BERÄKNINGSMATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer
Telefon: Fredrik Bengzon, ankn. 5344, 0740-459022
2003–10–25 kl. 8.45-13.45

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$-u'' = 1, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Lös ekvationen analytiskt.

(b) Dela in intervallet $[0,1]$ i tre delintervall och beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen U.

2. Visa en a priori feluppskattning för en styckvis linjär FEM för problemet

$$-u'' + u = f, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

3. Betrakta Dirichlets problem för Poissonekvationen, $-\Delta u = f$, i Ω, $u = 0$, på $\partial\Omega$, där Ω är ett polygonområde i $\mathbb{R}^2$. Visa stabilitetsuppskattningen

$$\|\nabla u\| \leq C_\Omega \|f\|.$$

4. Lös med Laplacetransformer integralekvationen

$$y'(t) + 2y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 3, \quad y(0) = 2.$$

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < 1, \qquad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = x(1-x). & \end{cases}$$

6. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns en interpolationskonstant C_i, oberoende av f och intervallet (a,b), så att för linjär interpolation $\Pi_1 f$ har vi följande feluppskattning

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \leq C_i(b-a)^2||f''||_{L_\infty(a,b)}.$$

7. Visa, att om funktionen f är 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig på $[-\pi,\pi]$ med de komplexa Fourierkoefficienterna C_n, så gäller Bessels olikhet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

MA