij}\}$. با اضافه کردن روابط (80-5) و (82-5) در (78-5) و با توجه به همواری مفروض برای تابع f نتیجه مطلوب بدست می‌آید. ■

فصل ۶

نتایج عددی

به منظور تحقیق و بررسی نتایج نظری در مورد نرخ همگرایی جواب عددی، در این بخش آهنگ شارش جرم برای یک دامنه وسیع از پارامتر ترفیق δ برای تونلهای با سطح مقطع مستطیلی، مثلثی و دایره‌ای محاسبه می‌شود. نتایج عددی بدست آمده با نتایج عددی در مراجع [۲۵]، [۳۶]، [۴۴] و [۴۵] مقایسه می‌شود. همچنین درباره مرتبه همگرایی روش ارائه شده در نرم $\| \cdot \|_0$ که در رابطه (۴۴-۵) تعریف شده است تحقیق می‌کنیم. برای مسئله (۱۶-۵) و برای تونلهای با سطح مقطع دایره‌ای، مستطیلی و مثلثی جداول ۱-۶-۳ به ترتیب نتایج روش ارائه شده از محاسبه نرخ شارش جرم G که در رابطه (۲۱-۵) تعریف شده است را نشان می‌دهد. جداول ۴-۶-۴-۶ نرخ همگرایی بهینه را برای توابع بطور قطعه‌ای چندجمله‌ای برای مثال ۴-۱ بر روی دامنه مستطیل شکل نشان می‌دهد. در ادامه جزئیات مربوط به محاسبات عددی را بیان می‌کنیم؛ در اینجا از توابع بطور قطعه‌ای چندجمله‌ای به روی شبکه با اندازه $h = 0.07$ استفاده شده است. در روش انتگرال‌گیری عددی $M = 15$ و $N = 15$ ، یعنی از ۲۲۵ نقطه گره‌ای برای انتگرال‌گیری عددی برای گسسته کردن مسأله (۱۶-۵) استفاده شده است. از آنجا که عملگر \hat{C} - یک عملگر نیمه-معین مثبت است، پارامتر λ_0 در رابطه (۵۳-۵) با کسر خارج قسمت ریلی از (۴۵-۵) به صورت،

$$\lambda_0 \leq \min_{\hat{\Pi} \neq 0} \frac{-\langle \hat{C}(\mathbf{f}), \mathbf{f} \rangle}{\langle \hat{\Pi} \mathbf{f}, \hat{\Pi} \mathbf{f} \rangle}. \quad (1-6)$$

تقریب زده می‌شود و لذا با انتخاب $f^{ij} = 1$ در $\mathbf{f} = \{f^{ij}\}$ برای هر i, j داریم $\lambda_0 \leq \min_{i,j} (1 - \omega_{ij})$ که در آن ω_{ij} وزن‌های انتگرال‌گیری عددی در رابطه (۲۵-۵) هستند. با توجه به محدودیت برای پارامتر $\gamma = \gamma_0 h$ ، SD ، برای $\delta \leq 5$ مقدار $\gamma_0 = 0.01$ انتخاب می‌کنیم و برای $\delta > 5$ مقدار عددی $\gamma_0 = 0.001$ را قرار می‌دهیم. در حالت کلی ترفیق باعث افزایش پخش‌شدگی جریان سیال می‌شود و در نتیجه برای مقادیر بزرگ δ ، مقدار کمتری از پارامتر SD نیاز است، یعنی پارامتر γ و γ_0 باید کوچکتر باشند. دستگاه جبری حاصل از روش اجزای متناهی SD ، روش گسسته قائم با استفاده از روش SOR با شرط توقف همگرایی از مرتبه 10^{-12} حل می‌شود. از آنجاییکه برای $1 \gg \delta$ سرعت همگرایی روش تکراری کاهش می‌یابد، در این حالت برای حل دستگاه جبری حاصل از روش مستقیم استفاده می‌شود. در جدول ۱-۶

جدول ۶-۱: آهنگ شارش جرم G در تونل با سطح مقطع مستطیلی برای مقادیر مختلف δ و مقادیر مختلف نسبت طولی به عرضی a/b .

δ	G					
	$a/b = 1$		$a/b = 2$		$a/b = 10$	
	[۳۶، ۴۱]	(۴۲-۵)	[۴۱]	(۴۲-۵)	[۴۱]	(۴۲-۵)
۰٫۰۱	۰٫۸۲۸۱	۰٫۸۲۰۱	۱٫۱۳۷	۱٫۱۲۲۹	۱٫۹۱۰	۱٫۹۴۰۷
۰٫۰۲	۰٫۸۲۱۳	۰٫۸۱۶۰	۱٫۱۲۵	۱٫۱۱۴۵	۱٫۸۵۸	۱٫۸۸۹۶
۰٫۰۵	۰٫۸۰۷۶	۰٫۸۰۵۵	۱٫۰۹۹	۱٫۰۹۴۴	۱٫۷۵۹	۱٫۷۸۸۰
۰٫۱	۰٫۷۹۳۴	۰٫۷۹۲۵	۱٫۰۷۳	۱٫۰۷۱۶	۱٫۶۶۵	۱٫۶۸۷۶
۰٫۲	۰٫۷۷۶۶	۰٫۷۷۶۵	۱٫۰۴۶	۱٫۰۴۶۲	۱٫۵۶۳	۱٫۵۷۸۵
۰٫۵	۰٫۷۶۲۲	۰٫۷۶۰۳	۱٫۰۲۶	۱٫۰۲۴۳	۱٫۴۵۴	۱٫۴۵۶۸
۰٫۸	۰٫۷۶۱۴	۰٫۷۶۰۹	۱٫۰۳۱	۱٫۰۲۸۸	۱٫۴۲۵	۱٫۴۲۴۶
۱	۰٫۷۶۷۸	۰٫۷۶۵۲	۱٫۰۴۱	۱٫۰۳۷۷	۱٫۴۲۴	۱٫۴۲۱۳
۱٫۵	۰٫۷۸۶۱	۰٫۷۸۲۷	۱٫۰۷۴	۱٫۰۷۰۰	۱٫۴۴۸	۱٫۴۴۱۹
۲	۰٫۸۰۷۶	۰٫۸۰۵۶	۱٫۱۱۵	۱٫۱۱۰۰	۱٫۴۹۱	۱٫۴۸۳۴
۵	۰٫۹۸۸۵	۰٫۹۷۸۷	۱٫۴۱۳	۱٫۳۹۷۷	۱٫۸۷۰	۱٫۸۶۳۳
۱۰	۱٫۳۲۹	۱٫۳۱۶۱	۱٫۹۵۵	۱٫۹۵۵۹	۲٫۵۹۹	۲٫۵۹۸۱
۱۵	۱٫۷۰۵	۱٫۶۵۹۱	۲٫۵۱۱	۲٫۵۱۶۶	۳٫۳۵۷	۳٫۳۶۳۶
۲۰	۲٫۰۰۰	۲٫۰۰۶۶	۳٫۰۷۷	۳٫۰۸۳۱	۴٫۱۲۱	۴٫۱۴۰۵
۳۰		۲٫۷۰۷۱		۴٫۲۲۱۹		
۴۰		۳٫۴۱۰۲		۵٫۳۶۱۶		۷٫۲۸۶۱
۵۰		۴٫۱۱۳۶		۶٫۴۹۹۱		۸٫۸۶۷۷
۱۰۰		۷٫۶۱۳۶		۱۲٫۱۲۶۸		۱۶٫۷۹۸۸
۲۰۰		۱۴٫۴۸۲۴		۲۳٫۰۳۲۸		۳۲٫۶۸۹۰

نتایج حاصل از محاسبه آهنگ شارش جرم در تونل با سطح مقطع مستطیلی آورده شده است و با نتایج متناظر در مراجع [۳۶] و [۴۱] برای مقادیر متفاوت نسبت a/b که $2a$ عرض سطح مقطع تونل در جهت x و $2b$ طول سطح مقطع تونل در جهت y است مقایسه شده است. در جدول ۶-۲ نتایج مشابه برای تونل با سطح مقطع دایره‌ای آورده شده است. بطور کلی نتایج با نتایج عددی از مراجع [۲۸] و [۳۵] هم‌خوانی خوبی دارد و فقط در حدود ۱٪ نتایج با هم متفاوت است. البته برای مقادیر $\delta \gg 1$ و $\delta \ll 1$ تفاوت نتایج از حدود ۱٪ بیشتر است. این تفاوت در نتایج ممکن است مربوط به خطای تقریب وابسته به δ در رابطه (۶۳-۵) باشد. برای کاستن از خطای عددی باید از روشهای انتگرال‌گیری با مرتبه بالا برای $\delta \ll 1$ و برای $\delta \gg 1$ باید از شبکه‌های با اندازه کوچکتر استفاده کرد.

جدول ۶-۳ نتایج برای جریان سیال در تونل با سطح مقطع مثلثی را نشان می‌دهد. نتایج عددی با نتایج متناظر در [۴۴] که فقط برای پارامتر ترقیق δ تا عدد ۵۰ آورده شده است مقایسه شده‌اند. ترازهای جواب برای نتایج عددی در شکل نشان داده شده است. در شکل ۶-۱ توزیع سرعت در تونل سطح مقطع مستطیلی شکل برای مقادیر مختلف پارامتر ترقیق ۱، ۰٫۱، ۰٫۰۱ و $\delta = 10$ نشان داده شده است. در اشکال ۶-۲ و ۶-۴ منحنی‌های تراز سرعت حجمی در تونل با سطح مقطع دایره‌ای و با سطح مقطع

جدول ۶-۲: آهنگ شارش جرم G در تونل با سطح مقطع بیضوی برای مقادیر مختلف پارامتر ترفیق δ و مقادیر مختلف نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک a/b

δ	G							
	$a/b = 1$		$a/b = 1/1$		$a/b = 2$		$a/b = 10$	
	(۴۲-۵)	[۳۵]	[۲۸]	(۴۲-۵)	[۲۸]	(۴۲-۵)	[۲۸]	(۴۲-۵)
۱/۰۱	۱/۴۷۶۰	۱/۴۶۵۰	۱/۵۴	۱/۵۳۶۰	۲/۰۶۶	۲/۰۰۲۵	۳/۳۱۴	۳/۳۴۱۴
۱/۰۲	۱/۴۵۹۸	۱/۴۵۳۸	۱/۵۲۹	۱/۵۲۳۷	۲/۰۱۵	۱/۹۸۰۲	۳/۱۹۸	۳/۲۲۰۸
۱/۰۵	۱/۴۲۹۵	۱/۴۲۸۰	۱/۴۹۷	۱/۴۹۵۸	۱/۹۸۵	۱/۹۳۳۵	۲/۹۹۴	۳/۰۰۴۸
۱	۱/۴۰۲۶	۸/۴۰۱	۱/۴۶۹	۱/۴۶۸۰	۱/۹۳۵	۱/۸۹۱۲	۲/۸۱۷	۲/۸۱۶۹
۱/۲	۱/۳۸۱۶	۱/۳۷۹۰	۱/۴۴۶	۱/۴۴۴۷	۱/۸۹۳	۱/۸۵۸۷	۲/۶۵۱	۲/۶۴۲۷
۱/۵	۱/۳۸۶۴	۱/۳۸۳۵	۱/۴۹۹	۱/۴۵۲۵	۱/۸۸۱	۱/۸۷۷۷	۲/۵۳۴	۲/۵۱۵۸
۱/۸	۱/۴۲۵۲	۱/۴۲۱۴	۱/۴۹۹	۱/۴۹۵۸	۱/۹۵۱	۱/۹۴۷۳	۲/۵۶۵	۲/۵۴۱۹
۱	۱/۴۵۸۳	۱/۴۵۴۰	۱/۵۳۶	۱/۵۳۲۳	۲/۰۰۹	۲/۰۰۴۰	۲/۶۱۴	۲/۵۸۷۷
۱/۵	۱/۵۵۳۲	۱/۵۴۷۷	۱/۶۴۱	۱/۶۳۶۵	۲/۱۷۰	۲/۱۶۲۹	۲/۷۸۰	۲/۷۴۵۷
۲	۱/۶۵۷۶	۱/۶۵۰۷	۱/۷۵۷	۱/۷۵۰۵	۲/۳۴۴	۲/۳۳۴۵	۲/۹۷۶	۲/۹۳۳۷
۵	۲/۳۴۸۳	۲/۳۳۰۱	۲/۵۱۶	۲/۵۱۳۸	۳/۴۷۱	۳/۴۶۷۷	۴/۳۳۱	۴/۳۲۴۲
۱۰	۳/۵۶۳۳	۳/۵۶۱۹	۳/۸۵۰	۳/۸۴۸۸	۵/۴۳۰	۵/۴۲۹۹	۶/۷۳۸	۶/۷۷۱۷
۲۰	۶/۰۴۱۱	۶/۰۴۵۳	۶/۵۶۵	۶/۵۶۸۹	۹/۴۰۲	۹/۴۱۳۵	۱۱/۶۵	۹/۲۶۲۰
۳۰	۸/۵۳۳۳	۸/۵۴۱۶	۹/۲۹۴	۹/۳۰۱۵	۱۳/۳۹	۱۳/۴۰۸۶	۱۶/۵۸	۱۶/۷۳۸۷
۴۰	۱۱/۰۲۹۵	۱۱/۰۳۷۸	۱۲/۰۳	۱۲/۰۳۳۴	۱۷/۳۹	۱۷/۳۹۸۳	۲۱/۵۲	۲۱/۶۸۱۵
۵۰	۱۳/۵۲۶۹	۱۳/۵۳۰۳	۱۴/۷۶	۱۴/۷۶۰۸	۲۱/۳۸	۲۱/۳۷۷۷	۲۶/۴۶	۲۶/۵۸۱۱
۱۰۰	۲۶/۰۲۱۴	۲۵/۹۰۲۸		۲۸/۲۹۷۵		۴۱/۰۷۷۰		۵۰/۴۰۰۵
۲۰۰	۵۱/۰۲۵۴	۵۰/۱۳۴۸		۵۴/۸۰۴۹		۷۹/۴۲۳۳		۹۴/۸۱۰۸

جدول ۳-۶: آهنگ شارش جرم G در تونل با سطح مقطع مثلثی برای مقادیر مختلف پارامتر ترفیق δ .

δ	G					
	متساوی الاضلاع		متساوی الساقین		قائم الزاویه متساوی الساقین	
	[۴۴]	(۴۲-۵)	[۴۴]	(۴۲-۵)	[۴۴]	(۴۲-۵)
۰/۰۰۱	۰/۹۲۹	۰/۹۱۰۹	۰/۹۳۵	۰/۹۱۶۲	۰/۹۶۵	۰/۹۴۶۴
۰/۰۱	۰/۹۱۹	۰/۹۰۵۴	۰/۹۲۵	۰/۹۱۰۶	۰/۹۵۴	۰/۹۴۰۰
۰/۱	۰/۸۷۲	۰/۸۶۹۲	۰/۸۷۸	۰/۸۷۳۴	۰/۹۰۲	۰/۸۹۸۵
۰/۵	۰/۸۳۱	۰/۸۲۷۷	۰/۸۳۵	۰/۸۳۰۳	۰/۸۵۴	۰/۸۵۰۱
۰/۷۵	۰/۸۲۹	۰/۸۲۵۹	۰/۸۳۳	۰/۸۲۷۹	۰/۸۵۱	۰/۸۴۶۵
۱	۰/۸۳۴	۰/۸۳۰۱	۰/۸۳۷	۰/۸۳۱۷	۰/۸۵۴	۰/۸۴۹۴
۱/۵	۰/۸۵۱	۰/۸۴۷۵	۰/۸۵۵	۰/۸۴۸۴	۰/۸۷۰	۰/۸۶۵۱
۲	۰/۸۷۶	۰/۸۷۱۱	۰/۸۷۹	۰/۸۷۱۶	۰/۸۹۴	۰/۸۸۷۷
۵	۱/۰۶	۱/۰۵۸۱	۱/۰۷	۱/۰۵۸۴	۱/۰۸	۱/۰۷۴۴
۱۰	۱/۴۱	۱/۴۰۸۳	۱/۴۲	۱/۴۰۹۰	۱/۴۳	۱/۴۲۷۸
۲۰	۲/۱۴	۲/۱۴۰۸	۲/۱۴	۲/۱۴۴۳	۲/۱۷	۲/۱۷۰۹
۳۰	۲/۸۸	۲/۸۸۵۸	۲/۸۹	۲/۸۹۲۹	۲/۹۲	۲/۹۲۷۸
۴۰	۳/۶۲	۳/۶۳۵۰	۳/۶۳	۳/۶۴۵۶	۳/۶۷	۳/۶۸۸۹
۵۰	۴/۳۷	۴/۳۸۵۷	۴/۳۸	۴/۳۹۹۴	۴/۴۳	۴/۴۵۱۲
۱۰۰		۸/۱۳۵۲		۸/۱۵۶۵		۸/۲۵۰۱
۲۰۰		۱۵/۵۵۰۳		۱۵/۵۴۴۲		۱۵/۷۱۹۳

متساوی الاضلاع برای مقادیر مختلف از پارامتر γ ، SD و برای مقادیر مختلف پارامتر ترفیق $\delta = ۱$ و $\delta = ۱$ نشان داده شده است. اثر همواری پارامتر SD بر روی جواب عددی بدست آمده در اشکال ذکر شده دیده می‌شود. در شکل ۳-۶ منحنی‌های تراز سرعت حجمی برای مثلث قائم الزاویه و برای مقادیر مختلف δ نشان داده شده است. در اینجا یک مثال عددی برای حل مساله مقدار مرزی (۵-۱۶) بیان می‌کنیم و کارائی روش در نرخ همگرایی را بررسی می‌کنیم.

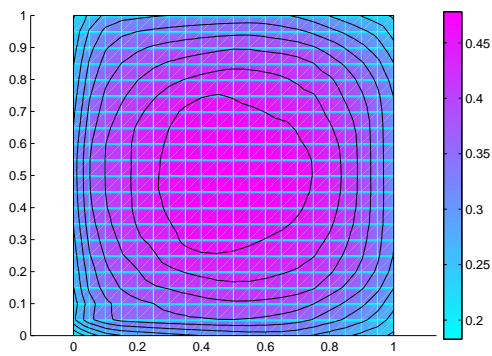
مثال ۶-۰-۶ در این مثال، ما معادله (۵-۱۶) را بر روی ناحیه مستطیلی $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ در نظر می‌گیریم که در آن جمله منبع $S(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ با رابطه زیر داده شده است،

$$S(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = w(\theta, \mathbf{x}) + cw(\theta, \mathbf{x}) \cos(\theta) (\theta y \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \pi \theta xy \cos(\pi x) \sin(\pi y)) \\ + cw(\theta, \mathbf{x}) \sin(\theta) (\theta x \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \pi \theta xy \cos(\pi y) \sin(\pi x)) \\ - \left(\frac{1}{2\pi} (e^{\gamma \pi xy \sin(\pi x) \sin(\pi y)} - 1) \right) / (xy \sin(\pi x) \sin(\pi y)),$$

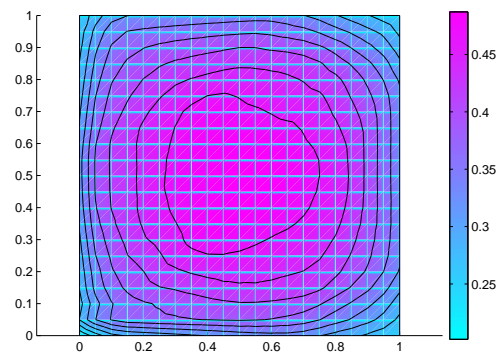
که در آن،

$$w(\theta, \mathbf{x}) = e^{\theta xy \sin(\pi x) \sin(\pi y)}. \quad (۲-۶)$$

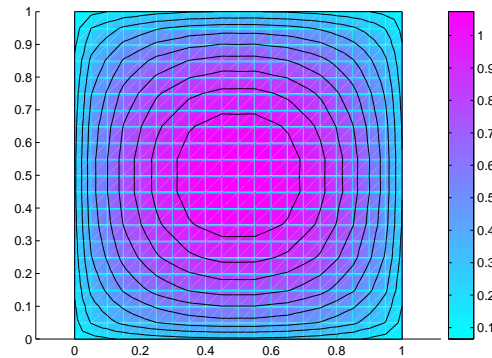
در این مثال، تابع S به متغیر c بستگی ندارد و جواب تحلیلی این مثال f که مستقل از c است بصورت



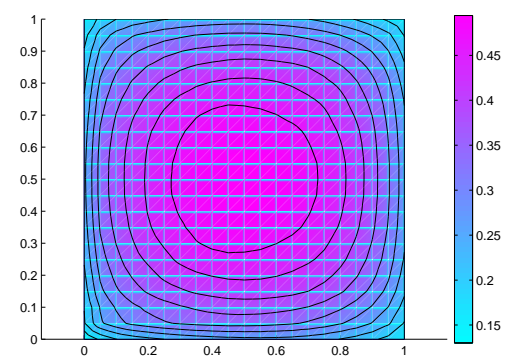
(ب)



(ا)

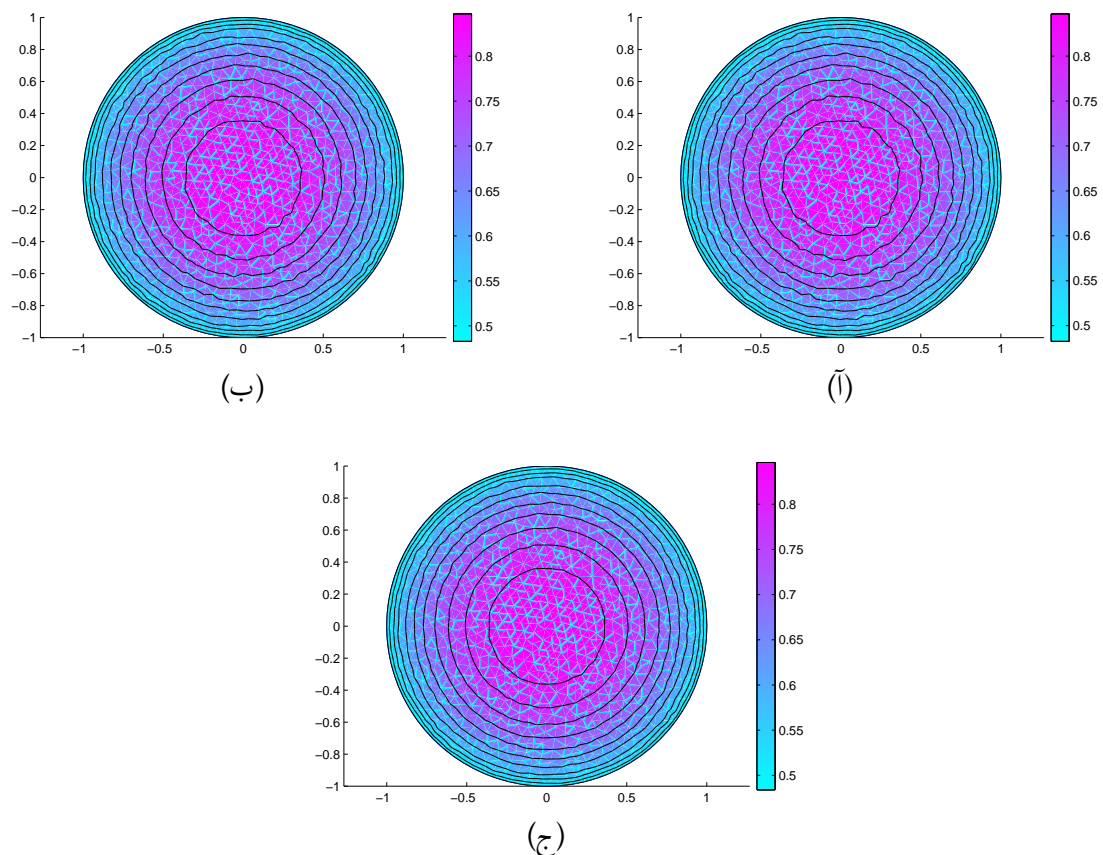


(د)

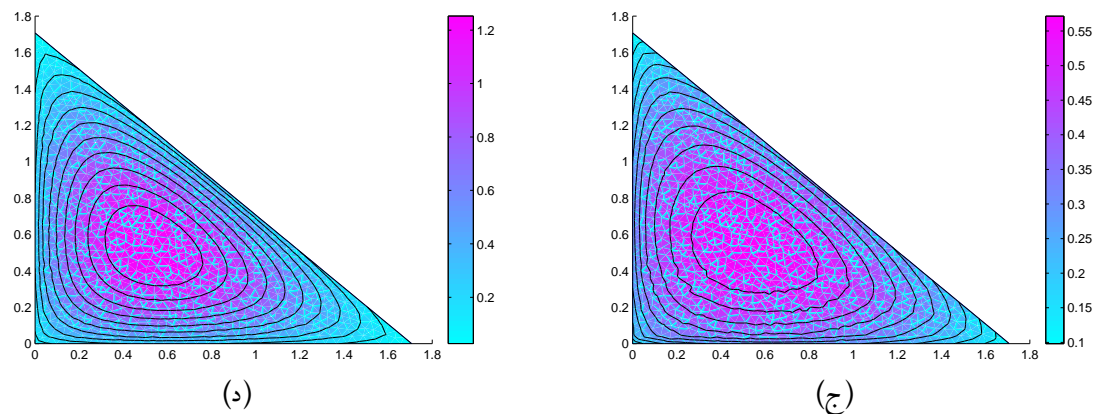
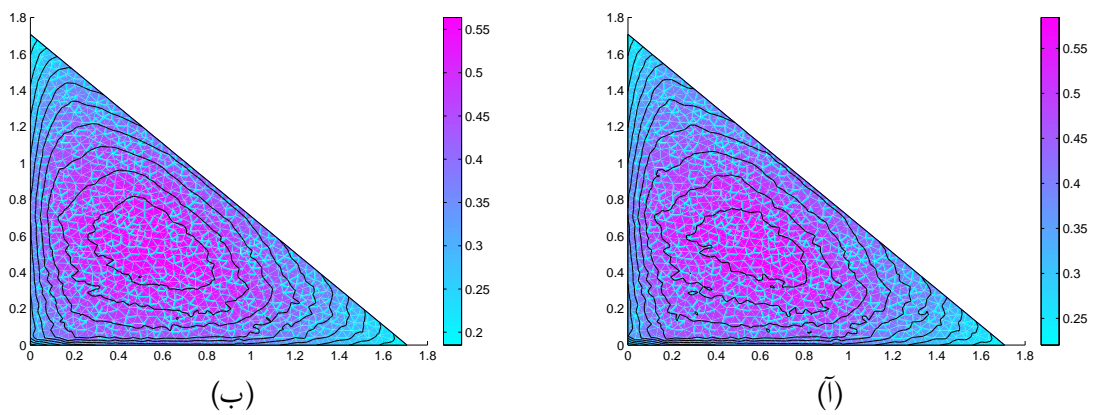


(ج)

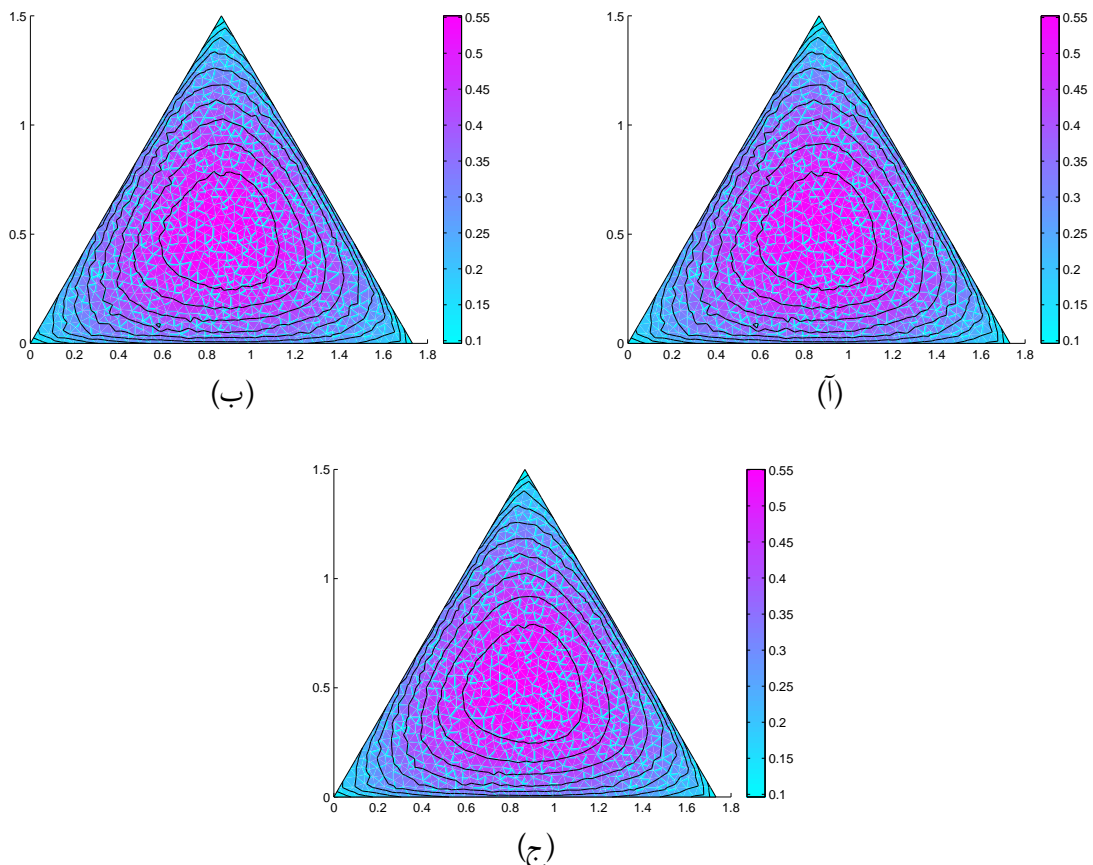
شکل ۶-۱: منحنی‌های تراز در سطح مقطع تونل مستطیلی: (الف - د) متناظر با $\delta = 0.1, 0.1, 0.1, 0.1$ و $\delta = 0.1$.



شکل ۶-۲: منحنی‌های تراز در سطح مقطع تونل دایره‌ای با $\delta = 0.1$: (الف - ج) متناظر با $\gamma_0 = 0, 0.001$ و 0.01 .



شکل ۶-۳: منحنی‌های تراز در سطح مقطع تونل مثلثی: (الف - د) متناظر با $\delta = 0.1, 0.1, 0.1$ و 1.0 .



شکل ۶-۴: منحنی‌های تراز در سطح مقطع تونل با سطح مقطع متساوی الاضلاع با $\delta = 1$: (الف - ج) متناظر با $\gamma = 0, 0.01$ و 0.01 .

زیر است،

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = w(\theta, \mathbf{x}) - 1. \quad (3-6)$$

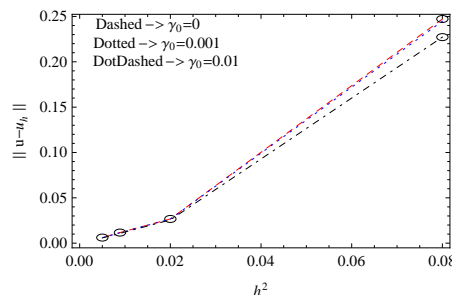
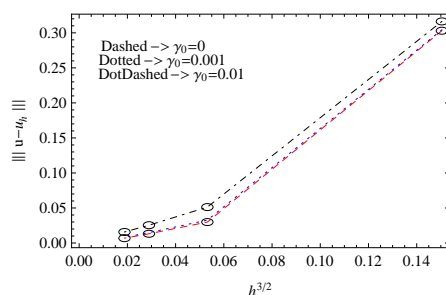
در نتیجه روش انتگرال‌گیری عددی فقط به انتگرال‌گیری عددی در متغیر θ بستگی دارد. برای محاسبه خطای روش اجزای متناهی SD ، از یک روش انتگرال‌گیری با مرتبه دقت بالا در (۵-۲۵) استفاده می‌شود تا خطای مدل گسسته قائم کاهش یابد. جداول ۶-۴-۵ و شکل ۶-۵ مرتبه همگرایی در نرم L_2 و در نرم $||| \cdot |||$ که در رابطه (۵-۴۴) تعریف شده است را نشان می‌دهد. همچنین خطای محاسبه آهنگ شارش جرم G که در رابطه (۵-۲۱) تعریف شده است در جدول ۶-۶ و شکل ۶-۶ برای مقادیر مختلف γ_0 نشان داده شده است. به منظور بررسی اثر انتگرال‌گیری بررسی بر روی دقت جواب از

جدول ۶-۴: خطای $||u - u_h||$ در مثال ۶-۰-۶.

h	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_0 = 0.001$	$\gamma_0 = 0.01$	$\gamma_0 = 0.1$	$\gamma_0 = 0.5$
$\frac{\sqrt{2}}{5}$	۰٫۲۴۷۲۰۶۹۸۲	۰٫۲۴۴۷۹۸۰۰۶	۰٫۲۲۷۲۱۳۸۰۳	۰٫۱۷۸۰۶۳۷۴۲	۰٫۲۱۶۳۲۷۶۷۵
$\frac{\sqrt{2}}{10}$	۰٫۰۲۶۷۱۵۰۰۹	۰٫۰۲۶۵۲۶۶۴	۰٫۰۲۵۶۵۲۰۳۶	۰٫۰۳۰۴۶۶۷۵۷	۰٫۰۷۵۹۲۷۶
$\frac{\sqrt{2}}{15}$	۰٫۰۱۱۶۷۰۰۱۶	۰٫۰۱۱۵۰۶۴۸	۰٫۰۱۰۸۲۱۰۸۹	۰٫۰۱۳۷۳۴۴۰۴	۰٫۰۴۵۲۸۱۹۳۵
$\frac{\sqrt{2}}{20}$	۰٫۰۰۶۱۶۲۷۷۱	۰٫۰۰۶۰۶۵۳۱۳	۰٫۰۰۵۷۶۶۶۹۴۴	۰٫۰۰۸۵۹۳۴۹۶	۰٫۰۳۲۹۹۶۷۱۲

جدول ۶-۵: خطای $|||u - u_h|||$ در مثال ۶-۰-۵.

h	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_0 = 0.001$	$\gamma_0 = 0.01$	$\gamma_0 = 0.1$	$\gamma_0 = 0.5$
$\frac{\sqrt{2}}{5}$	۰٫۳۰۳۰۲۲۹۳۵	۰٫۳۰۴۳۳۳۱۱۶	۰٫۳۱۶۳۰۷۰۰۸	۰٫۴۲۰۴۵۲۴۷۴	۰٫۷۱۸۰۲۲۳۶۵
$\frac{\sqrt{2}}{10}$	۰٫۰۲۹۸۹۵۳۲۷	۰٫۰۳۲۶۵۴۳۴۵	۰٫۰۵۱۲۸۵۲۷	۰٫۱۳۲۹۲۱۸۵۲	۰٫۲۸۴۵۳۴۹۶۴
$\frac{\sqrt{2}}{15}$	۰٫۰۱۳۱۸۵۴۳۶	۰٫۰۱۴۸۲۶۶۶۵	۰٫۰۲۵۴۱۴۰۴۵	۰٫۰۷۰۷۴۲۳۱۵	۰٫۱۶۱۴۴۴۷۸
$\frac{\sqrt{2}}{20}$	۰٫۰۰۶۹۲۵۵۸۴	۰٫۰۰۸۲۱۸۳۳۸	۰٫۰۱۵۷۲۲۸۵	۰٫۰۴۵۶۵۲۱۷۷	۰٫۱۰۷۵۳۹۹۸۳

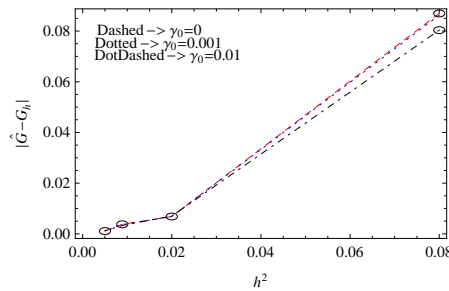


شکل ۶-۵: نرخ همگرایی h^2 برای $||u - u_h||$ (چپ) و نرخ همگرایی $h^{3/2}$ برای $|||u - u_h|||$ (راست).

روش عددی با دقت پایین با $M = 5$ و $N = 5$ ، یعنی ۲۵ نقطه گره‌ای استفاده می‌کنیم. برای مثال

جدول ۶-۶: خطای $|G - G_h|$ در مثال ۶-۰-۶.

h	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_0 = 0.001$	$\gamma_0 = 0.01$	$\gamma_0 = 0.1$	$\gamma_0 = 0.5$
$\frac{\sqrt{2}}{5}$	0.086942268	0.086250263	0.080363851	0.044469892	0.007591975
$\frac{\sqrt{2}}{10}$	0.006840345	0.006843534	0.007019878	0.007931986	0.007860636
$\frac{\sqrt{2}}{15}$	0.003764336	0.003679156	0.003300136	0.003239473	0.004556734
$\frac{\sqrt{2}}{20}$	0.001084447	0.00109074	0.001217363	0.001589597	0.002807666



شکل ۶-۶: نرخ همگرایی h^2 برای $|G - G_h|$ در مثال ۶-۰-۶.

متناظر با $h = \frac{\sqrt{2}}{\gamma_0}$ خطای روش عددی در نرم L_2 ، $\|u - u_h\|$ ، برای مقادیر مختلف پارامتر γ_0 به ترتیب 0.006840345 ، 0.006843534 ، 0.007019878 ، 0.007931986 ، 0.007860636 و برای $\| \|u - u_h\| \|$ به ترتیب 0.003764336 ، 0.003679156 ، 0.003300136 ، 0.003239473 ، 0.004556734 هستند. بنابراین در این مثال خطاها در نتایج عددی بیشتر مربوط به گسسته‌سازی مربوط به اجزای متناهی است و مرتبه همگرایی برای توابع بطور قطعی چندجمله‌ای پیوسته از مرتبه $O(h^{3/2})$ است. اثر پارامتر اجزای متناهی SD ، $\gamma = \gamma_0 h$ در رابطه (۵-۵۳) بر روی جواب عددی برای مقادیر مختلف γ_0 را بررسی کرده‌ایم. در جدول ۶-۴ دیده می‌شود که با افزایش مقدار γ_0 خطای روش در نرم L_2 افزایش می‌یابد.

فصل ۷

نتیجه‌گیری

در قسمت اول این رساله روش اجزای متناهی SD و DG از نوع h و hp برای معادله فرمی طراحی شد. در حقیقت نشان دادیم که این روش‌ها برای معادله فرمی که یک معادله انتقال-پخش تباهیده است، نسبت به پارامتر شبکه h و درجه چندجمله‌ای p بهینه هستند. در روش DG شرایط همواری برای تابع جواب نسبت به روش SD از محدودیت کمتری برخوردار است و همچنین در روش DG شبکه می‌تواند غیر منظم از نوع اول باشد. ولی باید توجه داشت در روش DG درجات آزادی گره‌ها نسبت به روش SD بیشتر است. مسأله گسسته شده فرمی از روش اجزای محدود دارای پنج بعد است. در نتیجه پیاده‌سازی این روش از لحاظ محاسباتی پیچیده است. یک روش برای کاهش بعد در مسأله گسسته شده و پیاده‌سازی آن استفاده از روش اویلر پس‌رو در متغیر x و مدل گسسته قائم در فضای سرعت است. روش اویلر پس‌رو در متغیر x و تحلیل همگرایی آن در مقاله [۳۴] مورد بررسی قرار گرفته است.

در قسمت دوم به حل عددی جریان سیال بر اساس معادله بولتزمان پرداخته شد. جریان گاز رقیق در تونل که با فشار ایجاد شده است را می‌توان با معادله BGK توصیف کرد. در بخش پنجم پایداری و همگرایی روش عددی برای حل معادله خطی شده BGK بررسی شد. روش عددی براساس مدل گسسته قائم در بردار سرعت و روش اجزای متناهی SD در متغیر مکان فیزیکی است. یک مرتبه همگرایی بهینه با توجه به همواری جواب دقیق معادله از مرتبه $O(h^{k+1/2})$ برای توابع بطورقطعه‌ای چندجمله‌ای از مرتبه k بدست آمده است در صورتی که جواب دقیق معادله f متعلق به فضای سوبولوف $H^{k+1}(\Omega)$ باشد. سازگاری بین دو روش عددی با $m \sim n = NM$ نقطه گره‌ای در روش انتگرال‌گیری عددی عبارت است از $O(\delta^{1/2} h^{k+1/2}) \sim O(m^{-\alpha} + \delta^{1/2} m^{-\alpha/2})$ که در آن $\alpha \approx k + 1$ و δ پارامتر ترقیق است.

نتایج عددی برای آهنگ شارش جرم برای دامنه‌هایی با هندسه‌های مختلف از جمله مستطیلی، دایره‌ای و مثلثی برای یک دامنه وسیع از مقادیر پارامتر ترقیق δ در فصل ششم آورده شده است. نرخ همگرایی روش به کار برده شده در مثالی برای ناحیه مستطیلی در نرم L_2 و نرم $||| \cdot |||$ بررسی شده است. برخلاف روش‌های عددی قبلی برای حل این جریان، این روش عددی به راحتی می‌تواند برای جریان‌های تبدیلی و نزدیک به مایع برای $\delta \gg 1$ به کار رود. به طور مثال، در روش‌های قبلی که از روش تفاضلات

متناهی استفاده می‌شود، با توجه به مسائل مربوط به پایداری روش عددی، نتایج فقط تا $\delta = 5^\circ$ نشان داده شده است. به‌علاوه به نظر می‌رسد که این روش عددی را می‌توان برای دیگر مدل‌های مربوط به معادله بولتزمان به کار گرفت. برای مسائل بر روی دامنه‌های با هندسه پیچیده‌تر می‌توان از مدل گسسته قائم با روش اجزای متناهی گالرکین ناپیوسته استفاده کرد که آن را به آینده موکول می‌کنیم.

مراجع

- [1] H. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1978). [1](#)
- [2] M. Asadzadeh, *Analysis of a fully discrete scheme for neutron transport in two-dimensional geometry*, SIAM J. Numer. Anal., 23 (1986), no. 3, 543-561. [35](#)
- [3] M. Asadzadeh, *Streamline diffusion methods for Fermi and Fokker-Planck equations*, Transport Theory Statist. Phys. 26 (1997), no. 3, 319-340.
- [4] M. Asadzadeh, *A posteriori error estimates for the Fokker-Planck and Fermi pencil beam equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. 10 (2000), no. 5, 737-769.
- [5] M. Asadzadeh, *On the stability of characteristic schemes for the Fermi equation*, Appl. Comput. Math. 1 (2002), no. 2, 158-174.
- [6] M. Asadzadeh, and A. Sopsakis, *On Fully Discrete Schemes for the Fermi Pencil-Beam Equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002), 4641-4659.
- [7] M. Asadzadeh and P. Kowalczyk, *Convergence of Streamline Diffusion Methods for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System*, Numer. Meth. Part. Diff. Eqs., 21 (2005), 472-495. [17](#), [22](#)
- [8] M. Asadzadeh and A. Sopsakis, *Convergence of a hp-Streamline Diffusion Scheme for Vlasov-Fokker-Planck system*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci., 17 (2007), 1159-1182.

- [9] M. Asadzadeh and E. W. Larsen, *Linear transport equations in flatland with small angular diffusion and their finite element approximations*, Math. Comput. Modelling, 47 (2008), no. 3-4, 495-514.
- [10] M. Asadzadeh and E. Kazemi, *On convergence of h and hp finite element methods for the three dimensional Fermi equation*, Int. Num. Analysis and Modeling, 10 (2013), no. 5, 860-875. 5
- [11] M. Asadzadeh, E. Kazemi, and R. Mokhtari, *Discrete-ordinates and streamline diffusion methods for a flow described by BGK model*, SIAM J. Sci. Comput. 36(2014), no. 4, B729-B748. 5
- [12] I. Babuška and M. Suri, *The hp -version of the finite element method with quasiuniform meshes*, Math. Model. Numer. Anal. 21 (1987), 199-238.
- [13] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, *A model for collision processes in gases*, Phys. Rev., 94 (1954), 511-515.
- [14] V. Bobylev and C. Cercignani, *Discrete velocity models without nonphysical invariants*, J. Statist. Phys., 97 (1999), 677-689. 30
- [15] A. V. Bobylev, A. Palczewski and J. Schneider, *On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math., 320 (1995), no. 5, 639-644. 30
- [16] C. Börgers and E. W. Larsen, *The transversely integrated scalar density of a narrowly focused particle beam*, SIAM journal on Applied Mathematics, 55 (1995), no. 1, 1-22. 6
- [17] C. Börgers and E. W. Larsen, *Asymptotic derivation of the Fermi pencil beam approximation*, Nucl. Sci. Eng. 123 (1996), 343-357.
- [18] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, 3:rd ed., (2008). 14
- [19] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra and A. Russo, *Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems*, Numer. Meth. Partial Diff. Equs., 16 (2000), no. 4, 365-378. 17

- [20] C. Buet, *A discrete-velocity scheme for the Boltzmann operator of rarefied gas dynamics*, Transport Theory Statist. Phys., 25 (1996), no. 1, 33-60. [30](#)
- [21] E. Burman, *Consistent SUPG-method for transient transport problems: Stability and convergence*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 199 (2010) 1114-1123.
- [22] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [23] C. Cercignani and A. V. Bobylev, *Discrete velocity models: The case of mixtures*, Transport Theory Statist. Phys., 29 (2000), 209-216. [30](#)
- [24] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [25] P. Degond, *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions*, Ann Scient Èc Norm Sup, 4^esérie, 19 (1986), 519-542.
- [26] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Appl. Math. Sci. 159, Springer-Verlag, New York, 2004. [42](#)
- [27] E. Fermi, cited by B. Rossi and K. Griesen in *Cosmic Ray Theory*, Rev. Mod. Phys. 13 (1941), 265.
- [28] I. Graur and F. Sharipov, *Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction*, Eur. J. Mech. B. Fluids, 27 (2008), 335-345. [45](#), [46](#)
- [29] P. Houston and E. Süli, *Stabilized hp-finite element approximation of partial differential equations with nonnegative characteristic form*, Computing 66 (2001), 99-119. [14](#)
- [30] P. Houston, C. Schwab and E. Süli, *Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems*, SIAM J. Numer. Anal. 39 (2002), 2133-2163. [25](#)

- [31] Hughes T. J. R., and Brooks A., *A Multidimensional Upwind Scheme With No Crosswind Diffusion*, Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, Ed. T. J. R. Hughes, AMD Vol. 34, ASME, New York (1979).
- [32] Hughes T. J. R., and Mallet M., *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics III, The Generalized Streamline Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 58 pp. 305-328 (1986).
- [33] C. Johnson, J. Saranen, *Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations*, Math. Comp. 47 (1986), no. 175, 1-18.
- [34] E. Kazemi, *The streamline diffusion method with implicit integration for the multi-dimensional Fermi pencil beam equation*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 39 (2013), no. 6, 1159-1180. [5](#), [12](#), [54](#)
- [35] S. S. Lo and S. K. Loyalka, *An efficient computation of near-continuum rarefied gas flows*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 33 (1982), 419-424. [44](#), [45](#), [46](#)
- [36] S. K. Loyalka, T. S. Storvik and H. S. Park, *Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channels in the molecular and transition flow regimes*, J. Vac. Sci. Technol., 13 (1976), 1188-1192. [44](#), [45](#)
- [37] G. C. Pomraning, *The Focker-Planck operator as an asymptotic limit*, M3AS. 2 (1992), no. 1, 21-36.
- [38] H. Risken, *The Focker-Planck Equation, Methods of solution and applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heildlberg, New York, (1989).
- [39] H. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska, *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, 2nd ed., Comput. Math. 24, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [40] L. R. Scott and S. Zhang, *Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp. 54, (1990), 484-493.
- [41] F. Sharipov, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel*, J. Vac. Sci. Technol. A, 17 (1999), 3062-3066. [33](#), [45](#)

-
- [42] B. Stamm and T. P. Wihler, *hp-optimal discontinuous Galerkin methods for linear elliptic problems*, Math. Comp. 79 (2010), no. 272, 2117–2133. [24](#)
- [43] D. Valougeorgis and S. Naris, *Acceleration schemes of the discrete velocity method: gaseous flows in rectangular microchannels*, SIAM J. Sci. Comput., 25 (2003), no. 2, 534-552.
- [44] D. Valougeorgis and S. Naris, *Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice*, Eur. J. Mech. B. Fluids, 27 (2008), 810-822. [44](#), [45](#), [47](#)
- [45] D. Valougeorgis and J. R. Thomas, *Exact numerical results for Poiseuille and thermal creep flow in a cylindrical tube*, Phys. Fluids., 29 (2) (1986), 423-429. [44](#)

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

mass flow rate	آهنگ جریان ماده
finite element	اجزای متناهی
partition	افراز
regular triangulation	افراز منظم
electromechanic	الکترومکانیک
electron	الکترون
element	المان
reference element	المان مرجع
integration by parts	انتگرال‌گیری جزء به جزء
quadrature formula	روش انتگرال‌گیری عددی
isomorphism	ایزومورفیسم
residual	باقیمانده
gradient vector	بردار گرادیان
Bhatnagar-Gross-Krook	بهتنگر-گراس-کروک
optimal	بهینه
elliptic	بیضوی
rarefaction parameter	پارامتر ترقیق
stabilizer	پایدارساز
proton	پروتون
radiation	تابش
trial function	تابع آزمون
basis function	تابع پایه‌ای
test function	تابع تقریب
discontinuity scaling function	تابع مقیاس ناپیوستگی
discontinuous function	تابع ناپیوسته

Galilean transform	تبدیل گالیله
error estimate	تخمین خطا
local error estimate	تخمین خطای موضعی
coercive	تراکم‌پذیری
cosmic rays	تشعشعات کهکشانی
projection	تصویر
orthogonal projection	تصویر قائم
distribution	توزیع
Maxwellian distribution	توزیع ماکسولین
absolute Maxwellian distribution	توزیع ماکسولین مطلق
channel	تونل
constant	ثابت
absorption	جذب
mass	جرم
Poiseuille flow	جریان پوازوی
transitional flow	جریان تبدیل
Couette flow	جریان کوئت
flow of gas	جریان گاز
nearly-continuum flow	جریان مشابه پیوسته
convection term	جمله انتقال
diffusion term	جمله پخش
jump	جهش
density	چگالی
piecewise polynomial	چندجمله‌ای قطعه‌ای
Legendre polynomia	چندجمله‌ای لژاندر
Hermite polynomial	چندجمله‌ای هرमित
Rayleigh quotient	خارج‌قسمت ریلی
linearization	خطی‌سازی
domain	دامنه
circle	دایره
degree	درجه
interpolation	درونیابی

Cauchy sequence	دنباله کشی
divergence	دیورژانس
charged particle	ذره باردار
radiation therapy	رادیوتراپی
streamline diffusion method	روش پخش در مسیر جریان
finite difference method	روش تفاضلات متناهی
iterative method	روش تکراری
discontinuous Galerkin method	روش گالرکین ناپیوسته
standard Galerkin method	روش متعارف گالرکین
direct method	روش مستقیم
successive overrelaxation method	روش SOR
scattering angle	زاویه تشعشع
conforming	سازگار
astrophysics	ستاره‌شناسی
bulk velocity	سرعت حجمی
differential cross-section	سطح مقطع دیفرانسیلی
angular flux	شار زاویه‌ای
mesh	شبکه
1-irregular mesh	شبکه غیر منظم از نوع اول
quasi-uniform	شبه-یکنواخت
inflow boundary condition	شرط مرزی شارش داخلی
radial	شعاعی
linear form	الگوی خطی
bilinear form	الگوی دوخطی
weak form	صورت ضعیف
inner product	ضرب داخلی
Knudsen number	عدد نادسون
material science	علم مواد
collision operator	عملگر برخورد
linear operator	عملگر خطی
differential operator	عملگر دیفرانسیلی
Laplace operator	عملگر لاپلاس

collision frequency	فرکانس برخورد
Green's formula	فرمول گرین
vector space	فضای برداری
kernel space	فضای پوچ
velocity domain	فضای سرعت
Sobolev space	فضای سوبولوف
Hilbert space	فضای هیلبرت
nanotechnology	فن‌آوری نانو
trace theorem	قضیه اثر
slab	قطعه
polyatomic gas	گاز چنداتمی
hanging node	گره معلق
discretization	گسسته‌سازی
microturbine	ماکروتوربین
orthogonal	متعامد
symmetric	متقارن
triangle	مثلث
Triangulation	مثلث‌بندی
polar coordinate	مختصات قطبی
mixture	مخلوط
discrete velocity model	مدل گسسته قائم
outflow boundary	مرز با شارش خارجی
Lipschitz continuous boundary	مرز پیوسته لیب-شیتس
rectangle	مستطیل
weak derivative	مشتق ضعیف
transport equation	معادله انتقال
Boltzmann equation	معادله بولتزمن
kinetic equation	معادله جنبشی
governing equation	معادله حاکم
Fermi-Fokker-Planck equation	معادله فرمی-فوکر-پلانک
	معادله تشعشع
monoenergetic model equation	معادله تک‌انرژی

positive definite	معین مثبت
negative definite	معین منفی
space variable	مکان
mean free path	میانگین مسیر برخورد
local	موضعی
Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی-شوارتز
triangle inequality	نامساوی مثلثی
inverse inequality	نامساوی معکوس
Holder inequality	نامساوی هولدر
invariant	ناوردا
node	نقطه گره‌ای
affine map	نگاشت آفین
positive semi-definite	نیمه-معین مثبت
negative semi-definite	نیمه-منفی معین
isothermal	هم‌دما
homogeneous	همگن
regularity	همواری
edge	یال
ion	یون

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

absolute Maxwellian distribution	توزیع ماکسولین مطلق
absorption	جذب
affine map	نگاشت آفین
angular flux	شار زاویه‌ای
astrophysics	ستاره‌شناسی
basis function	تابع پایه‌ای
Bhatnagar-Gross-Krook	بهتنگر-گراس-کروک
bilinear form	صورت دوخطی
Boltzmann equation	معادله بولتزمن
bulk velocity	سرعت حجمی
Cauchy sequence	دنباله کشی
Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی-شوارتز
channel	تونل
charged particle	ذره باردار
circle	دایره
coercive	تراکم‌پذیز
collision frequency	فرکانس برخورد
collision operator	عملگر برخورد
conforming	سازگار
constant	ثابت
convection term	جمله انتقال
cosmic rays	تشعشعات کهکشانی
Couette flow	جریان کوئت
degree	درجه
density	چگالی

differential cross-section	سطح مقطع دیفرانسیلی
differential operator	عملگر دیفرانسیلی
diffusion term	جمله پخش
direct method	روش مستقیم
discontinuous function	تابع ناپیوسته
discontinuous Galerkin method	روش گالرکین ناپیوسته
discontinuity scaling function	تابع مقیاس ناپیوستگی
discrete velocity model	مدل گسسته قائم
discretization	گسسته‌سازی
distribution	توزیع
divergence	دیورژانس
domain	دامنه
edge	یال
electromechanic	الکترومکانیک
electron	الکترون
element	المان
elliptic	بیضوی
error estimate	تخمین خطا
Fermi-Fokker-Planck equation	معادله فرمی-فوکر-پلانک
finite difference method	روش تفاضلات متناهی
finite element	اجزای متناهی
flow of gas	جریان گاز
Galilean transform	تبدیل گالیه
governing equation	معادله حاکم
gradient vector	بردار گرادیان
Green's formula	فرمول گرین
hanging node	گره معلق
Hermite polynomial	چندجمله‌ای هرمیت
Hilbert space	فضای هیلبرت
Holder inequality	نامساوی هولدر
homogeneous	همگن
inflow boundary condition	شرط مرزی شارش داخلی

inner product	ضرب داخلی
integration by parts	انتگرال‌گیری جزء به جزء
interpolation	درونیابی
invariant	ناوردا
inverse inequality	نامساوی معکوس
ion	یون
isomorphism	ایزومورفیسم
isothermal	هم‌دما
iterative method	روش تکراری
jump	جهش
kernel space	فضای پوچ
kinetic equation	معادله جنبشی
Knudsen number	عدد نادسون
Laplace operator	عملگر لاپلاس
Legendre polynomial	چندجمله‌ای لژاندر
linear form	الگوی خطی
linear operator	عملگر خطی
linearization	خطی‌سازی
Lipschitz continuous boundary	مرز پیوسته لیپ-شیتس
local	موضعی
local error estimate	تخمین خطای موضعی
mass	جرم
mass flow rate	آهنگ جریان ماده
material science	علم مواد
Maxwellian distribution	توزیع ماکسولین
mean free path	میانگین مسیر برخورد
mesh	شبهه
microturbine	ماکروتوربین
mixture	مخلوط
monoenergetic model equation	معادله تک‌انرژی
nanotechnology	فن‌آوری نانو
nearly-continuum flow	جریان مشابه جریان پیوسته

negative definite	منفی معین
negative semi-definite	نیمه-منفی معین
node	نقطه گره‌ای
positive definite	معین مثبت
optimal	بهینه
orthogonal	متعامد
orthogonal projection	تصویر قائم
outflow boundary	مرز با شارش خارجی
partition	افراز
piecewise polynomial	چندجمله‌ای قطعه‌ای
Poiseuille flow	جریان پوازوی
polar coordinate	مختصات قطبی
polyatomic gas	گاز چنداتمی
positive semi-definite	نیمه-معین مثبت
projection	تصویر
proton	پروتون
quadrature formula	گیری عددی روش انتگرال
radial	شعاعی
radiation	تابش
radiation therapy	رادیوتراپی
rarefaction parameter	پارامتر ترقیق
Rayleigh quotient	خارج قسمت ریلی
rectangle	مستطیل
reference element	المان مرجع
regular triangulation	افراز منظم
regularity	همواری
residual	باقیمانده
scattering angle	زاویه تشعشع
slab	قطعه
space variable	مکان
Sobolev space	فضای سوبولف
stabilizer	پایدارساز

standard Galerkin method	روش متعارف گالرکین
streamline diffusion method	روش پخش در مسیر جریان
successive overrelaxation method	روش SOR
symmetric	متقارن
test function	تابع تقریب
trace theorem	قضیه اثر
transitional flow	جریان تبدیل
transport equation	معادله انتقال
trial function	تابع آزمون
triangle	مثلث
triangle inequality	نامساوی مثلثی
triangulation	مثلث‌بندی
vector space	فضای برداری
velocity domain	فضای سرعت
weak derivative	مشتق ضعیف
weak form	صورت ضعیف

Abstract

The Fermi equation has diverse applications in different fields of science. This equation can be driven as an asymptotic limit of Boltzmann equation. This equation is degenerate in both convection and diffusion in the sense that drift and diffusion are taking place in, physically, different domains. Besides the problem is convection dominated since the diffusion term has a very small coefficient. The h and hp approximation of the streamline diffusion method and discontinuous Galerkin designed for the finite element analysis of this hyperbolic problem. We show that optimal convergence can be achieved subject to the regularity of the solution.

In the second part of the current thesis, flow of rarified gas through a channel with arbitrary cross section which is governed by the Boltzmann equation is studied. Since the numerical effort for the numerical solution of Boltzmann equation is computationally involved, due to flow conditions, certain linearization of the governing kinetic equation are applied to reduce the number of space and velocity coordinates. The discrete velocity and streamline diffusion finite element method are combined to yield a numerical scheme. For this method, we derive stability and optimal error estimates in the L_2 norm. The optimality is due to maximal regularity of the exact solution of the corresponding hyperbolic pde. The potential of the proposed method is illustrated through implementing some numerical examples.

Keywords: Fermi equation; particle beam; rarefied gas; linearized BGK model; streamline diffusion; discontinuous Galerkin; discrete velocity; stability; convergence



Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE
DEGREE OF

Doctor of Philosophy in Mathematics

**The Streamline Diffusion and Discontinuous
Galerkin Methods for Linearized Boltzmann
Equations**

supervisors

*Doctor Reza Mokhtari
Professor Mohammad Asadzadeh*

by

Ehsan Kazemi

2015