Talföljder & Serier (ELW 17.1)

Def: $p \in \mathbb{N}$ (el. $p \in \mathbb{Z}$)

$f: \{p, p+1, \dots\} \to \{f(p), f(p+1), \dots\}$ är en **ω-talföljd**

t.ex. $f: \{n\}_{n=1}^{\omega} \to \{f(n)\}_{n=1}^{\omega} =: \{a_n\}_{n=1}^{\omega}$

Ex. $\{(-1)^n \cos(n\pi)\}_{n=0}^{\omega} = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$

$\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\omega} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$

} OBS! båda betecknar $\{\dots\}$ & $\dots$ används.

Def. Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\omega}$ har **gränsvärdet** a, om $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{Z}$:

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Då skriver vi: $\lim_{n\to\omega} a_n = a$ eller $a_n \to a$ då $n \to \omega$,

och säger att **talföljden är konvergent**.

Talföljden kallas **divergent** om den inte är konvergent

Ex. $$\lim_{n\to\omega} \frac{2n + \sin(n)}{5n + n^2} = \lim_{n\to\omega} \frac{2 + \frac{\sin(n)}{n}}{5 + n} = 0.$$ ($\frac{\sin(n)}{n} \to 0$)

$\Rightarrow \left\{\frac{2n + \sin(n)}{5n + n^2}\right\}_{n=1}^{\omega}$ är konvergent mot 0

Ex. $\{(-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2})\}_{n=0}^{1} = \{0, \pm 1\}$ är **divergent**.

(# ingen tal som är tillr. nära 0 samt. till nära $+1$ el. -1)

Def En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\omega}$ sägs **divergera mot ω**, om $\forall m > 0$, $\exists N_m$:

$$n > N_m \Rightarrow a_n > M.$$

beteck. $a_n \to \omega$, då $n \to \omega$.

Sats 1: 1° k konstant, $\lim_{n\to\omega} k^n = \begin{cases} 0 & \text{då } |k| < 1 \\ 1 & \text{" } k = 1 \\ \omega & \text{" } k > 1 \\ \pm\omega & \text{" } k < -1. \end{cases}$

2° $P(n)$ polynom av grad (säg) p i n, $\lim P(n) k^n = \begin{cases} 0 & |k| < 1 \\ \omega & |k| \geq 1. \end{cases}$

Serier ELW (18.1)

Def. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$: talföljd. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$: ∞-serie, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$: n-te delsumman.

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \to s$ om $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.
  Då säger man serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar mot summan s.
- Om $\lim_{n\to\infty} s_n \nexists$ eller $s_n \to \pm\infty$, då är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Ex. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$, då $n\to\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergerar mot 1.

Ex. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = n^{1/3} \to \infty$
då $n\to\infty$.

Ex. $a \neq 0$ $\quad s_n = \sum_{k=0}^{n} a q^k = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty & |q|>1,\ q=1 \\ \{0\}\ \{1\} & q=-1, \text{ div.} \end{cases}$

Sats 18.1 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$
$\not\Leftarrow$

Ex. $\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \to 0$, men $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \to \infty$.

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} k \tan\left(\frac{1}{k}\right)$ är divergent, ty $\lim_{k\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \to 1 \neq 0$.

Sats 18.2 En monoton talföljd konv $\iff$ den är begränsad.

Ex. $a_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, $\dots$ $a_n \geq \sqrt{2}$ & $a_n \downarrow$, $n \geq 2 \Rightarrow a_n$ konv.

Sats 18.3 **Stirlings formel:**

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \to 0, \text{ då } n\to\infty.$$

Sats 18.4 : (I) $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

(II) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

(III) a: konstant $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Positiva serier

Sats 18.5 **Huvudsatsen för positiva serier**

En positiv serier är konv. $\iff$ {dess delsummor bildar en uppåt begränsad talföljd

Ex. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \forall n \geq 2.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergent.} \quad \left(s = \frac{\pi^2}{6} \ldots\right)$$

Sats 18.6 **Integralkriteriet**, f: positiv, avtagande på $[1,\infty)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergent}$$

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div. ty $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty$ obs! $\frac{1}{x} > 0$ på $[1,\infty)$

$\frac{1}{x} \downarrow$ ".

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ konv. ty $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{x^{3/2}} > 0$ & $\downarrow$.

Sats 18.7

p: konstant, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ { konvergent, $p > 1$; divergent $p \leq 1$.

18.4 (ELW) Jämförelsekriterier för positiva serier

Sats 18.8 $\quad 0 \le a_n \le b_n$

1°. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

2°. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div.

(3°. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div resp. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv ger ingen upplysning om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.)

Sats 18.9 Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0 \Rightarrow$ positiva serier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ & $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ antingen båda är konvergenta eller " " divergenta.

Anm. 5 Positiva serier

Ⓐ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv & $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

Ⓑ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div & $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div.

Ex $\lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1 \Rightarrow \{\sum \frac{1}{k} \text{ div}\} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ div

(för $k \ge 1$ är $0 < \frac{1}{k} < \frac{\pi}{2}$ & $0 < \sin\frac{1}{k} < 1$.)

Ex $a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \{\text{Maclaurien}\} = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$

$= \frac{1}{2k^2} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{a_k}{\frac{1}{k^2}} \to \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \{\sum \frac{1}{k^2} \text{ konv}\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$ konv.

Snabba Serier

Sats 18.10 **Rotkriteriet**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiv serie & $\lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} = A$ $\begin{cases} A<1, & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv} \\ A<1, & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.} \end{cases}$

$A = 1$ **INGET TILLÅTET** $\sum \frac{1}{k}$ div trots $\left(\frac{1}{k}\right)^{1/k} \to 1$

Men $\sum \frac{1}{k^2}$ konv $\left(\frac{1}{k^2}\right)^{1/k} \longrightarrow 1$.

(Bra ta Ln i båda fallen $\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k}\right) \to 0$ & $\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k^2}\right) \to 0$)

Sats 18.11 **kvotkriteriet**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiv serie & $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$ $\begin{cases} A<1, & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv} \\ A>1, & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div} \end{cases}$

(Ingen upplysning då $A=1$)

Ex 20 $a>0$, konstant, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{99} a^k$ konv. eller div.?

Lösning: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{99} a^k} = a \underbrace{\left(\lim_{k\to\infty} (k^{\frac{1}{k}})\right)^{99}}_{=1} = a$

Rotkriteriet $\Rightarrow$ $a<1$ Serien är konvergent

$a>1$ " " "

Alternativt $A_k = k^{99} a^k$, $\lim_{k\to\infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{99} a^{k+1}}{k^{99} a^k} = a \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{99}$

$= a$

Finally om $a=1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{99}$ är div. ($k^{99} \not\to 0$).

18.5 (ECW) **Serier med godtyckliga termer**

Sats 18.12 (Absolut konvergens; reella fallet)

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv. $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

Bevis $a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|$, $0 \le a_k + |a_k| \le 2|a_k| \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k + |a_k|$ konv.

$\Rightarrow \sum a_k$ konv. ☐

Def **Absolut resp. betingat konvergens**

(A) Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv. så sägs att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är <u>absolut konvergent</u>

(B) Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är divergent men $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så sägs att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är <u>betingat konvergent</u>.

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ är absolut konv. $\left(\sum \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \sum \frac{1}{k^2} \text{ konv.}\right)$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är betingat konv. ty $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div.
men $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är konv. (se nedan!).

Def <u>Alternerande serie</u> är en serie där varannan term är positiv och varannan term är negativ. Om seriens 1:sta term är positiv så har serien formen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \quad \text{där} \quad a_k > 0, \ \forall k$$

Sats 18.13 <u>Leibnitz konvergenskriterium</u>

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ <u>avtagande</u> följd av <u>positiva tal</u>, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ konv.}$$

Bevis $a_1 > a_2 > \cdots > a_k > a_{k+1} \Rightarrow$

(1) $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = S_{2n-2} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0 \text{ (avtag)}}$

$\Rightarrow \underline{S_{2n} \geq S_{2n-2}}, \ \forall n$

(2) $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$

(1) & (2) $\Rightarrow \{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ en växande talföljd som är uppåt begr.

$\exists s$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$ (I)

OBS! $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \longrightarrow s + 0$, då $n \to \infty$ (II)

(I) & (II) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = s$. ☐

Ex. 24 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ alternerande, $\{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty} \downarrow$, $a_k = \frac{1}{k} \to 0$, $k \to \infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är betingat konvergent.

Satz 18.14 Absolut konvergens, komplexa fallet

$a_k \in \mathbb{C}$ & $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

Bevis $a_k = b_k + i c_k \Rightarrow |a_k|^2 = |b_k|^2 + |c_k|^2 \Rightarrow \begin{cases} |b_k| \le |a_k| \\ |c_k| \le |a_k| \end{cases} \Rightarrow$

$\sum |b_k| < \sum |a_k|$, $\sum |c_k| < \sum |a_k| \xrightarrow[\text{konv}]{\sum |a_k|} \sum |b_k|$ & $\sum |c_k|$ konv

$\Rightarrow \sum b_k$ & $\sum c_k$ absolut konvergenta $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

18.6 (ELW) Ordningsfråga i betingat & absolut konv.

Satz 18.15 En betingat konv serie kan alltid omordnas så att den erhållna serien får vilken summa man vill eller blir divergent

---

Satz 18.16 Varje omordning av en absolut konv serie ger en absolut konv serie med samma summa som den givna serien

---

Ex $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är betingat konv. med $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$.

Betrakta samma summa omskrivet som $\underbrace{(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})}_{a_1} + \underbrace{(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8})}_{a_2} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \dots =: \sigma_{3n}$

$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^{n} a_k = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \dots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}$

$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} s_{2n}$ $\Big\}$ $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$

$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} \to \frac{1}{2}\ln 2$ & $\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} \to \frac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}\ln 2$ först $\lim s_n = \ln 2$ ☐