Tentamen i **TMA131 Fourieranalys för F2/Kf2** den 10/3 1998, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Patrik Lundström, ankn. 5325.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen
$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega\theta(\omega)}{(1+\omega^2)^2},$$
där $\theta(\omega)$ är Heavisides stegfunktion. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|t|}\operatorname{sgn} t\,dt$. (7p)

2. Lös problemet
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0,$$
$$u(x,0) = u(x,b) = x(a-x).$$
(8p)

3. Ett ringformigt membran $a \leq r \leq b$, där $a > 0$ (polära koordinater) har yttre randen $r = b$ fixerad, medan den inre randen $r = a$ vibrerar med vinkelfrekvensen ω. Membranets vibrationer beskrivs av ekvationerna
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad a < r < b,\ t > 0,$$
$$u(a,t) = \sin\omega t, \quad u(b,t) = 0.$$
Bestäm den stationära svängningsrörelsen, dvs. en lösning på formen $u(r,t) = v(r)\sin\omega t$. För vilka ω finns en sådan lösning? (7p)

4. Bestäm en lösning till problemet
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0,$$
$$u(x,0) = \frac{x}{x^2 - 2x + 5}.$$
Lösningen anges i sluten form (utan kvarvarande integraler). (7p)

5. Lös Poissons ekvation $\nabla^2 u = \sin\theta$ i halvcirkeln $r < 1$, $0 < \theta < \pi$ (polära koordinater) med randvillkoren $u = \cos\theta$ då $r = 1$ och $u = 0$ då $\theta = 0$ och $\theta = \pi$. Ledning: Ansätt lösningen på formen $u(r,\theta) = f(r)\sin\theta + v(r,\theta)$, där $f(r)$ är ett lämpligt andragradspolynom. (7p)

6. Antag att f är 2π-periodisk och styckvis glatt. Visa att den trigonometriska Fourierseriens partialsummor konvergerar mot $f(\theta)$ i varje punkt θ där f är kontinuerlig. Eventuella hjälpsatser bör formuleras men behöver inte bevisas. (7p)

7. Formeln $e^{2xz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ har för fixt x bevisats med hjälp av Taylorutveckling i variabeln z. Visa att detta också kan ses som en utveckling av funktionen e^{2xz-z^2} (i variabeln x, för fixt z) i Fourierserie m.a.p. ortogonalsystemet $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Visa m.a.o. genom en direkt räkning att Fourierkoefficienterna till e^{2xz-z^2} är $\frac{z^n}{n!}$. Det räcker att anta att z är reell. (7p)

KH