TMA132 (även TMA131 på 3 poäng) Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm ett reellt polynom $P(x)$ av högst andra graden sådant att integralen $\int_{-1}^{1}[P(x)-\cos(\pi x)]^2\,dx$ blir minimal.

2. Låt funktionen f definieras av $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}}\,d\xi$. Beräkna

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx, \qquad (b)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx.$$

3. Lös, med hjälp av Fouriertransformering i $x-$led, begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+2u_x+u, & t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0)=f(x), & f\in L^1, \quad \hat{f}\in L^1, \\ u(x,t) \quad \text{begränsad} & \text{då } t\to\infty. \end{cases}$$

4. **4N.** (för studenter som tenterar den nya kursen TMA132)

   Bestäm, m.h.a. konforma avbildningar, lösningen till följande stationära värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\pi/2<x<\pi/2, \quad y>0, \\ u(-\pi/2,y)=u(\pi/2,y)=0, & y>0, \\ u(x,0)=1, & -\pi/2<x<\pi/2. \end{cases}$$

   4G. (för studenter som tenterar den gamla kursen TMA131)

   Lös följande inhomogena värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=xe^t, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=0, & 0<x<\pi. \end{cases}$$

5. Bestäm en begränsad lösning till ekvationen:

$$\begin{cases} u_t=\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, & 0<r<1,\ t>0, \quad 0\le\theta<2\pi, \\ u(1,\theta,t)=0, & u(r,\theta,0)=r\sin\theta, \quad t>0. \end{cases}$$

6. Bevisa samplingssatsen: Antag $f\in L^2$, $\hat{f}(\omega)=0$ för $|\omega|\ge\Omega$, (bandbegränsad signal). Då kan f återvinnas ur den samplade signalen som består av f:s värde i punkter $t_n=n\pi/\Omega$; $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Dvs

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(n\pi-\Omega t)}{(n\pi-\Omega t)}.$$

7. Bevisa Bessel's olikhet (I): Antag att f är 2π-periodisk, Riemannintegrerbar på $[-\pi,\pi]$. C_n är komplexa Fourierkoefficienter till f. Då är

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|C_n|^2\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta.$$

MA