Inlämningsuppgift 3, TMA862

Lös 4 av följande 5 problem med de givna Fouriermetoder

1. Använd Laplacetransformen och lös följande differentialekvation:

$$\begin{cases} u_x + x u_t = 0, & & x > 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, & u(0,t) = e^t, & t > 0. \end{cases}$$

2. Använd Laplacetransformen och lös integralekvationen:

$$u'(t) + 2u(t) + \int_0^t e^{2(\tau - t)} u(\tau)\, d\tau = (t+2)e^{-t}, \quad t > 0, \qquad u(0) = 0.$$

3. Lös den inhomogena vågekvationen med variabelseparationsteknik

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} - 1, & t > 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, & u(1,t) = 2, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

4. Låt f vara 2π-periodisk med $f(x) = x^2$ för $0 < x < 2\pi$. Utveckla $f(x)$ i trigonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Funktionen $f(x) = |x|$ är 2-periodisk. Bestäm, i form av trigonometrisk Fourierserie, en 2-periodisk lösning till differentialekvationen:

$$y'' + y = f(x).$$