Lösningar TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng, 05-08-24

1. Antag att $f(t) = 0$ för $t < 0$ och dess Laplacetransform är $F(s) = \frac{2s^2+s+6}{s(s+2)}$. Finn $f(t)$.

Lösning: Partialbråksuppdelning (använd handpåläggningsmetoden!) ger

$$\begin{aligned} \frac{2s^2+s+6}{s(s+2)} &:= A + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+2} \\ &= 2 + \frac{3}{s} - \frac{C}{6+2} \subset 2\delta(t) + 3 - 6e^{-2t}. \end{aligned}$$

Förutsatt att $f(t)$ är *kontinuerlig* föt $t \geq 0$, med $f(t) = 0$ för $t < 0$ får vi

$$\text{Svar} \qquad f(t) = 2\delta(t) + \{3 - 6e^{-2t}\}\theta(t).$$

2. $\prod_1 f$ är den linjära interpolanten av f i intervallet (a, b). Visa att:

$$||f - \Pi_1 f||_{L_2(a,b)} \leq (b-a)^2 ||f||_{L_2(a,b)},$$

då

$$||v||_{L_2(a,b)} = \Big(\int_a^b v(x)^2\, dx \Big)^{1/2}.$$

Lösning: Låt $\lambda_0(x) = \frac{\xi_1 - x}{\xi_1 - x_0}$ och $\lambda_1(x) = \frac{x - \xi_0}{\xi_1 - x_0}$ vara de två linjära basfunktioner för interpolationen. Då, med integralformen av, Taylorutveckling får vi att (see boken)

$$\begin{cases} f(\xi_0) &= f(x) + f'(x)(\xi_0 - x) + \int_x^{\xi_0} (\xi_0 - y) f''(y)\, dy, \\ f(\xi_1) &= f(x) + f'(x)(\xi_1 - x) + \int_x^{\xi_1} (\xi_1 - y) f''(y)\, dy, \end{cases}$$

Detta innbär att

$$\begin{aligned} \Pi_1 f(x) &= f(\xi_0)\lambda_0(x) + f(\xi_1)\lambda_1(x) \\ &= f(x) + \lambda_0(x) \int_x^{\xi_0} (\xi_0 - y) f''(y)\, dy + \lambda_1(x) \int_x^{\xi_1} (\xi_1 - y) f''(y)\, dy \end{aligned}$$

och genom att använda triangle olikheten får vi

$$\begin{aligned} |f(x) - \Pi_1 f(x)| &= \Big| \lambda_0(x) \int_x^{\xi_0} (\xi_0 - y) f''(y)\, dy + \lambda_1(x) \int_x^{\xi_1} (\xi_1 - y) f''(y)\, dy \Big| \\ &\leq |\lambda_0(x)| \Big| \int_x^{\xi_0} (\xi_0 - y) f''(y)\, dy \Big| + |\lambda_1(x)| \Big| \int_x^{\xi_1} (\xi_1 - y) f''(y)\, dy \Big| \\ &\leq |\lambda_0(x)| \int_x^{\xi_0} |\xi_0 - y||f''(y)|\, dy + |\lambda_1(x)| \int_x^{\xi_1} |\xi_1 - y||f''(y)|\, dy \\ &\leq |\lambda_0(x)| \int_x^{\xi_0} (b-a)|f''(y)|\, dy + |\lambda_1(x)| \int_x^{\xi_1} (b-a)|f''(y)|\, dy \\ &\leq (b-a)\Big(|\lambda_0(x)| + |\lambda_1(x)| \Big) \int_a^b |f''(y)|\, dy \\ &= (b-a)\Big(\lambda_0(x) + \lambda_1(x) \Big) \int_a^b |f''(y)|\, dy = (b-a) \int_a^b |f''(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Genom att använda (upprepade ggr) Cauchy's olikhet får vi då

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-\Pi_1 f(x)|^2 dx &\leq \int_a^b (b-a)^2\Big(\int_a^b |f''(y)|\,dy\Big)^2 dx \\ &= (b-a)^3\Big(\int_a^b |f''(y)|\,dy\Big)^2 = (b-a)^3\Big(\int_a^b 1\cdot|f''(y)|\,dy\Big)^2 \\ &\leq (b-a)^3\int_a^b 1^2\,dy\cdot\int_a^b |f''(y)|^2\,dy \\ &= (b-a)^4\int_a^b |f''(y)|^2\,dy.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\Big(\int_a^b |f(x)-\Pi_1 f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \leq (b-a)^2\Big(\int_a^b |f''(y)|^2\,dy\Big)^{1/2},$$

och vi får

$$||f-\Pi_1 f||_{L_2(a,b)} \leq (b-a)^2||f''||_{L_2(a,b)}.$$

3. (a) Antag att *drivfunktionen* $f(t)$-är 2π periodisk och bestäm allmänna lösningen $y(t) := y_h(t)+y_p(t)$ till differentialekvationen

(1) $$y''(t)+4y(t)=f(t).$$

(b) $y_p(t)$:s Fourierkoefficinter beror av *en del av* f:s komplexa Fourierkoefficienter. Vilka?

Lösning: a) $y_h(t)$: homogenlösningen, är allmän lösning till motsvarande homogen ekvation: $y''(t)+4y(t)=0$, där karakteristiska ekvationen $r^2+4=0$ har rötterna $r=\pm 2i$:

(2) $$y_h(t)=A_1e^{i2t}+A_2e^{-i2t}.$$

Fourierutvecklingen (observera att $\Omega=2\pi/T=2\pi/2\pi=1$) för f är:

(3) $$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_ne^{int}.$$

Vi söker partikulärlösning $y_p(t)$ till ekvationen (1), som är periodisk med samma period 2π som $f(t)$ och ansätter $y_p(t)$ i form av Fourierserien

(4) $$y_p(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}y_ne^{int},$$

med tills vidare okända Fourierkoefficienter y_n. De kan beräknas genom insättning av (3) och (4) i ekvationen (1). Vi får

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-n^2+4)y_ne^{int}=\sum_{-\infty}^{\infty}C_ne^{int},$$

som är uppfyllt om och endast om

(5) $$(-n^2+4)y_n=C_n, \qquad \text{för “alla”}\, n.$$

Ur (5) kan vi dra två slutsatser: “dels” (för $n\neq\pm 2$) att

(6) $$y_n=\frac{C_n}{4-n^2}, \qquad (n\neq\pm 2),$$

“dels” (för $n=\pm 2$) att

(7) $$C_2=C_{-2}=0.$$

Villkoret (7) innebär att Fourierutvecklingen av driftekvationen $f(t)$ "inte" får innehålla svängningarna e^{2it} och e^{-2it}. Observera att dessa svängningar enligt (2) ingår i homogenlösningen $y_h(t)$, dvs utgör "egensvängningar" till det dynamiska system, som beskrivs av eqrefuppg21. Om villkoret $C_2 = C_{-2} = 0$ är uppfyllt, så är

$$\text{Svar} \qquad y(t) = A_1 e^{i2t} + A_2 e^{-i2t} + \sum_{n \neq \pm 2} \frac{C_n}{4 - n^2} e^{int},$$

allmän lösning till (1).

4. Betrakta randvärdesproblemet:

$$(8) \qquad -u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = u'(1) = 1.$$

Låt $x_0 = 0,\ x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$ vara en partition av intervallet $[0,1]$ och $V_h,\ (h = 1/2)$ motsvarande finitelement funktionsrum bestående av styckvis kontinuerlig, linjära funktioner.

(a) Bestäm den exakta lösningen till (8) .
(b) Beräkna, om möjligt, en finitelement approximation $U \in V_h$ av u.
(c) Förklara värför problemet i (8) kallas *illa ställd*?

Lösning: (a) Med upprep. integration har vi att:

$$-u''(x) = 2 \Longrightarrow u''(x) = -2 \Longrightarrow u'(x) = -2x + A \Longrightarrow u(x) = -x^2 + Ax + B,$$

där konstanterna A och B bestäms ur rand data:

$$(9) \qquad \begin{cases} u'(0) & = -0 + A = 1 \Longrightarrow A = 1 \\ u'(1) & = -2 + A = 1 \Longrightarrow A = 3. \end{cases}$$

Dvs, (8) saknar lösning.
(b)-(c) Vi använder variationsformulering:

$$(10) \qquad \int_0^1 -u''v\,dx = \int_0^1 2 \cdot v\,dx.$$

Partiell integration ger

$$(11) \qquad \begin{aligned} VL = [PI] &= \Big[-u'v \Big]_0^1 - \int_0^1 -u'v\,dx \\ & - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx \\ &= -v(1) + v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx = HL. \end{aligned}$$

Variationsformuleringen blir då: sök $u \in V := \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty\}$ så att

$$(12) \qquad \int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V$$

Här introduceras rummet

$$V_h = \{\text{alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på } T_h\}$$

med bas funktionerna:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -2x + 1, & 0 < x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < 1, \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2, \\ -2x + 2, & 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/2, \\ 2x - 1, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

v.g.v.

Finitelementmetoden (FEM): sök $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 U'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V_h. \tag{13}$$

Ansätt $U = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2$ då är $U' = \xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2'$ och insättning i (FEM) (13) med $v = \varphi_i,\ i = 0,1,2$ ger

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_0'\,dx &= 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1)\\
\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_1'\,dx &= 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1)\\
\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_2'\,dx &= 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1)
\end{aligned} \tag{14}$$

Styvhetsmatrisen blir (värför? räkna själv!)

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0\\ -2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Det leder till ett linjärt ekvationssystem $A\xi = b$ för den okända vektorn $\xi = (\xi_0,\, xi_1,\, \xi_2)$ med högerled:

$$b = \begin{pmatrix} 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) = 1/2 - 1 + 0\\ 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) = 1 - 0 + 0\\ 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1) = 1/2 - 0 + 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\\ 1\\ 3/2\end{pmatrix}.$$

Observera att A är inte inverterbar. Eftersom det inte finns några exakta lösningar kan man inte heller förvänta sig att det approximativa metoden kan ge några lösningar. Alltså problemet är illa ställd från början.

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena värmeledningsproblem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0,\\ u(0,t) = 1, & u(\pi,t) = -1, & t > 0,\\ u(x,0) = \cos x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lösning: Vi homogeniserar ekvationen genom att sätta $v = u - s$, där skall s, satisfirar den stationära versionen av differentialekvationen med den inhomogena randvillkoren:

$$s''(x) = 0, \quad s(0) = 0, \quad s(\pi) = -1.$$

Vi har att $s(x) = Ax + B$, där $s(0) = 1$, ger $B = 1$, och $s(\pi) = -1$, ger $A = -2/\pi$. Alltså

$$s(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

Insättning i differentialekvation ger en homogen ekvation för v:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0,\\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, & & t > 0,\\ v(x,0) = \cos x + 2\frac{x}{\pi} - 1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Vi bestämmer v med variabelseparationstekniken: Sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Då ger DE för v $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$, och vi får 2 separata ODE, en för X och en för T:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \qquad \text{och} \quad T' = \lambda T.$$

För T får vi lösningen

$$T(t) = T(0)e^{\lambda t}.$$

För att bestämma X har vi följande 3 alternativ:

Fall I. $\lambda = 0$. Då är $X(x) = Ax + B$. $X(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ och $X(\pi) = 0 \Longrightarrow A = 0$. Detta innebär att $X(x) \equiv 0$, som är en mosägelse eftersom vi söker icke-triviala (noll-skilda) lösningar.

Fall II. $\lambda > 0$. Då är $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$.

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Longrightarrow & A + B = 0 \\ X(\pi) = 0 \Longrightarrow & Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \Longrightarrow \quad Ae^{\sqrt{\lambda}L}\Big(1 - e^{-2\sqrt{\lambda}L}\Big) = 0. \end{cases}$$

Allså $A = B = 0$ även i detta fall som ger en motsägelse som i Fall I. Värför endast $\lambda < 0$ kan ge icke-trivialla lösningar:

Fall III. $\lambda < 0$. Då gäller $X(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Longrightarrow & B = 0 \\ X(\pi) = 0 \Longrightarrow & = A\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 (A \neq 0) \Longrightarrow \quad \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Allså har vi egenfunktioner och egenvärdena:

$$X_n(x) = \sin nx, \qquad \lambda = -n^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposditionen ger

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2} \sin nx.$$

För att bestämma C_n har vi att

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1$$

Alltså är C_n Fourier $\sin nx$-koefficienterna för $\cos x + \frac{2x}{\pi} - 1$.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos x + \frac{2x}{\pi} - 1) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[(\cos x + \frac{2x}{\pi} - 1)\frac{-\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} (\frac{2}{\pi} - \sin x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n}(\frac{2}{\pi} - \sin x)\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \sin nx \cos x \, dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\Big) \, dx \qquad (15) \\ &= \frac{-1}{n^2\pi}\Big[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{n^2\pi}\Big[(-1)^{n+1}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\Big) - \Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\Big)\Big] \\ &= -\Big((-1)^{(n+1)} - 1\Big)\frac{2}{n(n^2-1)\pi}. \end{aligned}$$

Slutligen får vi lösningen för den ursprungliga, inhomogena differentialekvationen som:

$$\text{Svar} \qquad u(x,t) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \Big((-1)^{(n+1)} - 1\Big)\frac{2}{n(n^2-1)\pi} e^{-n^2 t} \sin nx.$$

6. och **7.**

Lösning: See föreläsningsanteckningar.

MA