Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2006–10–28

Telefon: Elin Götmark: 0762-721860
Hjälpmedel: Endast utdelad tabell för Laplacetransformer. Kalkylator ej tillåten.

---

1. Lös följande begynnelsevärdesproblem med hjälp av Laplacetransformer:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

2. a) Bestäm den analytiska lösningen av den ordinära differetialekvationen

$$\dot{u}(t) - 2u(t) = 1 \quad 0 < t < 1, \qquad u(0) = 1.$$

b) Beräkna cG(2) lösningen (obs! $U = \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 \in \mathcal{P}^2(0,1),\ v \in [1,t] \subset \mathcal{P}^1(0,1)$).

3. a) Beräkna den trigonometriska Fourierserieutvecklingen till följande 2π-periodiska funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

b) Beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4. Beräkna den styckvis linjära finitelementlösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}u'' + u' - 3u = -1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = -1, \end{cases}$$

på en partition $\mathcal{T}_h : x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $(h = 1/2)$, av intervallet $[0,1]$.

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t - 1, & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1. & \end{cases}$$

6. a) Bevisa (MP) för Poissonekvationen: dvs att lösningen till

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(1) = 0,$$

minimerar energifunktionalen

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\, dx - \int_0^1 fv\, dx, \quad \forall v \in V = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}.$$

b) Bevisa att variationsformuleringen (VF) för ekvationen är ekvivalent med (MP).

7. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk, integrerbar funktion. Visa att om

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \qquad \text{så är} \qquad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

MA

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \end{aligned}$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
$\dfrac{t}{2b}\sin bt$	$\dfrac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\dfrac{1}{(s^2+b^2)^2}$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2006–10–28. Lösningar.

---

1. Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Insättning av begynnelsedata: $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ leder till

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) - s + 1 - 2 = \frac{1}{s} \iff [(s+1)^2 + 4]Y(s) = s + 1 + \frac{1}{s},$$

och därmed

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{s[(s+1)^2 + 4]} : I + II.$$

Inverstransformen för I kan skrivas direkt (se tabellen) som

$$\mathcal{L}^{-1}[I] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}\Big] = e^{-t}\cos 2t := y_1(t).$$

För II använder vi partialbråksuppdelning enligt följande:

$$II = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}.$$

Här ger [HP] $A = 1/5$. Genom identifiering av koefficienter får vi

$$\begin{array}{rccl} s^2: & A + B = 0 & \Longrightarrow & B = -1/5 \\ s: & 2A + C = 0 & \Longrightarrow & C = -2/5. \end{array}$$

Alltså

$$II = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{s + 2 = (s+1+1)}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{(s+1)^2 + 4},$$

med

$$\mathcal{L}^{-1}[II] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s[(s+1)^2 + 4]}\Big] = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin 2t := y_2(t).$$

Slutligen är lösningen

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin 2t = \frac{1}{10}\Big[2 + e^{-t}(8\cos 2t - \sin 2t)\Big].$$

2. a) Låt $A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \{a(s) = -2\} = \int_0^t -2\,dt = -2t$. Då är alltså integrerande faktorn $I.F. = e^{-2t}$ och exakta lösningen (samma som fundamentallösningen) är

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0)e^{-A(t)} + \int_0^t e^{-(A(t)-A(s))} f(s)\,ds \\ &= \{f(s) = 1\} = e^{2t} + \int_0^t e^{-(-2t+2s)}\,ds = e^{2t} + \int_0^t e^{2t-2s}\,ds \\ &= e^{2t} - \frac{1}{2}\Big[e^{2t-2s}\Big]_0^t = e^{2t} - \frac{1}{2}(1 - e^{2t}) = \frac{1}{2}(3e^{2t} - 1). \end{aligned}$$

b) Variationsformuleringen för detta problem är

$$(1) \qquad \int_0^1 \Big(\dot{U}(t) - 2U(t)\Big)v(t)\,dt = \int_0^1 v(t)\,dt, \qquad \forall v \in \mathcal{P}^1(0,1), \qquad \text{dvs för } v = 1, \text{och } v = t.$$

Med $U(0)=0$ får vi att $\xi_0=1$, $U(t)=1+\xi_1 t+\xi_2 t^2$ och $\dot U(t)=\xi_1 t+2\xi_2 t$. Insättning i (1) ger

$$\begin{aligned}
v=1 \quad \Longrightarrow \quad & \int_0^1 \Big[\xi_1 t+2\xi_2 t-2(1+\xi_1 t+\xi_2 t^2)\Big]\,dx=\int_0^1 dt \Longleftrightarrow\\
& \int_0^1 \Big[\xi_1(1-2t)+\xi_2(2t-2t^2)\Big]\,dx=\int_0^1 dt+2\int_0^1 dt=3 \Longleftrightarrow\\
& (t-t^2)\Big|_0^1\xi_1+(t^2-\frac{2}{3}t^3)\Big|_0^1\xi_2=3 \Longrightarrow \xi_2/3=3 \Longrightarrow \xi_2=9.
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
v=t \quad \Longrightarrow \quad & \int_0^1 \Big[\xi_1 t+2\xi_2 t-2(1+\xi_1 t+\xi_2 t^2)\Big]t\,dt=\int_0^1 t\ dt \Longleftrightarrow\\
& \int_0^1 \Big[\xi_1(1-2t)t+\xi_2(2t-2t^2)t\Big]\,dt=\int_0^1 t\,dt+2\int_0^1 t\,dt=3\int_0^1 t\,dt=3/2 \Longleftrightarrow\\
& \Big(\int_0^1 (t-2t^2)\,dt\Big)\xi_1+\Big(\int_0^1 (2t^2-2t^3)\,dt\Big)\xi_2=3/2 \Longleftrightarrow\\
& \Big[\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t^3\Big]_0^1\xi_1+\Big[\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^4\Big]_0^1\xi_2=3/2 \Longrightarrow \{\xi_2=9\} \Longrightarrow\\
& (\frac{1}{2}-\frac{2}{3})\xi_1=\frac{3}{2}-(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})\cdot 9=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0 \Longrightarrow \xi_1=0.
\end{aligned}$$

Alltså är cG(2) lösningen $U(t)=1+9t^2$.

3. a) Låt $g(x)=f(x)-1/2$. Då är

$$g(x)=\begin{cases} -1/2, & -\pi<x<0\\ 1/2, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

en udda funktion. Nedan beräknar vi först Fourierserieutvecklingen av $g(x)$: Eftersom g är udda är $a_n=0$ för alla n och

$$\begin{aligned}
b_n(g)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi=\frac{1}{n\pi}\Big((-1)^{n+1}+1\Big)\\
&=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\frac{2}{2k-1}, & n=2k-1 \quad k=1,2,\ldots\\ 0, & n=2k, \quad k=1,2,\ldots\end{cases}
\end{aligned}$$

Därför får vi

$$f(x)-\frac{1}{2}=g(x)\approx\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

och Fourierserieutvecklingen för $f(x)$ är då

$$f(x)\approx\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

b) Denna kunde vi få genom en direkt Fourierserieutvecklig av $f(x)$. Vi kan se härav att för $f(x)$ är

$$a_0=1,\qquad a_n=0 \quad \text{för } n\ge 1 \qquad \text{och } b_n=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\frac{2}{2k-1}, & n=2k-1 \quad k=1,2,\ldots\\ 0, & n=2k, \quad k=1,2,\ldots\end{cases}$$

Vi använder Parsevals formel:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^\infty\Big(|a_n|^2+|b_n|^2\Big)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi|f(x)|^2\,dx.$$

Genom insättning av $a_n,\ n=0,1,\ldots,\ b_n,\ n=1,\ldots$ för $f(x)$ i Parsevals formel får vi att

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx=1 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

4. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ och integrera över $I = [0,1]$,

$$\frac{1}{4}\int_0^1 u'v'\,dx - \frac{1}{4}[u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'v\,dx - 3\int_0^1 uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \frac{1}{4}\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx - 3\int_0^1 uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx - \frac{1}{4}v(1), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

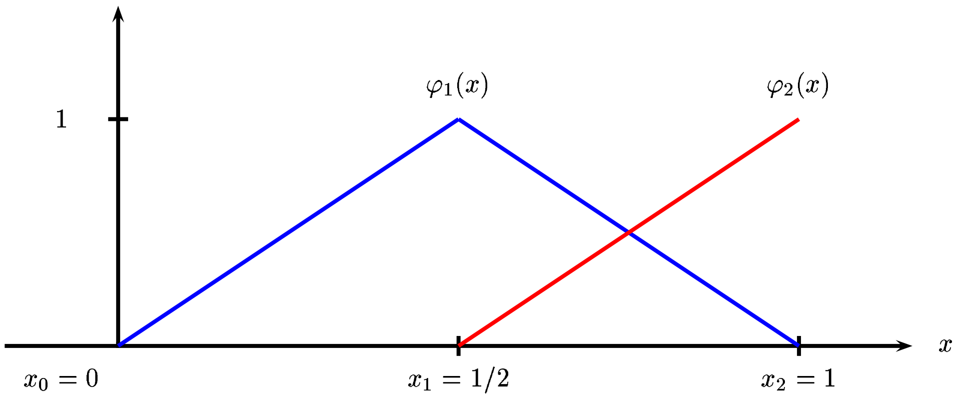
Motsvarande finitelementmetoden är:
Finn $U \in V_h = \{v : v$ är kontinuerlig styckvis linjär på $\mathcal{T}_h,\ v(0) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \frac{1}{4}\int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 U'v\,dx - 3\int_0^1 Uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx - \frac{1}{4}v(1), \qquad \forall v \in V_h.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

är de hela resp. halva basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$, $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$. Vi sätter in



$U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$, $v = \varphi_1(x)$ och $v = \varphi_2(x)$ i (FEM) och får 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 som $M\xi = b$ med

$$M = \left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right],$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad b = -\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} - \begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Vi räknar de numeriska värdena för styvhet-, konvektion-, resp. massmatris för φ_1 och φ_2 och får

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - 3h\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/2$, att

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \xi_2 = 2, \quad \xi_1 = 6/5.$$

$$U(x) = \frac{6}{5}\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{12}{5}x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}(8x+2) & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

5. Ekvationen är inhomogen. Vi gör följande ansats: $u(x,t) = S(x) + v(x,t)$. Då får vi att

$$\begin{cases} S''(x) = -1, \\ S'(0) = S(1) = 0, \end{cases} \implies S(x) = \frac{1-x^2}{2} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} v_{xx} = v_t, \\ v_x(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = -S(x) = \frac{x^2-1}{2}. \end{cases}$$

Sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Då är $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda$. Man ser med hjälp av randdata att endast $\lambda < 0$ ger icke-triviala lösningar. Härav får vi följande lösningar för ode för X och T:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_n = -(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 := -\alpha_n^2 \\ X_n(x) = \cos(n+\frac{1}{2})\pi x := \cos\alpha_n x. \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Observera att här startar indexen med $n = 0$. Detta innebär inte att λ_n får vara 0 (se ovan!)

$$T_n'(t) = -\alpha_n^2 T_n(t) \quad \implies \quad T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t}.$$

Superposition ger att

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x,$$

där A_n ges av begynnelsevillkoret:

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\alpha_n x = \frac{x^2-1}{2}.$$

Dvs A_n är Fourierkoefficienter av funktionen $\frac{x^2-1}{2}$ med avseende på basen $\{\cos\alpha_n x\}_{n=0}^{\infty}$ över (0,1).

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{1/2}\int_0^1 \frac{x^2-1}{2}\cos\alpha_n x\,dx = \int_0^1 (x^2-1)\cos\alpha_n x\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha_n}\Big[(x^2-1)\sin\alpha_n x\Big]_0^1 - \frac{2}{\alpha_n}\int_0^1 x\sin\alpha_n x\,dx \\ &= \frac{2}{\alpha_n^2}\Big[x\cos\alpha_n x\Big]_0^1 - \frac{2}{\alpha_n^2}\int_0^1 \cos\alpha_n x\,dx = -\frac{2}{\alpha_n^3}\Big[\sin\alpha_n x\Big]_0^1 = -\frac{2}{\alpha_n^3}(-1)^n. \end{aligned}$$

Därför får vi att

$$v(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\alpha_n^3}e^{-\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x.$$

Slutligen

$$u(x,t) = \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^3}e^{-[(n+\frac{1}{2})\pi]^2 t}\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\pi x.$$

6. a) Visa att (BVP)$\iff$ (VF): Se Theorem 1 på sidan 7 i *A Finite Element Crash Course*:
"http://www.math.chalmers.se/ mohammad/teaching/0607/TMA682/fem.ps"
Hänvisa till b):
b) Se Theorem 2 på sidan 8 i *A Finite Element Crash Course*:

7. Se "Derivation of the Euler Formulas" på sidan 30 och 31 i *Föreläsningar i Fourieranalys*:
"http://www.math.chalmers.se/ mohammad/teaching/0607/TMA682/Lectures/lecnote1.ps"

MA