Lösningar, TMA131 Fourieranalys F2/Kf2, 3 poäng; 2002–03–09

---

1. Vi har att

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{sign}(t)e^{-|t|} \Longrightarrow \hat{x}_1(t) = \tfrac{-2i\xi}{1+\xi^2}. \\ y_1(t) &= t\operatorname{sign}(t)e^{-2|t|} \Longrightarrow \hat{y}_1(t) = i\tfrac{d}{d\xi}\left(\tfrac{-2i\xi}{4+\xi^2}\right) = i\tfrac{-2i(4+\xi^2)-(-2i\xi)(2\xi)}{(4+\xi^2)^2} \\ &= i(-2i)\tfrac{4+\xi^2-2\xi^2}{(4+\xi^2)^2} = 2\tfrac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta ger överföringsfuktionen

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(t)}{\hat{x}_1(t)} = 2\frac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2} \times \frac{1+\xi^2}{-2i\xi} = \frac{i}{\xi} \cdot \frac{(4-\xi^2)(1+\xi^2)}{(4+\xi^2)^2}.$$

Komplexa Fourierserieutvecklingen av den 2π periodiska $x(t) = \pi - t$ ges av

$$x(t) = \pi - t \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int},$$

där för $n \neq 0$, är

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)e^{-int}\,dt = \tfrac{1}{2\pi}\left[(\pi-t)\tfrac{e^{-int}}{-in}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-1)\tfrac{e^{-int}}{-in}\,dt\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\left[-\pi\tfrac{e^{-in(2\pi)}}{-in} - \tfrac{\pi}{-in} + \tfrac{e^{-int}}{(-in)^2}\Big|_0^{2\pi}\right] = \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{-\pi}{-in} + \tfrac{-\pi}{-in}\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\tfrac{2\pi}{in} = \tfrac{1}{in} = \tfrac{-i}{n}, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

För $n = 0$, är

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{(\pi-t)^2}{-2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{-2} - \frac{\pi^2}{-2}\right] = 0.$$

Nu

$$e^{i\xi t} \curvearrowright \hat{h}(n)e^{i\xi t} \Longrightarrow e^{int} \curvearrowright \hat{h}(\xi)e^{int},$$

värför för $n \neq 0$ gäller att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int} = \sum_{n=-\infty(n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}e^{int} \curvearrowright \sum_{n=-\infty(n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}\hat{h}(n)e^{int} = y(t).$$

Alltså

$$y(t) = \sum_{n=-\infty(n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n} \cdot \frac{-i}{n}\frac{(4-n^2)(1+n^2)}{(4+n^2)^2}e^{int}.$$

Dvs svaret är

$$y(t) = \sum_{n=-\infty(n\neq 0)}^{\infty} \frac{(n^2-4)(n^2+1)}{n^2(n^2+4)^2}e^{int}.$$

2.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| x\theta(x) - \Big(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big)\right|^2 dx,$$

blir minimal då a_k och b_k är de trigonometriska Fourierkoefficienterna till $x\theta(x)$, dvs

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\theta(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\, dx,$$

För $k = 0$ får vi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

För $k \geq 1$ är

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{\pi}\Big[x\tfrac{\sin kx}{k}\Big]_0^{\pi} - \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot \tfrac{\sin kx}{k}\, dx = \tfrac{1}{\pi}\Big[\tfrac{\cos kx}{k^2}\Big]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{\pi}\tfrac{\cos k\pi - 1}{k^2} = \tfrac{1}{\pi}\tfrac{(-1)^k - 1}{k^2}. \end{aligned}$$

P.s.s. är

$$\begin{aligned} b_k &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\theta(x)\sin kx\, dx = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\, dx \\ &= \tfrac{1}{\pi}\Big[-x\tfrac{\cos kx}{k}\Big]_0^{\pi} + \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\tfrac{\cos kx}{k}\, dx \\ &= -\tfrac{1}{\pi}\tfrac{\pi\cos k\pi}{k} + \tfrac{1}{\pi}\Big[\tfrac{\sin kx}{k^2}\Big]_0^{\pi} = \tfrac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Svar:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \text{ för } 1 \leq k \leq n, \qquad b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ för } 1 \leq k \leq n.$$

3. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} e^{-\xi}\sin(\xi x)\, d\xi = \int_0^{\infty} e^{-|\xi|}\sin(\xi x)\, d\xi \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{sign}(\xi)e^{-|\xi|}\sin(\xi x)\, d\xi = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}(\xi)e^{-|\xi|}\sin(\xi x)\, d\xi \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(-i)\mathrm{sign}(\xi)e^{-|\xi|}e^{i\xi x}\, d\xi. \end{aligned}$$

Detta ger Fouriertransformen av $f(x)$;

$$\hat{f}(\xi) = (-\pi i)\mathrm{sign}(\xi)e^{-|\xi|}.$$

Då får vi

$$\mathcal{F}[(f * f)(x)](\xi) = [\hat{f}(\xi)]^2 = -\pi^2 e^{-2|\xi|} = -2\pi\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|},$$

som har inversa Fouriertransformen:

$$(f * f)(x) = \frac{-2\pi}{x^2 + 4}.$$

4. Vi sätter $xe^{-x^2} = f(x)$. Fouriertransformen i x-led ger

$$\hat{u}_t = -\xi^2\hat{u} - c^2\hat{u} = -(\xi^2 + c^2)\hat{u} \Longrightarrow \hat{u}(\xi, t) = C(\xi)e^{-(\xi^2+c^2)t},$$

där

$$\hat{u}(\xi, 0) = C(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Vidare är

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\Big(\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\Big) = i\sqrt{\pi}(-\xi/2)e^{-\xi^2/4}.$$

Detta ger att

$$\hat{u}(\xi, t) = -i\sqrt{\pi}(\xi/2)e^{-c^2t}e^{-(t+1/4)\xi^2}.$$

Med $A = t + \frac{1}{4}$ gäller att

$$e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}e^{-x^2/4A}\Big],$$

som innebär

$$(i\xi)e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\Big[\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}e^{-x^2/4A}\Big)\Big] = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}\frac{-x}{2A}e^{-x^2/4A}\Big].$$

Med invers Fouriertransformering får vi

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-c^2t}\frac{1}{\sqrt{4\pi(t + 1/4)}}\frac{x}{2(t + 1/4)}e^{-x^2/4(t+1/4)}$$

vilket, efter förenkling ger

$$u(x, t) = \frac{x}{(4t + 1)^{3/2}}e^{-c^2t}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

5. Eftersom data är φ oberoende så är $u = u(r, \theta)$. Först löser vi θ oberoende problrmet för $\tilde{u}$ ur ekvationen:

$$\begin{cases} \nabla^2\tilde{u}(r) = \frac{1}{r}, & 0 < a < r < b \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0. & \end{cases}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \nabla^2\tilde{u}(r) \quad &= 1/r \Longleftrightarrow \tfrac{1}{r^2}\tfrac{d}{dr}(r^2\tilde{u}') = \tfrac{1}{r},\ \tfrac{d}{dr}(r^2\tilde{u}') = r, r^2\tilde{u}' = \tfrac{r^2}{2} + C, \\ &\Longrightarrow \tilde{u}' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{C}{r^2}, \Longrightarrow \tilde{u}(r) = \tfrac{r}{2} - \tfrac{C}{r} + D. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger ekvationerna

$$\tilde{u}(a) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{2} - \frac{C}{a} + D = 0, \qquad \tilde{u}(b) = 0 \Longrightarrow \frac{b}{2} - \frac{C}{b} + D = 0.$$

v.g.v.

Genom att lösa dessa ekvationer får vi $D = -(a+b)/2$, $C = -ab/2$. Alltså vi har

$$\tilde{u}(r) = \frac{1}{2}\Big[r + \frac{ab}{r} - (a+b)\Big] = \frac{1}{2r}\Big[r^2 - (a+b)r + ab\Big] = \frac{1}{2r}(r-a)(r-b).$$

Sätt $v = u - \tilde{u}$. Då blir ekvationen får v homogen med inhomogena randvillkor:

$$\begin{cases} \nabla^2 v(r,\theta) = 0, & 0 < a < r < b \\ v(a,\theta) = \cos(\theta), & v(b,\theta) = 1. \end{cases}$$

Lösningen för v kan ansättas som

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\Big) P_n(\cos\theta),$$

där P_n är Legendre polynom av ordning n. Vi har då

$$\begin{cases} v(a,\theta) & = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n a^n + B_n a^{-n-1}\Big) P_n(\cos\theta) = \cos(\theta) = P_1(\cos\theta) \\ v(b,\theta) & = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n b^n + B_n b^{-n-1}\Big) P_n(\cos\theta) = 1 = P_0(\cos\theta). \end{cases}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$n = 0: \quad \begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{a} = 0, & A_0 = -\frac{B_0}{a}, \\ A_0 + \frac{B_0}{b} = 1, & -\frac{B_0}{a} + \frac{B_0}{b} = 1. \quad B_0(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) = 1 \end{cases}$$

Vi får att

$$B_0 = -\frac{ab}{b-a}, \qquad A_0 = \frac{b}{b-a}$$

P.s.s.

$$n = 1: \quad \begin{cases} A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 1, & -a\frac{B_1}{b^3} + \frac{B_1}{a^2} = 1, \quad B_1(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{b^3}) = 1, \\ A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = 0, & A_1 = -\frac{B_1}{b^3}. \end{cases}$$

Vi får att

$$B_1 = \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}, \qquad A_1 = -\frac{a^2}{b^3 - a^3}.$$

För högre koefficienter gäller

$$A_n = B_n = 0, \qquad \text{för alla } n \geq 2.$$

Härigenom får vi

$$v(r,\theta) = \Big(\frac{b}{b-a} - \frac{ab}{b-a}\frac{1}{r}\Big) + \Big(\frac{-a^2}{b^3 - a^3} r + \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}\frac{1}{r^2}\Big)\cos(\theta).$$

Slutligen $u = \tilde{u} + v$ ger svaret:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2r}(r-a)(r-b) + \frac{b}{(b-a)r}(r-a) - \frac{a^2}{(b^3 - a^3)r^2}(r^3 - b^3)\cos(\theta).$$

MA