

1. Bestäm lösningen  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ ,  $t > 0$ , till systemet

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = 4u_1(t) \end{cases}$$

med begynnelsedata  $u(0) = (1, 2)$ .

Med  $u = (u_1, u_2)$  kan systemet skrivas på matrisform

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(t) = Au(t)$$

med begynnelsedata  $u(0) = (1, 2)$ .  $A$  har egenvärden  $\lambda_1 = 2$  och  $\lambda_2 = -2$  med tillhörande egenvektorer  $v_1 = (1, 2)$  och  $v_2 = (1, -2)$ . Allmän lösning:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Initialdata ger

$$u(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

som har lösningen  $c_1 = 1$   $c_2 = 0$ .

2. Se AMBS vol. 2 Ch. 66..

3. Bestäm största och minsta värde till

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_1^2 + x_2^2$$

på området  $C : x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ .

Vi konstaterar att  $f$  är Lipschitzkontinuerlig på  $C$  och  $C$  är en sluten och begränsad mängd, så existensen är klar. Vi söker nu stationära punkter till  $f$ .

$$\nabla f(x) = (1 + 2x_1, 2x_2) = 0$$

har lösningen  $(x_1, x_2) = (-0.5, 0)$ . Detta är en kandidat till rollen som största alternativt minsta värde. Värdet är  $-0.25$ . Randens till enhetscirkeln  $C$  beskrivs enkelt med polära koordinater.  $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Vi har  $f(c(t)) = \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) = \cos(t) + 1$  som

har maximalt värde 2 för  $t = 0$  och minimalt värde 0 för  $t = \pi$ . Jämförelse av funktionsvärden ger största värde 2 och minsta värde  $-0.25$ .

4. Låt  $S$  vara en sfär i  $\mathbb{R}^3$  med radie  $R$  som är placerad i origo.

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till  $S$  i punkten  $(R, 0, 0)$ .

Normalvektor till planet  $(1, 0, 0)$ . Ekvation för planet:

$$N \cdot (x_1 - R, x_2 - 0, x_3 - 0) = 0, \quad \text{dvs } x_1 = R.$$

(b) Beräkna arean av ytan till  $S$  som en integral genom att parametrisera  $S$

se Example 65.1 p 931 i AMBS vol 3.

(c) Låt  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ges av  $u(x) = x/R^3$  och låt  $n$  vara utåtriktad enhetsnormal till  $S$ . Beräkna

$$\int_S u \cdot n \, ds.$$

Divergenssatsen ger

$$\begin{aligned} \int_S u \cdot n \, ds &= \int_V \operatorname{div} u \, dx = \frac{1}{R^3} \int_V \operatorname{div} (x_1, x_2, x_3) \, dx = \\ &= \frac{3}{R^3} \int_V dx = \frac{3}{R^3} \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi. \end{aligned}$$

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) \, dx,$$

där  $\Omega$  är triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  och  $(1, 1)$ .

$$\int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) \, dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{x_1} (x_1^2 + x_2^2) \, dx_2 \right] dx_1 = 1/3.$$