

Provet består av totalt fem (5) uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 10p. Betygsgränser: 3: 25p, 4: 35p, 5: 45p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt: Elin Götmark 076-2186654.

1. Bestäm lösningen  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ ,  $t > 0$ , till systemet

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = 4u_1(t) \end{cases}$$

med begynnelsedata  $u(0) = (1, 2)$ .

2. Låt  $\Omega$  vara ett begränsat område i planet med rand  $\Gamma$  och utåt-riktad enhetsnormal  $n = (n_1, n_2)$ .

(a) Betrakta  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Visa att

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} u n_i ds, \quad i = 1, 2.$$

Du får anta att  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ .

(b) Antag att  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Bevisa m.h.a. (a) att

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} (uv) n_i ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, 2.$$

(c) Antag att  $u = (u_1, u_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Bevisa m.h.a. (a) att

$$\int_{\Omega} \nabla \times u dx = \int_{\Gamma} n \times u ds.$$

3. Bestäm största och minsta värde till

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_1^2 + x_2^2$$

på området  $C : x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ .

4. Låt  $S$  vara en sfär i  $\mathbb{R}^3$  med radie  $R$  som är placerad i origo.

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till  $S$  i punkten  $(R, 0, 0)$ .

(b) Beräkna arean av ytan till  $S$  som en integral genom att parametrisera  $S$

(c) Låt  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ges av  $u(x) = x/R^3$  och låt  $n$  vara utåtriktad enhetsnormal till  $S$ . Beräkna

$$\int_S u \cdot n \, ds.$$

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) \, dx,$$

där  $\Omega$  är triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  och  $(1, 1)$ .