BERÄKNINGSMATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer
Telefon: Fredrik Bengzon: 073-977 9268
2004–10–23 kl. 8.30-12.30

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Låt x vara minstakvadrat lösningen av $Ax \approx b$ med residualen $r = b - Ax$, och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vilka av följande vektorer kan vara en tänkbar residual r?

$$a. \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b. \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad c. \quad \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplacetransform

$$y'(t) + 3y(t) = \sin(t), \qquad y(0) = -1.$$

3. Bestäm den linjära interpolanten av

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}x^2 + \cos(x), \qquad -\pi \leq x \leq \pi,$$

där intervallet $[-\pi, \pi]$ delas in i 4 lika delintervall.

4. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u''(x) + u'(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

(b) Dela in intervallet i 3 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ och $x_3 = 1$. Beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen $U(x)$ på denna partition.

5. Bestäm den 2π-periodiska Fourierserie-utvecklingen av $f(x)$ i problem 3.

6. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk, integrerbar funktion. Visa att om

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad \text{då är} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

7. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u'(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsuppskattningar:

$$I. \quad \frac{d}{dt}||u||^2 + 2||u'||^2 = 0, \qquad II. \quad ||u(\cdot,t)|| \leq e^{-t}||u_0||.$$

MA