Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Karin Kraft: 073-977 9268
2005–01–13 kl. 8.30-12.30

# TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplacetransform

$$y''(t) + y(t) = \cos(t), \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

2. Bestäm approximationsfelet

$$e = \int_0^1 \Big(\Pi_1 f(x) - f(x)\Big)\, dx,$$

då $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, och $\Pi_1 f(x)$ är dess styckvis linjära interpolant i partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, och $x_2 = 1$.

3. Funktionen $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ är periodisk med perioden 1.
   (a) Utveckla $f$ i Fourierserier.
   (b) Bestäm seriens summa för $x = 0$ och $x = 1$.

4. (a) Formulera den styckvis linjära, kontinuerliga finitelementproceduren, dvs (VF) och (FEM), för randvärdesproblemet

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta.$$

   (b) Beräkna styvhetsmatrisen och lastvektorn då intervallet är indelad i 2 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, och $x_2 = 1$.

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena värmeledningsproblem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 1, & t > 0, \\ u(x,0) = 2\frac{x}{L} - 1, & 0 < x < L. & \end{cases}$$

6. Formulera och bevisa *Riemann-Lebesgue Lemma*. Hänvisad resultat måste formuleras (bevis av detta behövs inte).

7. Visa att lösningen $u \in V$ till Poissons ekvation

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u'(1) = 0,$$

minimerar energifuktionalen

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\, dx - \int_0^1 f v\, dx,$$

där $v \in V = \{v : \|v\| + \|v'\| < \infty,\ v(0) = 0\}$.

MA