Matematik Chalmers

Tentamen i Tentamen Analys och linjär algebra del a TMV035 031022 lösningsförslag, 2003–10–22

Författare: Johan Jansson

1a.

$$f(x) = x^2 - 3 = 0$$

Newtons metod innebär att vi ställer upp $f(x)$ på följande fixpunktsform:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x)$$

Om vi sätter in:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3 \\ f'(x) &= 2x \\ &\Rightarrow \\ g(x) &= x - \frac{x^2 - 3}{2x} \end{aligned}$$

Vi kan sedan generera vår lösning till $f(x)$ med fixpunktsiteration:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

1b.

Vi sätter r till att vara en rot till $f(x) = 0$. $|x_i - r|$ är då felet, eller avståndet från den korrekta lösningen för approximationen x_i.

Kvadratisk konvergens innebär då:

$$|x_{i+1} - r| \leq C|x_i - r|^2$$

Då $|x_i - r| << 1$ (0.01 t.ex.) blir $|x_i - r|^2 << |x_i - r|$ $(0.0001 << 0.01)$. Dvs. att felet minskar kvadratiskt.

1c.

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 3 = 0 &\Rightarrow \\ x^2 = 3 &\Rightarrow \\ x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Om $\sqrt{3}$ är irrationellt så är även $-\sqrt{3}$ det.
Vi antar att vi kan skriva $\sqrt{3}$ som ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ där p och q inte har några gemensamma faktorer.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{p}{q} \Rightarrow \\ q\sqrt{3} &= p \Rightarrow \\ q^2 3 &= p^2 \Rightarrow \\ qq3 &= pp \Rightarrow\end{aligned}$$

Detta betyder att p är delbart med 3, vi kan alltså skriva $p = 3\bar{p}$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \\ 3qq &= 3\bar{p}3\bar{p} = 9\bar{p}\bar{p} \Rightarrow \\ qq &= 3\bar{p}\bar{p} \Rightarrow\end{aligned}$$

Detta betyder att q är delbart med 3.
Vi har alltså att både p och q har 3 som faktor, vilket motsäger vårt antagande att man kunde $\sqrt{3}$ på formen $\frac{p}{q}$ där p och q inte har några gemensamma faktorer.

2a.

$$P_x(v) = \frac{v \cdot x}{x \cdot x} x$$

$$\begin{aligned}v &= (3, 7) \\ x &= (4, 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_x(v) &= \frac{(3,7) \cdot (4,3)}{(4,4) \cdot (4,3)}(4,3) \\ &= \frac{21 + 12}{16 + 9}(4,3) \\ &= (\frac{132}{25}, \frac{99}{25})\end{aligned}$$

2b.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$u = (2, 1)$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} R(\frac{\pi}{4})u &= \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{4}) & -sin(\frac{\pi}{4}) \\ sin(\frac{\pi}{4}) & cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2cos(\frac{\pi}{4}) - sin(\frac{\pi}{4}) \\ 2sin(\frac{\pi}{4}) + cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2c.

Vi ska visa att $|R(\theta)u| = |u|$. Vi sätter $u = (a, b)$. Detta ger $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\begin{aligned} R(\theta)u &= \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} acos(\theta) - bsin(\theta) \\ asin(\theta) + bcos(\theta) \end{pmatrix} = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v|^2 &= (acos(\theta) - bsin(\theta))^2 + (asin(\theta) + bcos(\theta)^2 \\ &= a^2cos(\theta)^2 - 2abcos(\theta)sin(\theta) + b^2sin(\theta)^2 + \\ &+ a^2sin(\theta)^2 + 2abcos(\theta)sin(\theta) + b^2cos(\theta)^2 = \\ &= a^2(cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2) + b^2(cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2) = \\ &[\text{trigonometriska ettan: } cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2 = 1] = \\ &= a^2 + b^2 \\ &\Rightarrow \\ |v| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\square \end{aligned}$$

3a.

Vi säger att en funktion $f(x)$ är deriverbar i alla punkter $\bar{x}$ om vi kan hitta konstanter $\bar{x}$ och $K_f\bar{x}$ så att:

$$f(x) = f(\bar{x}) + m(\bar{x})(x - \bar{x}) + E_f(x, \bar{x}),$$
$$|E_f(x, \bar{x}) \leq K_f(\bar{x})|x - \bar{x}|^2$$

där derivatan i punkten $\bar{x}$ är $f'(\bar{x}) = m(\bar{x})$.

3b.

$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Vi ska bestämma derivatan.

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{x} &= \frac{1}{\bar{x}} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{\bar{x}} + \left(-\frac{1}{x\bar{x}}\right)(x - \bar{x}) = \\
&= \frac{1}{\bar{x}} + \left(\frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{x\bar{x}}\right)(x - \bar{x}) = \\
&= \frac{1}{\bar{x}} + \left(-\frac{1}{\bar{x}^2}\right) + \left(\frac{1}{x\bar{x}^2}\right)(x - \bar{x})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(\bar{x}) &= f'(\bar{x}) = -\frac{1}{\bar{x}^2} \\
E_f(x, \bar{x}) &= \left(\frac{1}{x\bar{x}^2}\right)(x - \bar{x})^2 \\
|E_f(x, \bar{x})| &= |\left(\frac{1}{x\bar{x}^2}\right)(x - \bar{x})^2| \leq |\frac{1}{x\bar{x}^2}||(x - \bar{x}^2)|^2
\end{aligned}$$

Om $\bar{x}$ tillhör något begränsat intervall, och vi väljer begränsade intervall för x, t.ex enligt:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{x}}{2} \leq x \leq 2\bar{x}, \text{då } \bar{x} > 0 \\
2\bar{x} \leq x \leq \frac{\bar{x}}{2}, \text{då } \bar{x} < 0
\end{aligned}$$

så kan vi begränsa $|\frac{1}{x\bar{x}^2}|$ med en konstant:

4a.

Lipschitzkontinuitet betyder att vi kan hitta en konstant L så att:

$$|f(a) - f(b)| \leq L|a - b|$$

Vi har att $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ där $x \in [3, 4]$

$$
\begin{aligned}
|f(a)-f(b)| &= |\frac{1}{a^2-4}-\frac{1}{b^2-4}| = \\
&= |\frac{(b^2-4)(a^2-4)}{(a^2-4)(b^2-4)}| = \\
&= |\frac{(b^2-a^2)}{(a^2-4)(b^2-4)}| \\
&= |\frac{(b+a)}{(a^2-4)(b^2-4)}(b-a)| \leq \\
&\leq |\frac{(b+a)}{(a^2-4)(b^2-4)}||(b-a)| \\
a,b \in [3,4] &\Rightarrow \\
|\frac{(b+a)}{(a^2-4)(b^2-4)}| \leq |\frac{(4+4)}{((3)^2-4)((3)^2-4)}| &= \frac{8}{25}
\end{aligned}
$$

f är alltså Lipschitzkontinuerlig och $L = \frac{8}{25}$

4b.

f är <u>inte</u> Lipschitzkontinuerlig på intervallet $(2, 4]$ eftersom f inte är begränsad på intervallet. Vi kan inte hitta en konstant K så att $\frac{1}{x^2-4} \leq K$ om vi får välja x godtyckligt nära 2 (Vi har ju att $2^2 - 4 = 0$).

5.

Vi sätter:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^2y - y^2 = 0 \\
f_2(x,y) &= xy + y^2 - 4 = 0 \\
\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Newtons metod (första iterationen):

$$
\begin{aligned}
J(x_0,y_0)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} f_1(x_0,y_0) \\ f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}
$$

Vi sätter in vad vi har fått och beräknar:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2 - 2y$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x + 2y$$
$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2\cdot 2 & 2^2 - 2\cdot 2 \\ 2 & 2 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2^2 \cdot 2 - 2^2 \\ 2\cdot 2 + 2^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gauss-eliminering:

$$\begin{array}{l} \text{eq (1)} \\ \text{eq (2)} \end{array} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /4 \\ /2 \end{array} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}\cdot(1) \end{array} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} /2 \\ /3 \end{array} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}$$
$$b = -\frac{1}{2}$$

Vi kan nu ta steget:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

/Johan