Övningsexempel i Fourieranalys

1. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk, och $f(x) = (x+1)^2$ för $-1 < x < 1$. Utveckla $f(x)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Sök en 2-periodisk lösning till ekvationen

$$2y'' - y' - y = f(x).$$

2. Funktionen $f(t)$ är 3-periodisk, och

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{för} \quad 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{för} \quad 1 < t < 2, \\ 3-t & \text{för} \quad 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

   Bestäm, i form av en trigonometrisk Fourierserie, en periodisk lösning till differentialekvationen

$$y'' + 3y = f(t).$$

3. Utveckla funktionen $\cos x$ i sinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

4. Låt $f(t) = 1 - t^2$ för $|t| \le 1$ och låt f vara 2-periodisk. Bestäm en begränsad lösning till

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, -\infty < t < \infty, \\ u(0,t) = f(t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$ i cirkelringen $1 < r < 2$ (polära koordinater) med randvillkoren $u(1,\theta) = 0, u(2,\theta) = f(\theta)$, där $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och

$$f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \quad \text{för} \quad |\theta| \le \pi.$$

6. Fouriertransformera

   a) $\dfrac{t}{(t^2+a^2)^2}$, b) $\dfrac{1}{(t^2+a^2)^2}$, c) $\dfrac{t}{(t^2+1)(t^2+2t+5)}$,

   d) $e^{-a|t|}\sin bt \quad (a > 0, b > 0)$.

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^4}$. Beräkna

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt$, b) $f'(0)$.

8. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1-i\omega}{1+i\omega}\,\dfrac{\sin\omega}{\omega}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

9. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$ med hjälp av Fouriertransform.

10. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1}{|\omega|^3+1}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2 dt$, där $*$ betyder faltning.

11. Ange Fouriertransformen till functionen

$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

    Beräkna a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t\,dt$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

12. Låt $f(t) = \int_0^1 \sqrt{\omega} e^{\omega^2} \cos \omega t d\omega$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt$.

13. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u'(t) + 2u(t) + e^{-2t} \int_{-\infty}^{t} e^{2\tau} u(\tau) d\tau = \delta(t).$$

14. Lös integralekvationen

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} u(t-\tau) d\tau = \sqrt{3} u(t) - e^{-|t|}.$$

15. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t} u(\tau) d\tau = e^{-2|t|}.$$

16. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{1+t^2}$ ger upphov till utsignalen $\frac{t}{(4+t^2)^2}$. Beräkna impulssvaret, svaret på $\cos \omega t$. Är systemet kausalt, stabilt?

17. Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret $h(t) = e^{-4t^2}$. Låt $y(t)$ vara svaret på insignalen e^{-t^2}. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t) y(t) dt$.

18. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{4+t^2}$ ger upphov till utsignalen e^{-2t^2}. Beräkna utsignalen (i form av en komplex Fourierserie), då insignalen är impulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(t-2n) - \delta(t-2n-1)].$$

19. Låt $x(n)$ vara N-periodisk, och

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{då} \quad 0 \le n \le k-1, \\ 0, & \text{då} \quad k \le n \le N-1. \end{cases}$$

Beräkna den diskreta Fouriertransformen och använd Parsevals formel för att beräkna

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{1 - \cos \frac{2\pi\mu k}{N}}{1 - \cos \frac{2\pi\mu}{N}}.$$

20. Bestäm den diskreta Fouriertransformen till signalen (sekvensen) $x(n) = \sin \frac{n\pi}{N}, \quad n = 0, \ldots, N-1, x(n)$ N-periodisk.

21. Visa att funktionerna $\varphi_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x} e^{inx}$ är parvis ortogonala i $L^2(\mathbf{R})$. Bestäm talen c_n så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \Big|^2 dx$$

minimeras.

22. Bestäm den lösning $y(x)$ till $y'' - y = 0$ som minimerar $\int_{-1}^{1} [1 + x - y(x)]^2 dx$.

23. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < a, \\ f(0) - f'(0) = 0, & f(a) + 2f'(a) = 0. \end{cases}$$

24. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} -e^{-4x}\dfrac{d}{dx}\Big(e^{4x}\dfrac{du}{dx}\Big) = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.

25. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = 0, \\ u(0,y) = y - y^3, & u(2,y) = 0. \end{cases}$$

26. Lös problemet

$$\begin{cases} \sqrt{1+t}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

27. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} + 20u = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = x^2 - x. \end{cases}$$

28. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin x, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin 2\pi x. \end{cases}$$

29. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = t + 1, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x. \end{cases}$$

30. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $1 < r < 2$, (polära koordinater i planet) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 0 \text{ för } r = 1, & u'_r = 0 \text{ för } r = 2, \\ u = 0 \text{ för } \theta = 0, & u = r - 1 \text{ för } \theta\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

31. Utveckla funktionen $\sin(2\sin x)$ i trigonometrisk Fourierserie (reell form).

32. Ett cirkulärt membran med radie a påverkas av en periodisk yttre kraft $q \sin \omega t$ likformigt fördelad över membranet. För de transversella svängningarna har vi alltså ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S}\sin \omega t, \quad u|_{r=a} = 0.$$

Bestäm den stationära svängningsrörelsen (dvs. en lösning av formen $u(r,t) = v(r)\sin \omega t$). Vilka är resonans(vinkel)frekvenserna?

33. Lös värmeledningsekvationen $u'_t = \Delta u \equiv \nabla^2 u$ i en cylinder med radien b. Ändytorna är isolerade, medan mantelytan $r = b$ (cylinderkoordinater) lyder avsvalningslagen $u + 2u'_r = 0$. Begynnelsetemperaturen är $u\big|_{t=0} = r^2 = x^2 + y^2$.

34. a) Bestäm en begränsad lösning av formen $u(r,t) = v(r)e^{i\omega t}$ till ekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) - \dfrac{n^2}{r^2}u, & 0 < r < a, \\ u(a,t) = e^{i\omega t}, \end{cases}$$

där $n \geq 0$ är ett heltal. För vilka värden på $\omega > 0$ finns en sådan lösning?

b) Låt ω vara sådant att lösningen i a) existerar. Visa hur den kan användas för att lösa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) - \dfrac{n^2}{r^2}u, & 0 < r < a,\ t > 0, \\ u(a,t) = \sin \omega t, & u \text{ begränsad}, \\ u(r,0) = 0, & u_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

Evenutellt förekommande integraler behöver inte beräknas.

35. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $f = \sqrt{x^2+y^2} < R,\ 0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin \frac{\pi z}{L}(1 - \cos \frac{\pi z}{L})$ för $r = R$.

36. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen $\int_0^\infty [\sqrt{x} - P(x)]^2 e^{-x} dx$ då liten som möjligt.

37. Bestäm det plynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen $\int_{-\infty}^\infty [x^4 - P(x)]^2 e^{-x^2/2} dx$ så liten som möjligt.

38. Bestäm det plynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen $\int_0^\infty [e^{x/4} - P(x)]^2 x e^{-x} dx$ så liten som möjligt.

39. Bestäm det polynom av formen $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ fö r vilket $\int_0^1 [P(x)]^2 dx$ är så litet som möjligt.

40. Visa att $\int_0^1 x P_{2m}(x) dx = \frac{1}{3}\binom{3/2}{m+1}$.

41. Beräkna, t.ex. med hjälp av genererande funktionen, $H'_n(0)$, där H_n är Hermites polynom.

42. Visa följande formel för (de generaliserade) Laguerrepolynomen $L_n^\alpha(x)$:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^\alpha(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

(Ledning: Använd genererande funktionen.)

43. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ med randvillkoret $u = z(x^2 + y^2)$ då $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

44. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < a < r < b$ (sfäriska koordinater[1]) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 1 + \cos\theta, & \text{då } r = a, \\ u = \cos 2\theta, & \text{då } r = b. \end{cases}$$

45. Sök en begränsad lösning till

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = (1-2x^2)e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

46. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0 < x < 1,\ -\infty < y < \infty, \\ u'_x(0,y) = 0, \\ u(1,y) = y e^{-|y|} \quad . \end{cases}$$

47. Låt f tillhöra $L^2(\mathbf{R})$ och sök en lösning till

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < y < a, \\ u(x,0) = 0, & u(x,a) = f(x). \end{cases}$$

Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|^2 dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

48. Bestäm en periodisk lösning till ekvationen $y'' - y' + y = f'(t)$, där

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad 0 < t \le 1, \\ t-1 & \text{för} \quad 1 < t < 2, \end{cases}$$

och f är periodisk med period 2. (Med $f'(t)$ avses distributionsderivatan.)

49. Om funktionen f gäller att

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{för} \quad 0 < t < 1, \\ 1 & \text{för} \quad 1 < t < 3, \end{cases}$$

och att $f(t)$ är 3-periodisk. Bestäm $f'(t)$ (distributionsderivatan) och utveckla $f'(t)$ i komplex triogonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna Fourierserieutvecklingen av $f(t)$.

50. Beräkna följande funktionen (dvs beräkna summan och uttrycka den m.h.a. kända funktioner)

$$f(\theta) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3}$$

51. Beräkna den komplexa Fourierserien till den periodiska funktionen $f(x)$ som är lika med $x(x^2 - \pi^2)$. Vad är seriens summan i punkterna 2π och $3\pi/2$?

52. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + 1 = \frac{1}{4} u_{tt}, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(x,0) = x - x^2, \\ u(2,t) = -2,\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

[1] $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$

53. Lös följande Dirichletproblemet på enhetsskivan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

där funktionen f är funktionen $f(\theta) = \sin^2\theta + \cos\theta$ (i polärkoordinater)

54. Låt

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n(1-x)^n\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Q_n är ett polynom av grad n.

(a) Bestäm den ledande termen och den konstanta termen i $Q_n(x)$.

(b) Bestäm normen $\|Q_n\|$ av $Q_n(x)$ i $L^2(0,1)$.

(c) Bevisa att $Q_n(x)$ och $Q_m(x)$ är ortogonala i $L^2(0,1)$ om $n \neq m$.

55. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och har Fouriertransformen $\widehat{f}(\xi) = \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}$. Bestäm $f(0)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

56. Bestäm lösningen $f(t)$, $t > 0$, till ekvationen

$$f''(t) - 4f'(t) + f(t) + 6\int_0^t f(\tau)d\tau = 2e^t$$

med begynnelsevillkor $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

57. Låt $u(x,t)$ vara lösningen til begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi, 0) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Bevisa att för $t > 0$,

$$\int_0^\pi |u_t(x,t)|^2 dx \leq \int_0^\pi |g(x)|^2 dx.$$

(Ledning: Lös uppgiften med variableseparation).

58. För vilka k kan Du garantera $f \in C^{(k)}$, där

$$(a) \qquad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(n\theta)}{3^n}$$

$$(b) \qquad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(2^n\theta)}{3^n}$$

59. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$ i området $D = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \pi\}$, om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{om } y = 0, \quad \text{och} \quad x < 0, \\ 0, & \text{om } y = 0, \quad \text{och} \quad x > 0, \\ 0, & \text{om } y = \pi. \end{cases}$$

60. Undersök hur avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar enhetscirkeln $|z| = 1$ respektive cikelskivan $|z| < 1$. Använd resultatet för att bestämma den elektrostatiska potentialn $\varphi(x,y)$, $(z = x+iy)$ i enhetscirkelskivan $|z| < 1$ med randvärdena

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} P, & \text{om } |z| = 1, \quad x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{om } |z| = 1, \quad x < 0, \text{ eller } y < 0. \end{cases}$$

61. Låt T vara triangelområdet med hörn i 0, 1 och $1+i$. Bestäm bilden av T under avbildningen $w = \frac{z}{1-z}$.

62. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$ i området $D = \{(x,y) : 0 < y < x\}$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \alpha, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2+y^2 > r^2, \\ \beta, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2+y^2 \leq r^2. \end{cases}$$

63. Sök en harmonisk funktion $\varphi(x,y)$ i området mellan hyperblerna $x^2 - y^2 = 1$ och $x^2 - y^2 = 4$ med randvärden $\varphi(x,y) = 2xy$ på $x^2 - y^2 = 1$ och $\varphi(x,y) = 4xy$ på $x^2 - y^2 = 4$.

64. Låt Ω vara området mellan cirkeln $x^2 + (y-2)^2 = 1$ och x-axeln. Betrakta potentialproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, & \text{i } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{på } x\text{-axeln}, \\ \varphi = 1, & \text{på cirkeln } x^2 + (y-2)^2 = 1. \end{cases}$$

Låt $z = x + iy$. a) Visa att avbildningen $w = \frac{z - i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}}$ avbildar Ω på området mellan två cirklar (vilka?).

b) Lös därefter potentialproblemet.

Svar

1. $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+in\pi)}{n^2} e^{in\pi x}, \quad y = -\frac{4}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+in\pi)}{n^2(2n^2\pi^2+in\pi+1)} e^{in\pi x}$

2. $y(t) = \frac{2}{9} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos\frac{2n\pi}{3})}{\pi^2 n^2(3-\frac{4}{9}n^2\pi^2)} \cos\frac{2n\pi t}{3}$

3. $\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$. Summan blir $\frac{\pi^2}{64}$.

4. $u(x,t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2} e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}x} \cos(n\pi t - \sqrt{\frac{n\pi}{2}}xx)$

5. $\frac{2}{2\ln 2} \ln r + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{n^2(2^n-2^{-n})}(r^n - r^{-n})e^{in\theta}$

6. a) $-\frac{i\pi}{2a}\omega e^{-a|\omega|}$ b) $\frac{\pi}{2a^3}(1+a|\omega|)e^{-a|\omega|}$
   c) $\frac{\pi}{10}e^{-|\omega|}(1-2isgn\omega) - \frac{\pi}{10}e^{-2|\omega|}e^{i\omega}\Big(\frac{3}{2} - 2isgn\omega\Big)$
   d) $-\frac{4iab\omega}{(\omega^2+2b\omega+a^2+b^2)(\omega^2-2b\omega+a^2+b^2)}$

7. a) i b) $\frac{i}{2\sqrt{2}}$

8. $\frac{1}{2}$

9. $\pi(1-e^{-1})$

10. $\frac{1}{9\pi}$

11. $\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}$ för $0 < \omega < 2$, 0 för övrigt. a) $\frac{\pi}{2}$, b) $2\pi\Big(\ln 3 - \frac{2}{3}\Big)$

12. $\frac{\pi}{8}(e^2+1)$

13. $\theta(t)e^{-2t}\cos t$

14. $u(t) = \frac{1}{2}e^{-t/\sqrt{3}}\theta(t) + \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}t}(1-\theta(t))$

15. $\frac{3}{4}e^{-2|t|} - te^{-2t}\theta(t)$

16. $h(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{t}{(1+t^2)^2}$; $\quad x(t) = \cos\omega t$ ger $y(t) = \frac{\omega}{4}e^{-|\omega|}\sin\omega t$; ej kausalt, stabilt.

17. $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}e^{-5/96}$

18. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[1 - \frac{1}{2}(-1)^n\Big] e^{-n^2\pi^2/8+2|n|\pi} e^{in\pi t}$

19. summan blir $k(N-k)$.

20. $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi i\mu n/N} = \frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{2\mu\pi}{N} - \cos\frac{\pi}{N}}$

21. $c_n = \begin{cases} \pi(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})^{-|n|} & \text{för } n \neq 0 \\ 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}}) & \text{för } n = 0 \end{cases}$

22. $\dfrac{2\sinh 1}{\frac{1}{2}\sinh 2 + 1}\cosh x + \dfrac{2e^{-1}}{\frac{1}{2}\sinh 2 - 1}\sinh x$

23. Egenvärden: $\lambda_k = \nu_k^2$, där ν_k är de positiva rötterna till ekvationen $\tan \nu a = \frac{3\nu}{2\nu^2 - 1}$

24. $\lambda_1 = r - \beta_1^2$, där β_1 är den positiva roten till ekv. $\tanh \beta = \dfrac{\beta}{2}$; $u_1(x) = e^{-2x}\sinh \beta_1 x$

$\lambda_n = 4 + \beta_n^2$, där β_n, $n = 2, 3, \ldots$, är de positiva rötterna till ekv. $\tan \beta = \dfrac{\beta}{2}$; $u_n(x) = e^{-2x}\sin \beta_n x$

$$e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_N}[\sqrt{\lambda_n} + 2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n - 2)}\, u_n(x)$$

25. $u(x,y) = \dfrac{1}{6}(y^3 - y) + \dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \sinh 2n\pi}(\sinh n\pi x + 7\sinh n\pi(2 - x))\sin n\pi y$

26. $u(x,t) = 1 - x + \dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{2}{3}(2k+1)^2\pi^2[(1+t)^{3/2} - 1]}\sin(2k+1)\pi x$

27. $u(x,y) = -\dfrac{8}{\pi^3}\sin \pi x \dfrac{\sin(\sqrt{20 - \pi^2}\, y)}{\sin\sqrt{20 - \pi^2}} -$

$$- \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x \frac{\sinh(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 20}\, y)}{\sinh\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 20}}$$

28. $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x + 2\pi \sin 1 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2\pi^2 - 1}\Big[\frac{t}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^4\pi^4}(1 - e^{-n^2\pi^2 t})\Big]\sin n\pi x$

29.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (t+1)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\pi^3}(e^{-2n^2\pi^2 t} - 1)\sin n\pi x = \\ &= (t+1)(1-x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} - \frac{x^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\pi^3} e^{-2n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \end{aligned}$$

30. $u(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ln 2}(-1)^n - 1]}{(n+\frac{1}{2})\pi[(n+\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{\ln 2})^2 + 1]} \frac{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{\ln 2}}{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi^2}{4\ln 2}}\sin(n + \frac{1}{2})\frac{\pi \ln r}{\ln 2}$

31. $\sin(2\sin x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(2)\sin(2k+1)x$

32. $\dfrac{qc^2}{S\omega^2}\left(\dfrac{J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)} - 1\right)\sin \omega t$

res.frekv. är $\dfrac{c}{a}\alpha_{0,n}$, där $\alpha_{0,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, är J_0:s positiva nollställen.

33. $u(r,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8b^2[(2 + \frac{b}{2})\alpha_k^2 - 2b]}{\alpha_k^2(4\alpha_k^2 + b^2)J_0(\alpha_k)} e^{-(\frac{\alpha_k}{b})^2 t} J_0\Big(\dfrac{\alpha_k r}{b}\Big)$, där α_k är de pos.rötterna till $J_0(\alpha) + \dfrac{2}{b}\alpha J_0'(\alpha) = 0$.

34. a. $v(r) = \dfrac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}$ om $J_n(\omega a) \neq 0$.

b. $u(r,t) = \dfrac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}\sin\omega t + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\alpha_k t}{a} J_N\Big(\frac{\alpha_k r}{a}\Big)$, där α_k är de positiva nollställena till $J_n(x)$, och

$$a_k = -\frac{2\omega}{a\alpha_k[J_{n+1}(\alpha_k)]^2 J_n(\omega a)}\int_0^a J_n(\omega r)J_n\Big(\frac{\alpha_k r}{a}\Big)rdr\Big(= \frac{2\omega a}{(\omega^2 a^2 - \alpha_k^2)J_{n+1}(\alpha_k)}\Big)$$

35. $u(r,z) = \dfrac{I_0(\frac{\pi r}{L})}{I_0(\frac{\pi R}{L})}\sin\dfrac{\pi z}{L} - \dfrac{1}{2}\dfrac{I_0(\frac{2\pi r}{L})}{I_0(\frac{2\pi R}{L})}\sin\dfrac{2\pi z}{L}$

36. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{16}(3 + 6x - \dfrac{1}{2}x^2)$

37. $3(2x^2 + 12)$

38. $\dfrac{8}{81}(x^2 + 12)$

39. $x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{20}$

41. $H'_{2k}(0) = 0, \quad H'_{2k+1}(0) = 2(-1)^k\frac{2k+1)!}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$

43. $u = \dfrac{2}{5}R^2 z + \dfrac{3}{5}(x^2 + y^2 + z^2)z - z^3$

44. $u(r,\theta) = \dfrac{1}{3(b-a)}\Big(\dfrac{4ab}{r} - 3a - b\Big) + \dfrac{a^2}{b^3 - a^3}\Big(\dfrac{b^3}{r^2} - r\Big)\cos\theta +$
$+ \dfrac{2b^3}{3(b^5 - a^5)}\Big(r^2 - \dfrac{a^5}{r^3}\Big)(3\cos^2\theta - 1)$

45. $u(x,t) = \dfrac{4kt + 1 - 2x^2}{(4kt+1)^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}$

46. $u(x,y) = \dfrac{1}{6}(x^3 - 1) + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\eta}{(1+\eta^2)^2}\frac{\cosh\eta x}{\cosh\eta}\sin\eta y\, d\eta$

47. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\xi y}{\sinh\xi a}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\Big(= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi y}{a}}{\cosh\frac{\pi(x-t)}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}}f(t)dt\Big)$

48. $y(t) = \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{n\pi - i(1-(-1)^n)}{2n\pi(n^2\pi^2 - 1 + in\pi)}e^{in\pi t}$

49. $f'(t) = 2\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(t-3n-1) - \delta(t-3n)] = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{2}{3}(e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1)e^{in\frac{2\pi}{3}t}$

$f(t) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1}{in\pi}e^{in\frac{2\pi}{3}t}$

50. $f(\theta) = -\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{\pi}{2}\theta)$, om $\theta > 0$ och $f(\theta) = -f(-\theta)$ om $\theta > 0$.

51. $12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n^3}$. 0 resp $\frac{3}{8}\pi^3$.

52. $u(x,t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos((2k+1)\pi t)\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2}x)$

53. $u(x,y) = -\frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 2) + \frac{1}{2}x$ eller $u(r,\theta) = -\frac{1}{4}(r^2\cos 2\theta - 2) + \frac{1}{2}r\cos\theta$ (i polärkoordinater).

54. (a) ledande termen är $(-1)^n(2n)(2n-1)\ldots(n+1)$, konstanta termen är $n!$. (b) $\sqrt{(2n)!}$.

55. $f(0) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

56. $f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

57.

58.

59. $\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}\text{arccot}\frac{e^x - \cos y}{\sin y}$.

60. $\varphi(x,y) = \frac{P}{\pi}\text{arccot}\frac{(1-x)^2+(1-y)^2-1}{1-x^2-y^2}$.

61. Bildområdet är: $\{w = (u,v) : u \geq -1,\ v \geq 0,\ (u+\frac{1}{2})^2 + (v-\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{2}\}$.

62. $\varphi(x,y) = \alpha + \frac{\alpha-\beta}{\pi}\left[\text{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+r^4}{4xy(x^2-y^2)} - \text{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2-r^4}{4xy(x^2-y^2)}\right]$.

63. $\varphi(x,y) = \frac{2}{3}xy(x^2 - y^2 + 2)$.

64. a) Det sammanhängande området Ω avbildas på området mellan de koncentriska cirklarna $|w| = 1$ och $|w| = 2 - \sqrt{3}$.

    b) $\varphi(x,y) = \frac{1}{2\ln(2-\sqrt{3})}\ln\frac{x^2+(y-\sqrt{3})^2}{x^2+(y+\sqrt{3})^2}$.