MATEMATISKA INSTITUTIONEN CTH och GU

Tentamen Analys och linjär algebra del C TMV035 K1/Bt1/Kf1 050317 e V

Provet består av totalt fem (5) uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 10p. Betygsgränser: 3: 20p, 4: 30p, 5: 40p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt: Georgios Foufas 070-2740902 alt. 031-7725328.

1. (a) Bestäm lösningen $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $t > 0$, till systemet

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -5u_1(t) - 2u_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsedata $u(0) = (1, 1)$.

(b) Skissa fasporträtt av lösningen och avgör stabilitet.

2. (a) Skriv ett Matlab-program som beräknar dubbelintegralen

$$\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

med numerisk kvadratur för $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ med vald noggrannhet. samt plottar funktionsytan $x_3 = f(x_1, x_2)$ på $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Utför den första iterationen i Ditt program för hand och illustrera med figur och text vad Du beräknar.

3. Bestäm de stationära punkterna till

$$f(x_1, x_2) = -x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

och finn ut alla lokala maximi- minimi- och sadelpunkter till f.

Skissa nivåkurvorna till f.

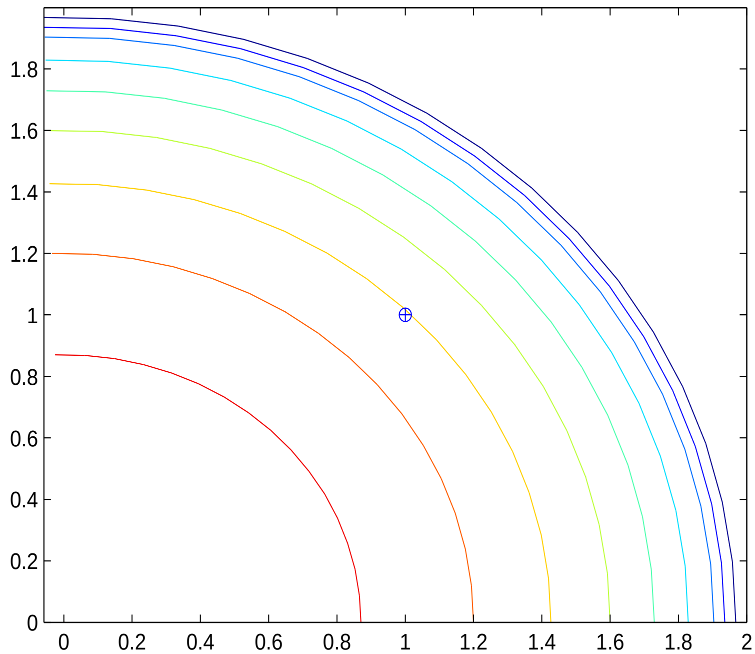

Figure 1: Level curves of a sphere

.

4. Låt S vara en sfär i $\mathbb{R}^3$ med radie 2 som är placerad i origo. I Figur 1 ser vi nivåkurvor till S i första oktanten.

(a) Parametrisera den del av sfären som ligger i första oktanten som en funktionsyta $x_3 = f((x_1, x_2)$, dvs parametriserad i variablerna (x_1, x_2) och rita en figur av denna.

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan S i $(1, 1, f(1, 1))$.

(c) Beräkna volymen av den kropp som innesluts av S, $x_1x_2 - planet$, $x_1x_3 - planet$ samt $x_2x_3 - planet$ som en volymsintegral.

(d) Rita in gradienten ∇f i punkten P i Figur 1. Rita även in tangenten till den nivåkurva som går igenom punkten och visa att dessa är ortogonala.

.

5. Lå $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och låt $x = (x_1, x_2)$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma f \cdot d\mathbf{s}$$

för fältet

$$f(x) = \frac{(-x_2, x_1)}{\|x\|^2}. \tag{1}$$

då

(a) Γ är $3/4$ varv moturs av enhetscirkeln med centrum i origo med startpunkt i $(1, 0)$ och ändpunkt i $(0, -1)$.

(b) Γ är $3/4$ varv moturs av cirkeln med radie 1 och centrum i $(1, 1)$ med startpunkt i $(2, 1)$ och ändpunkt i $(0, 1)$.

Kommentera resultatet och rita figurer.