

**TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng**

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös följande integro-differentialekvation med Laplacetransformation:

$$y''(t) - y'(t) + y(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

2. Bestäm den linjära interpolanten av

$$f(x) = \frac{1}{\pi^3}x^3 + 2 \sin x, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

där intervallet  $[-\pi, \pi]$  delas in i 4 lika delintervall.

3. Funktionerna  $f(x) = |x|$ ,  $|x| < 2$  och  $g(x) = |x - 1|$ ,  $-1 < x < 3$  är periodiska, båda med period 4.

(a) Det finns ett enkelt samband mellan  $f(x)$  och  $g(x)$ . Vilket?

(b) Utveckla  $f(x)$  i Fourierserier.

(c) Använd resultat från (a) och (b) för att Fourierutveckla  $g(x)$ .

4. Bestäm en a priori feluppskattning för

$$\begin{cases} -u'' + bu' + u = f, & 0 < x < 1, & b \geq 0 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

i energinormen  $\|e\|_E^2 = \|e\|^2 + \|e'\|^2$ . För vilka  $b$  värden blir felet minimal?

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena vågekvation:

$$\begin{cases} u_{xx} = -1 + u_{tt}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0, & u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsuppskattningar:

$$I. \quad \frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2 \|u'\|^2 = 0, \quad II. \quad \|u(\cdot, t)\| \leq e^{-t} \|u_0\|.$$

7. Formulera och bevia *Riemann-Lebesgue* Lemma.