TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 p, 06-01-09

1. Lös följande integro-differentialekvation med Laplacetransformation:

$$y''(t) - y'(t) + y(t) - \int_0^t y(\tau)\, d\tau = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Lösning: Laplacetransformering ger

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) + Y(s) - \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Gemon att ersätta $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ får vi

$$\Big(s^2 - s + 1 - \frac{1}{s}\Big)Y(s) = \frac{1}{s} - 1 = \frac{1-s}{s}.$$

Alltså

$$Big(s^3 - s^2 + s - 1\Big)Y(s) = 1 - s \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1-s}{s^3 - s^2 + s - 1}.$$

Men eftersom

$$s^3 - s^2 + s - 1 = s^2(s-1) + (s-1) = (s^2+1)(s-1),$$

vi kan skriva

$$Y(s) = \frac{1-s}{(s^2+1)(s-1)} = -\frac{1}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad y(t) = -\sin(t).$$

2. Bestäm den linjära interpolanten av

$$f(x) = \frac{1}{\pi^3}x^3 + 2\sin x, \qquad -\pi \le x \le \pi,$$

där intervallet $[-\pi, \pi]$ delas in i 4 lika delintervall.

Lösning: f är udda och vi har

$$f(-\pi) = -1, \quad f(-\pi/2) = -17/8, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi/2) = 17/8, \quad f(\pi) = 1.$$

Varför är

$$\Pi_1 f(x) = \begin{cases} -\frac{9}{4\pi}(x+\pi) - 1, & -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}, \\ +\frac{17}{4\pi}x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{9}{4\pi}(x-\pi) + 1, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

3. Funktionerna $f(x) = |x|,\ |x| < 2$ och $g(x) = |x-1|,\ -1 < x < 3$ är periodiska, båda med period 4.

(a) Det finns ett enkelt samband mellan $f(x)$ och $g(x)$. Vilket?

(b) Utveckla $f(x)$ i Fourierserier.

(c) Änvänd resultat från (a) och (b) för att Fourierutveckla $g(x)$.

Lösning: (a) Vi kan skriva $f(x-1) = |x-1|,\ |x-1| < 2$, dvs $-1 < x < 3$. Alltså

$$g(x) = f(x-1).$$

(b) $f(x)$ är jämn $\Longrightarrow$ $b_n = 0$. Vidare har vi att perioden $T = 4$ och därmed frekvensen $\Omega = 2\pi/T$ $\Longrightarrow$ $\Omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Ersättning i

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\, \cos n\Omega x\, dx,$$

ger att

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{4}{4}\int_0^2 x\,dt = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2.$$

För $n \neq 0$ gäller

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{4}\int_0^2 x\,\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx \\ &= x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx \\ &= 0 + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\Big(\cos n\pi - 1\Big) \\ &= \begin{cases} -\frac{8}{n^2\pi^2}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega x + b_n \sin n\Omega x\Big),$$

leder till (obs! att för $n = 2k+1$ startvärden: $n = 1$ motsvarar $k = 0$)

$$f(x) \sim 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}x.$$

(c) Genom att använda resultat i (a) och (b) vi har att

$$\begin{aligned} g(x) = f(x-1) &\sim 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}(x-1) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos[(2k+1)\frac{\pi}{2}x - (k+\frac{1}{2})\pi] \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}x. \end{aligned}$$

4. Bestäm en a priori feluppskattning för

$$\begin{cases} -u'' + bu' + u = f, & 0 < x < 1, \qquad b \geq 0 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

i energinormen $||e||_E^2 = ||e||^2 + ||e'||^2$. För vilka b värden blir felet minimal?

Lösning: We multiply the differential equation by a test function $v \in H_0^1(I)$, $I = (0,1)$ and integrate over I. Using partial integration and the boundary conditions we get the following *variational problem*: Find $u \in H_0^1(I)$ such that

$$(1) \qquad \int_I (u'v' + bu'v + uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

A *Finite Element Method* with $cG(1)$ reads as followa: Find $U \in V_h^0$ such that

$$(2) \qquad \int_I (U'v' + bU'v + 2Uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I),$$

where

$V_h^0 = \{v : v \text{ is piecewise linear and continuous in a partition of } I,\ v(0) = v(1) = 0\}$.

Now let $e = u - U$, then (1)-(2) gives that

$$(3) \qquad \int_I (e'v' + be'v + ev) = 0, \quad \forall v \in V_h^0.$$

A priori error estimate: We note that using $e(0) = e(1) = 0$, we get

$$\int_I e'e = \int_I \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^2) = (e^2)|_0^1 = 0. \tag{4}$$

Thus we may write

$$\begin{aligned}
\|e\|_{H^1}^2 &= \int_I (e'e' + ee) = \int_I (e'e' + be'e + ee) \\
&= \int_I \Big(e'(u-U)' + be'(u-U) + e(u-U)\Big) = \{v = U - \pi_h u \text{ in}(3)\} \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u) + e(u-\pi_h u)\Big) \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + b\|u-\pi_h u\|\|e'\| + \|u-\pi_h u\|\|e\| \\
&\le \{\|u-\pi_h u\|_E + b\|u-\pi_h u\|\}\|e\|_{H^1}
\end{aligned}$$

this gives that

$$\|e\|_{H^1} \le (b+1)\|u-\pi_h u\|_E$$

(b) As we see this error is optimal if $b = 0$.

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena vågekvation:

$$\begin{cases}
u_{xx} = -1 + u_{tt}, & & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
u(0,t) = 0, & u(1,t) = 0, & t > 0, \\
u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1.
\end{cases}$$

Lösning. Sätt $u(x,t) = S(x) + w(x,t)$ med

$$S''(x) = -1, \quad S(0) = S(1) = 0.$$

Vi får att

$$S(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Då blir differentialekvationen för w:

$$\begin{cases}
w_{xx} = w_{tt}, & & 0 < x < 1, \\
w(0,t) = 0, & w(1,t) = 0, & t > 0, \\
w(x,0) = u(x,0) - S(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, & w_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1.
\end{cases}$$

Vi använder varibelseparationsteknik genom att i differetialekvationen för w sätta $w(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Vi får (efter division med $X(x)T(t) \neq 0$) att

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda < 0,$$

där $\lambda < 0$ är den alternativ som är konsistent med randdata. Alltså vi har att

$$X(x) = A\sin\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x,$$

där $X(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ medan $X(1) = 0 \Longrightarrow A\sin\sqrt{-\lambda} = 0$. Eftersom vi söker icke triviala lösningar är $A \neq 0$ och varför är egenvärden och egenfunktionerna

$$\sqrt{-\lambda} = n\pi \Longrightarrow \lambda = -n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n \ge 1.$$

På samma sätt har vi att

$$T_n(t) = P_n \sin n\pi t + Q_n \cos n\pi t,$$

och eftermsom $w_t(x,0) = 0 \Longrightarrow T_n'(t) = 0$ vi har att $P_n = 0$ och därmed

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\pi t \sin n\pi x.$$

För att bestämma Q_n vi sätter $t = 0$ och får

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin n\pi x. \tag{5}$$

Genom att multiplicera (5) med $\sin k\pi x$ och integrera över $(0,1)$ fås

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x)\sin k\pi x \, dx. \tag{6}$$

Nu har vi att vänster ledet (VL) i (6) är

$$VL = \begin{cases} \frac{1}{2}Q_n, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \tag{7}$$

medam höger ledet (HL) i (6) blir

$$\begin{aligned} HL &= \frac{1}{2}\Big[(x^2 - x)\frac{-1}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x-1)\frac{-1}{k\pi}\cos k\pi x\Big] \\ &= -\frac{1}{2}\Big[(2x-1)\frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big] \\ &= -\Big[\frac{1}{k^3\pi^3}\cos k\pi x\Big]\Big|_0^1 = -\frac{1}{k^3\pi^3}\Big((-1)^k - 1\Big) \end{aligned} \tag{8}$$

Alltså (8) ger att

$$HL = \begin{cases} \frac{2}{k^3\pi^3}, & k \text{ udda} \\ 0 & k \text{ jämn.} \end{cases} \tag{9}$$

Med identifiering av (VL) och (HL) får vi att

$$Q_n = \begin{cases} \frac{4}{k^3\pi^3}, & k \text{ udda} \\ 0 & k \text{ jämn.} \end{cases} \tag{10}$$

och slutligen har vi att

$$u(x,t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\cos(2n+1)\pi t \sin(2n+1)\pi x.$$

6. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsuppskattningar:

$$I. \quad \frac{d}{dt}||u||^2 + 2||u'||^2 = 0, \qquad II. \quad ||u(\cdot,t)|| \leq e^{-t}||u_0||.$$

7. Formulera och bevia *Riemann-Lebesgue* Lemma.

6. och **7.** See föreläsningsanteckningar.

MA