Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA131 Fourieranalys för F2/Kf2** den 19/8 1999, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Johan Hoffman, ankn. 5368.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Ett linjärt, tidsinvariant system (filter) har impulssvaret $h(t) = te^{-2t}\theta(t)$. Beräkna svaret på insignalen $\cos\omega_0 t$ ($\omega_0 > 0$). (7p)

2. Lös problemet
$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ &u(x,0) = x\cos\frac{\pi x}{2}. \end{aligned}$$
(8p)

3. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet
$$\begin{aligned} &e^{-2x}\frac{d}{dx}(e^{2x}u') + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ &u(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0. \end{aligned}$$
Utveckla funktionen e^{-x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionssystemet. (7p)

4. Bestäm en lösning till
$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_y(x,1) = f(x), \end{aligned}$$
där $f \in L^2(\mathbb{R})$. Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} |u_y(x,y)|^2\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx$. (7p)

5. Den tvådimensionella Fouriertransformen av en funktion $f(x,y)$ är
$$\hat{f}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy,$$
om $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Inför polära koordinater i xy- resp. $\xi\eta$-planet:
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \xi = \rho\cos\varphi, \quad \eta = \rho\sin\varphi.$$
En funktion $f(x,y)$ kallas radiell, om den bara beror på $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Visa att Fouriertransformen av en radiell funktion är radiell. Närmare bestämt, om $f(x,y) = g(r)$, visa att
$$\hat{f}(\xi,\eta) = 2\pi\int_0^{\infty} g(r)J_0(r\rho)r\,dr.$$
(7p)

6. Visa att Legendrepolynomet $P_n(x)$ satisfierar differentialekvationen
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0.$$
(7p)

7. Antag att f är 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig och har Fourierserien $\sum_{n\neq 0} c_n e^{in\theta}$. Visa att
$$\int_0^{\theta} f(\varphi)\,d\varphi = C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in\theta} \qquad \text{för alla } \theta,$$
där C_0 är en konstant. (7p)

KH