TMA682, Teorifrågot inför tentamen

1. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns interpolationskonstant C_i, oberoede av f och intervallet (a,b), så att för linjär interpolantion $\Pi_1 f$ har vi följande feluppskattningen:

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \leq C_i (b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)}$$

2. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad\qquad\qquad (RV). \end{cases}$$

Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (PDE)+(RV) i energinormen: Dvs visa att

$$||(u-U)'||_a \leq ||(u-v)'||_a \quad \forall v \in V_h^0, \qquad ||w||_a = \Big(\int_0^1 a w^2\,dx\Big)^{1/2},$$

med $V_h^0 :=$ {styckvis linjära kontinuerliga v med $\;v(0) = v(1) = 0$}.

3. Betrakta partiella differentialekvationen

$$-\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Visa att det finns interpolationskonstant C_i, som beror endast av a, så att för finitelement lösningen U gäller att

$$||(u-U)'||_a \leq C_i ||h\mathcal{R}(U)||_{a^{-1}}, \qquad \mathcal{R}(U) = (aU')' + f \quad \text{är residulen.}$$

4. Bevisa Green's formel: Dvs visa att om $u \in C^2(\Omega)$ och $v \in C^1(\Omega)$, så

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v\, dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)\, v\, ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$

där n är utåtriktade enhetsnormalen på $\partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

5. Betrakta 2-dimensionella stationär värmeledningsekvationen

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \Omega, \qquad u = 0 \text{ på } \Gamma = \partial\Omega.$$

Visa L_2-stabilitetsuppskattningen: $\quad ||\nabla u|| \leq C_\Omega ||f||.$

6. Visa för 2-dimensionella tidsoberoende värmeledningsekvationen

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \Omega, \qquad u = 0 \text{ på } \Gamma = \partial\Omega,$$

om $U \in V_h^0 := \{$styckvis linjära kontinuerliga v med $v = 0$ på $\Gamma\}$, är en finitelement lösning så är,

$$||\nabla(u - U)|| \leq C||hD^2 u||.$$

7. Antag att $f(t) = 0,\ g(t) = 0$ för $t < 0$, definiera

$$(f * g)(t) = \Big(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\Big)\theta(t).$$

Visa att $L[f * g](s) = F(s)G(s)$, $\qquad$ (faltningstransformen).

8. Visa att om funktionen f är 2π-periodisk och Riemann integrerbar på $[-\pi, \pi]$. C_n är de komplexa Fourierkoefficienterna till f. Då är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta, \qquad \text{(Bessel's olikhet).}$$

9. Antag f är 2π-periodisk kontinuerlig, f' är styckvis kontinuerlig. Visa att om $a_n,\ b_n,\ C_n$ är $\mathcal{F}$-koeff. för f, och $a_n',\ b_n'$ och C_n' $\mathcal{F}$-koeff. för f'. Då är

$$a_n' = nb_n, \qquad b_n' = -na_n, \qquad C_n' = inC_n.$$