MATEMATISKA INSTITUTIONEN CTH och GU

Losningar Analys och linjär algebra del C TMV035 K1/Bt1/Kf1 050317

Egenvärdesproblemt $det(A - \lambda I) = 0$ ger $\lambda_1 = -1 + 2i$ och $\lambda_2 = -1 - 2i$. Motsvarande egenvektorer fås genom att lösa systemet $A - \lambda I = 0$. Vi får $v_1 = (1, 1 - 2i)$ och $v_2 = (1, 1 + 2i)$. Allmän lösning ges av

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

$$u(0) = (1,1) \text{ ger } c_1 v_1 + c_2 v_2 = (1,1) \text{ vilketger } c_1 = c_2 = 1/2$$

2. Se tex studio 4.

3.Vi har gradienten

$$\nabla f(x_1, x_2) = (x_2(x_1^2 - 1)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}, x_1(x_2^2 - 1)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

$\nabla f = 0$ ger fem punkter: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ och $(-1,-1)$. Vi har Hessianen

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2(3 - x_1^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} & (x_1^2 - 1)(1 - x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \\ (x_1^2 - 1)(1 - x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} & x_1 x_2(3 - x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \end{pmatrix}$$

Vi får:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ egenvarden } \ -1, 1 \text{ sadelpunkt}$$

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \text{ positiva egenvarden minimum}$$

$$H(1,-1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \text{ negativa egenvarden maximum}$$

$$H(-1,1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \text{ negativa egenvarden maximum}$$

$$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \text{ positiva medpositivaegenvarden minimum}$$

.

4. (a) $S : S(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2})$, $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

(b) Definiera $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$. Detta ger att vi kan se 'vår' yta som nivåytan $g(x) = 0$. En punkt (x_1, x_2, x_3) ligger i tangentplanet till ytan i $(1, 1, \sqrt{2})$ ifall $\nabla g(1, 1, \sqrt{2}) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - \sqrt{2}) = 0$. Det ger ekvationen $x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3 = 4$.

(c) Med sfäriska koordinater fås

$$Vol = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \sin(\phi) dr dt d\phi = 4\pi/3.$$

(d) $f(s(t))$ =konstant. Kedjeregeln ger $D_t(f(s(t)) = \nabla f(s(t)) \cdot s'(t) = 0$

5. (a) På Γ har vi $\|x\| = 1$ varvid $f(x) = (-x_2, x_1)$. Vi parametriserar $\Gamma : s(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

$$\int_\Gamma f \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{3\pi/2} f(s(t)) \cdot s'(t) dt = \int_0^{3\pi/2} dt = 3\pi/2$$

(b) Vi har $rot f = 0$ utanför origo. Då finns en potential, som i detta fall ges av

$$u(x) = arctan(x_2/x_1).$$

$$\int_\Gamma f \cdot d\mathbf{s} = arctan(0/1) - arctan(1/2) = -arctan(1/2)$$

Anm: En annan möjlig potential är

$$u(x) = -arctan(x_1/x_2).$$

$$\int_\Gamma f \cdot d\mathbf{s} = -\lim_{\epsilon \to 0} arctan(1/\epsilon) - (-arctan(2)) = -\pi/2 + arctan(2)$$

som ger samma värde. Integrations längs koordinataxlarna ger samma resultat.