Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer

MATEMATIK Telefon: Christoffer C/Peter L: 0762-721860/0762-721861

Chalmers tekniska högskola 2006–08–30 kl. 8.30-12.30

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Antag att $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ är Lipschitz kontinuerlig. Bestäm den linjära interplonten $\pi f \in \mathcal{P}(0,1)$, om f väljs som

   (a) $x^n + a$, (b) $\cos(n\pi x)$, (c) $\sin(n\pi x) + \cos(n\pi x)$,

   där a är reell tal och n är positiv heltal.

2. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplacetransform

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 3e^{-2t}\cos 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

3. Utveckla funktionen $f(x) = \cos(x)$ i Fourier sinusserie i intervallet $(0, \pi/2)$. Använd resultatet för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

4. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u''(x) + u'(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

   (b) Dela in intervallet i 3 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ och $x_3 = 1$. Beräkna den styckvis linjära finita element lösningen $U(x)$ på denna partition.

5. Bestäm lösningen till följande värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u_t(x,0) = 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Funktionen f är p-periodisk och a är ett reellt tal. Visa att integralen

$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx,$$

   är oberoende av a.

7. Betrakta differentialekvationen

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

   Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen i energinormen: Dvs visa att

$$||(u-U)'|| \leq ||(u-v)'|| \quad \forall v \in V_h^0, \qquad ||w|| = \Big(\int_0^1 w^2\, dx\Big)^{1/2},$$

   med $V_h^0 := \{$styckvis linjära kontinuerliga v med $\quad v(0) = v(1) = 0\}$.

MA