TMA131 Fourieranalys F2/Kf2, 3 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $x_1(t) = \text{sign}(t)e^{-|t|}$ ger upphov till utsignalen $y_1(t) = t\,\text{sign}(t)e^{-2|t|}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π-periodisk $x(t) = \pi - t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

2. Bestäm de koefficienter a_k, $0 \le k \le n$ och b_k, $1 \le k \le n$ som minimerar uttrycket
$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big| x\theta(x) - \Big(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big)\Big|^2 \, dx,$$
där $\theta(x)$ är Heavisides stegfunktion.

3. Beräkna faltningen $(f * f)(x)$, $-\infty < x < \infty$, då
$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \sin(\xi x)\, d\xi, \quad -\infty < x < \infty.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (c är konstant),
$$\begin{cases} u_t + c^2 u = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = xe^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Dirichlets randvärdesproblem $\nabla^2 u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}$, $0 < a < r < b$, med rand data $u(a,\theta) = \cos\theta$, och $u(b,\theta) = 1$. (Obs! sfäriska koordinater).

6. Visa att
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}, \quad \forall z \neq 0, \quad \forall x.$$

7. Visa att Hermitepolynomen $\{H_n\}_0^{\infty}$ är ortogonala på $\mathbb{R}$ med vikt funktion $w(x) = e^{-x^2}$, och
$$||H_n||_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

MA