TMA682, Excercise in Linear space, scalar product and L_p-norms

1. Betrakta de delmängder av $\mathcal{P}_n$ som består av alla polynom $p(t)$ av grad $\leq n$ sådana att

   a) $2p(0) = p(1)$

   b) $p(t) \geq 0$ då $0 \leq t \leq 1$

   c) $p(t) = p(1-t)$ för alla t.

   Vilka av dessa delmängder är underrum i $\mathcal{P}_n$?

   Svar: a) och c).

2. Visa att $P_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ är en bas för $\mathcal{P}_2$ då

   a)$P_1(t) = (t+1)^2,\ P_2(t) = (t+2)^2,\ P_3(t) = (t+3)^2$.

   b)$P_1(t) = \frac{1}{2}(t-2)(t-3),\ P_2(t) = -(t-1)(t-3),\ P_3(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$.
   Ange också koordinaterna för polynomet t^2 i basen p_1, p_2, p_2.

   Svar:

   a) Koordinater för t^2 är $(3, -3, 1)$.

   b) Koordinater för t^2 är $(1, 4, 9)$.

3. Visa att följande funktioner är lineärt beroende

   a) $\sin 2t, \quad \cos 2t, \quad \sin^2 t, \quad \cos^2 t$

   b) $\ln(t^6+1), \quad \ln(t^4 - t^2 + 1), \quad \ln(t^2+1)$.

4. Visa att följande funktioner är lineärt oberoende

   a) $\sin t, \quad \cos t, \quad \sin 2t, \quad \cos 2t$

   b) $e^t, \quad e^{t^2}, \quad e^{t^3}$.

5. Vi definierar skalärprodukt och L_2-normen för två funktioner/vektorer f och g på ett intervall (a, b) enligt

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad \text{resp} \quad ||f|| = \sqrt{(f, f)}.$$

I analogi med fattet i Euclidiska rum $\mathbf{R}^n$ defibnierar vi “vinkeln” θ mellan f och g som

$$(f, g) = ||f||\,||g|| \cos\theta.$$

Vad är cosinus för vinkelm mellan “vektorerna” $3x + 1$ och $5x^2 + 3$ i det linjära rummet försett med skalärprodukten

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx?$$

Svar: $\frac{7}{6\sqrt{6}}$.

6. Visa att i $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, med skalärprodukten

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

är funktionerna

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$$

sinsemellan ortogonala. (Detta är fundamentalt i teorin för Fourierserier.)

7. Är någon av följande två kandidater för en skalärprodukt på $\mathcal{C}^1[a, b]$:

$$(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx,$$

$$(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx + f(a)g(a)?$$

Svar: Ja, den andra.

8. Låt V vara det lineära rummet bestående av reella kontinuerliga funktioner på enhetsintervallet $[0,1]$. För f och g i V, definierar vi skalärprodukten av f och g som

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx,$$

och för w i V, L_p, $p=1,2,\infty$ normen som

$$||w||_{L_p[0,1]} := \left(\int_0^1 |w(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad p=1,2,$$

och

$$||w||_{L_\infty[0,1]} := \max_{x\in[0,1]} |w(x)|.$$

Bestäm (f,g), $||f||_{L_p[0,1]}$ och $||g||_{L_p[0,1]}$ för $p=1,2,\infty$ i följande fall:

a) $f(x)=1+x, \quad g(x)=2-x$

b) $f(x)=1, \quad g(x)=3$

c) $f(x)=1, \quad g(x)=3+2x$

d) $f(x)=3x, \quad g(x)=-4x^2$

e) $f(x)=x, \quad g(x)=e^x$

f) $f(x)=1, \quad g(x)=\cos x+\sin x.$

Några svar: d) $(f,g)=-3$, e) $(f,g)=1$, f) $(f,g)=\sin 1-\cos 1+1$.