1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

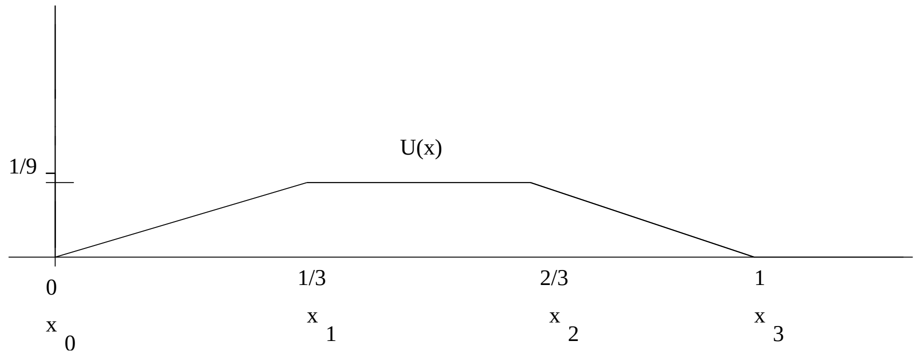
$$-u'' = 1, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Lös ekvationen analytiskt.
(b) Dela in intervallet $[0,1]$ i tre delintervall och beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen U.

Lösning: (a) Vi har att

$$\begin{aligned} &-u''(x) = 1 \Longrightarrow u'(x) = -x + C \Longrightarrow u(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + Cx. \\ &u(1) = 0 \Longrightarrow -\tfrac{1}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \underline{u(x) = \tfrac{1}{2}x(1-x)}. \end{aligned}$$

(b) Med dem givna homogena randdata och partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$, har vi



med endast två bas funktioner:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3, \\ 3(2/3 - x), & 1/3 \le x \le 2/3, \end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 3(x - 1/3), & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 3(1-x), & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

För styckvis linjära finit element lösningen gäller

$$\begin{aligned} U(x) &= U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x) = u(x_1)\varphi_1(x) + u(x_2)\varphi_2(x) = \\ &= \frac{1}{9}\Big(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\Big). \end{aligned}$$

Insättningen av $\varphi_i,\ i = 1,2$ ger

$$U(x) = \begin{cases} x/3, & 0 \le x \le 1/3, \\ (2/3 - x)/3 + (x - 1/3)/3 = 1/9, & 1/3 \le x \le 2/3, \\ (1-x)/3, & 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

2. Visa en a priori feluppskattning för en styckvis linjär FEM för problemet

$$-u'' + u = f, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Lösning: Varitionsformuleringen blir (efter partiell integration)

$$(VF) \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Låt nu

$$V_h^0 =: \{v : \ v \text{ linjär, styckvis kontinuerlig och } v(0) = v(1) = 0\} \subset H_0^1.$$

Finit element formulering: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$(FEM) \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 Uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Nu (VF)-(FEM) ger Galerkin ortogonalitet:

$$(G\perp) \qquad \int_0^1 (u-U)'v'\,dx + \int_0^1 (u-U)v\,dx = 0, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Relevant norm för uppskattning av felet $e = u - U$, blir då energinormen:

$$\|e\|_E := \Big(\int_0^1 (e')^2\,dx + \int_0^1 e^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Då har vi med $v \in V_h^0$ att

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 =& \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v+v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v+v-U)\,dx \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
&+ \int_0^1 (u-U)'(v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(v-U)\,dx \{\text{denna rad =0 pga } G\perp\} \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
\le& \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \le \|(u-U)'\|\|(u-v)'\| + \|u-U\|\|u-v\| \\
\le& \frac{1}{2}\|(u-U)'\|^2 + \frac{1}{2}\|(u-v)'\|^2 + \frac{1}{2}\|u-U\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

Alltså

$$\|e\|_E^2 = \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \le \|(u-v)'\|^2 + \|u-v\|^2, \quad \forall v \in V_h^0.$$

Välj nu $v = \pi_h u$. $\pi_h u$ är den linjära interpolanten av u. Genom att använda feluppskattningar för interpolanten får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &\le \|(u-\pi_h u)'\|^2 + \|u-\pi_h u\|^2 \\
&\le C_i^2\|hu''\|^2 + C_i^2\|hu'\|^2 \le \Big(C_i\|hu''\| + C_i\|hu'\|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Alltså vi har följande a priori feluppskattning:

$$\|e\|_E \le C_i\Big(\|hu''\| + \|hu'\|\Big) = \mathcal{O}(h).$$

3. Betrakta Dirichlets problem för Poissonekvationen, $-\Delta u = f$, i Ω, $u = 0$, på $\partial\Omega$, där Ω är ett polygonområde i $\mathbb{R}^2$. Visa stabilitetsuppskattningen

$$\|\nabla u\| \leq C_\Omega \|f\|.$$

Lösning: Se PDE Lecture Notes Chapter 15.

4. Lös med Laplacetransformer integralekvationen

$$y'(t) + 2y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 3, \quad y(0) = 2.$$

Lösning: Laplacetransformer av dem aktuella uttrycken i integralekvationen är

$$y(t) \supset Y(s), \quad y'(t) \supset sY(s) - y(0) = sY(s) - 2, \quad \int_0^t y(\tau)d\tau \supset \frac{Y(s)}{s}.$$

Vi tillämpar dessa formler och Laplacetransformerar integralekvationen:

$$sY(s) - 2 + 2Y(s) + \frac{5}{s}Y(s) = \frac{3}{s} \Longrightarrow (s^2 + 2s + 5)Y(s) = 2s + 3.$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2+4} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

Nu invers Laplacetransform ger

$$y(t) = e^{-t}\Big(2\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big).$$

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < 1, \qquad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = x(1-x). & \end{cases}$$

Lösning: Insättning av variabelseparationen $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i differentialekvationen ger att (se Lecture Notes in Fourier analys: Variabelseparation; Exempel 1 med $L = 1$ och $f(x) = x(1-x)$)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = \lambda < 0.$$

med randdata får vi $\lambda = -(n\pi)^2 < 0,\ \ n = 1, 2, \dots$ och

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin(n\pi x), \quad T(t) = T_n = T(0)e^{-kn^2\pi^2 t}.$$

Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-kn^2\pi^2 t} \sin n\pi x,$$

med

$$\begin{aligned} C_n &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx = [PI] \\ &= 2\Big[x(1-x)\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 (1-2x)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx \\ &= 2\Big[(1-2x)\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 (-2)\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} \\ &= 4\Big[\frac{-\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3}\Big]_0^1 = 4\frac{[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3}. \end{aligned}$$

Alltså endast udda n ger koefficienter som är skilda från noll, och vi får lösningen:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-k(2n+1)^2\pi^2 t} \sin{(2n+1)\pi x}.$$

6. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns en interpolationskonstant C_i, oberoende av f och intervallet (a,b), så att för linjär interpolation $\Pi_1 f$ har vi följande feluppskattning

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \le C_i (b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)}.$$

Lösning: See PDE Lecture Notes Chapter 5

7. Visa, att om funktionen f är 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig på $[-\pi,\pi]$ med de komplexa Fourierkoefficienterna C_n, så gäller Bessels olikhet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Lösning: See Lecture Notes in Fourier Analys; Fourierserier.