BERÄKNINGSMATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer
Telefon: Fredrik Bengzon, ankn. 5344, 0740-459022
2003–10–25 kl. 8.45-13.45

Tillämpad Matematik TMA205/225, Gamla kursen 4 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$-u'' = 1, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Lös ekvationen analytiskt.

(b) Dela in intervallet $[0,1]$ i tre delintervall och beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen U.

2. Visa en a priori feluppskattning för en styckvis linjär FEM för problemet

$$-u'' + u = f, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

3. Antag att $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Betrakta problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{i } \Omega, \\ \frac{u}{\partial n} + u = g, & \text{på } \Gamma =: \partial\Omega. \end{cases}$$

Visa L_2 stabilitetsuppskattningen

$$\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|_{L_2(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}\|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}.$$

4. Betrakta en-dimensionell värmeledning

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1, & \end{cases}$$

a) Visa att $\|u(\cdot,t)\|$ och $\|u_x(\cdot,t)\|$ ökar inte med tiden.

b) Visa att $\|u_x(\cdot,t)\| \to 0$, då $t \to \infty$.

c) Ge fysikalisk tolkning av a) och b).

5. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns en interpolationskonstant C_i, oberoende av f och intervallet (a,b), så att för linjär interpolation $\Pi_1 f$ har vi följande feluppskattning

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \leq C_i (b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)}.$$

6. Betrakta Dirichlets problem för Poissonekvationen, $-\Delta u = f$, i Ω, $u = 0$, på $\partial\Omega$, där Ω är ett polygonområde i $\mathbb{R}^2$. Visa stabilitetsuppskattningen

$$\|\nabla u\| \leq C_\Omega \|f\|.$$

MA