Anwendungsorientierte Partielle-Differentialgleichungssysteme

Prof. Dr. Julie Rowlett

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Motivation und allgemeine Anleitung

Die Mathematik ist eine universelle Sprache. In der Informatik werden viele wichtige Ideen in der mathematischen Sprache ausgedrückt. Dementsprechend ist es wichtig für Sie, diese Sprache zu beherrschen. Wie funktionieren Computers? Was ist ihre Sprache? Die Sprache der Mathematik. Programms sind auf der mathematische Sprache gebaut.

Vielleicht denken Sie, dass Mathematik die Sie irgendwann brauchen werden, mit einem Taschenrechner oder Computer gemacht werden kann und dass Sie dementsprechend keine Mathematik lernen müssen. Das stimmt nicht. Sie können etwas sehr wichtiges tun, was kein Taschenrechner oder Computer tun kann: Sie können denken. Zum Beispiel Ihr Computer zeigt Ihnen eine Antwort, die überhaupt keinen Sinn macht. Sie besitzen einen ,, Bullshit Detector." Sie können erkennen, ob ein Ergebnis sinnvoll ist oder eben Bullshit ist.

1.1 Motivierende Beispiele

Wir werden viele verschiedene Situationen analysieren und in der Zukunft es gut sein kann, dass Sie mit vielen verschiedenen Menschen arbeiten. Jeder hat seine Lieblings-Notation für eine gewöhnliche Ableitung wie z.B.

$$\frac{dy}{dx}$$

bedeutet die Ableitung der Funktion $y = y(x)$ bzgl. x. Es könnte auch sein, dass x zusätlich auf weiteren Variablen abhängt (auf $t =$ Zeit z.B.). Also die Funktion die hier gemeint ist, ist das Ergebnis wenn wir $y = y(x)$ bzgl. x ableiten. Dieses ist eine Funktion die von x abhängt wobei es egal ist ob x eine Variable ist oder noch eine Funktion.

Die Notation $y'(x)$ wird auch verwendet allerdings eher im Falle $y = y(x)$ ist eine Funktion der Variable x und x keine weitere Funktion (die z.B. auf t abhängt) ist.

Für Funktionen, die auf Zeit abhängen ist die Notation

$$\dot{x}, \quad \dot{y}, \quad \dot{v}$$

besonders beliebt. In der Regel werden x und y Funktionen von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}$ aber v ist oft für Geschwindigkeit gemeint und könnte eine Funktion von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sein. In diesem fall ist für

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)), \quad \dot{v} = (\dot{v}_1, \dot{v}_2),$$

und analog für $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$.

Für partielle Ableitungen ist oft die Notation

$$\partial_x$$

verwendet, um die Ableitung bzgl. x hinzuweisen. Die übliche Noation

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

ist viel zu schreiben. Für eine Funktion u wird oft auch

$$u_x, \quad u_y, \quad u_{xy}$$

als Abkürzungen für die Ableitungen bzgl. der tiefgestellten Variablen.

Sie sollen sich um jede Notation gewöhnen weil eigentlich ist die Schreibweise für die Mathematik sowohl für die Anwendungen egal.

1. Ein physikalisches Beispiel: Newtons-Gesetz sagt uns, dass die Kraft auf einem Objekt das Produkt des Masses ein Objekts mit sein Beschleunigung ist, also

   $$F = ma.$$

   Wieso ist dieses eine Differentialgleichung? Beschleunigung ist die Zeit-Ableitung der Geschwindigkeit des Objekts, $v = v(t)$. Die Kraft F ist ebenso eine Funktion, die von der Geschwindigkeit, Position, sowie von der Zeit abhängt. Es sei $u(t)$ die Position des Objekts. Also ist

   $$m\dot{v}(t) = F(t, u, v), \quad v(t) = \dot{u}(t),$$

   also ist

   $$m\ddot{u}(t) = F(t, u, \dot{u}).$$

   Wir haben also ein DG mindestens der Grad zwei.

2. Ein militärisches Beispiel: Eine Rakete feuert in die Luft mit dem Mass m, Geschwindigkeit v_0 im Zeitpunkt $t = 0$ als sie gefeuert worden ist, und mit dem Winkel nach oben von θ_0. Allerdings gibt es die Anziehungskraft der Erde, die die Rakete nach unten zieht. Ferner ergibt die Atmosphäre eine wiederstehende Kraft auf der Rakete, welche proportional zu der Geschwindigkeit, d.h.

   $$R = \beta v, \quad v = v(t) \text{ ist die Geschwindigkeit im Zeitpunkt } t,$$

   wobei R die wiederstehende Kraft der Atmosphäre ist und β eine Konstante ist. Im Zeitpunkt t ist die Rakete im Punkt $(x(t), y(t))$. Die Geschwindigkeit ist $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Wir können diese auch so schreiben

   $$v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}(\cos\theta(t), \sin\theta(t)),$$

mit dem Winkel

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right).$$

Es gibt zwei Kräfte, die die Rakete beeinflussen: nach Unten laut Anziehungskraft der Erde durch mg gegeben und die wiederstehende Kraft der Atmosphäre $R(t) = \beta v(t)$. Die Rakete fliegt nach Newtons Gesetz:

$$F = \sum ma.$$

Der x-Teil der wiederstehenden Kraft ist $-\beta\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\cos\theta(t)$ und der y-Teil ist $-\beta\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\sin\theta(t)$. Laut Newtons-Gesetz

$$ma_x = \sum F_x \implies m\ddot{x}(t) = -\beta\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\cos\theta(t)$$

$$= -\beta\dot{x}(t), \quad \text{da } \theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right).$$

Ebenso berechnen wir

$$ma_y = \sum F_y \implies m\ddot{y}(t) = -mg - \beta\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\sin\theta(t)$$

$$= -mg - \beta\dot{y}(t).$$

Wir haben also folgende Gleichungssysteme

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) = 0,$$

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) = -mg.$$

Die Anfangsbedingungen sind im $t = 0$, dass $x(0) = 0 = y(0)$, $\dot{x}(0) = ||v_0||\cos\theta_0$, $\dot{y}(0) = ||v_0||\sin\theta_0$. Wir haben eine Differentialgleichungssysteme deren Gleichungen linear, gewöhnlich, und Grad zwei sind. Eine ist homogen und die andere ist nicht. Wenn wir wollen, dass unsere Rakete ins Ziel schiesst, müssen wir die Gleichungen lösen. Ferner wollen wir ein Computer-Programm darstellen, die solche Gleichungen ganz genau löst, also keine numerische Lösung sonder eine echte Lösung - sie ist besser weil sie genau richtig ist!

3. Ein Wasserbehalter enthält ein Volumen $V(t)$ welches leider vergiftet mit dem Prozentanteil $c(t)$ im Zeitpunkt t ist. Um den Anteil des Gifts zu reduzieren wird Wasser mit der Geschwindigkeit Q_{in} ins Behalter rein gepumpt. Leider ist das Wasser auch vergiftet aber mit einer geringen Konzentration c_{in}. Wir nehmen an, dass die Flüssigkeiten mischen mit einander sofort. Wir lassen die Flüssigkeit raus dem Behalter fliessen mit einer Geschwindigkeit von Q_{out}. Angenommen im Zeitpunkt $t = 0$ ist das Volumen V_0 mit Konzentration des Gifts c_0. Die Konzentration des Gifts im Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$[V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t]\dot{c}(t) + Q_{in}c(t) = Q_{in}c_{in}, \quad c(0) = c_0.$$

Wir haben hier eine gewönliche DG ersten Grades.

4. Galloping Gertie (Googlen Sie mal). Wir haben eine hängende Brücke. Es gibt ein Kabel von dem Anhänger runter zu die Brücke hangen. Um mathematische zu betrachten wir definieren der Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ als der Tiefstpunkt des Kabels. Die Gleichung, die die Form des Kabels bestimmt ist

$$\frac{dy}{dx^2} = \frac{w(x)}{H},$$

wobei $w(x)$ das Gewicht der Brücke im Punkt x ist und H die Spannung des Kabels im Punkt $(0,0)$ ist. Es geht hier um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweites Grades.

5. Auto-Dampfungselement. Es sei $u(t)$ die Höhe der Strasse und $y(t)$ die Höhe eines Autos mit ein Dampfungselement zwischen die Räder und Fahrgestelle. Diese sind verkuppelt

$$y''(t) + \frac{k_d}{m}y'(t) + \frac{k_s}{m}y(t) = g + \frac{k_d}{m}u'(t) + \frac{k_s}{m}u(t),$$

wobei m der Mass des Autos ist, k_s die Elastizität/Steifheit des Feders ist und k_d die Viskosität des Dampfungselements ist. (g ist immer Beschleunigung laut Anziehungskraft der Erde also etwa $-9,8m/s^2$). Hier geht's schon wieder um eine DGS.

1.2 Allgemeine Anleitung um angewandte Probleme mit PDGS zu lösen

1. Finden Sie, die physikalische Gesetze, die zu Ihrer Situation passt. Was sind die Kräft? Wie ist die Geometrie?

2. Verwenden Sie die physikalische Gesetze sowie Geometrie Ihrer Situation um die Umbekannte, die Sie wissen wollen, miteinander zu verknüpfen als Gleichungen. Sie müssen hier verstehen, wie die Unbekannte im Laufe der Zeit sich ändern, laut physikalische Gesetze. Dadurch werden Sie Ableitungen haben und zu (partielle) Differentialgleichungen kommen.

3. Vereinfachen Sie Ihre Gleichungen so weit wie möglich.

4. Klassifizieren Sie Ihre Gleichungssystem.

5. Stellen Sie fest, welche Konstante Sie haben und verwenden Sie sie um die Anfangsbedingungen fest zu stellen.

6. Verwenden Sie passende Lösungsmethode, Tricks, Transforms, oder zum Not numerisch, um das PDGS zu lösen.

7. Überprüfen Sie, dass Ihre Lösung sinnvoll ist. Vergleichen Sie, wenn möglich, was Ihre Gleichung prognostiziert mit was tatsächlich passiert. In diesem Schritt kann Sie mögliche Fehler vermeiden!

Kapitel 2

Klassifizierung (P)DGS

Das erste was zu tun müssen ist zu entscheiden um was für eine (P)DG(S) Sie haben, damit Sie die passende Lösungsmethode verwenden können. Dieser Teil ist bestimmt der einfachste aber trotzdem sehr wichtig also passen Sie gut auf.

2.1 Partielle oder gewöhnliche

Definition 2.1.1. *Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und auch für Ihre Ableitungen. Die Gleichung muss nicht unbedingt die Ableitung(en) der Funktion enthälten.*

Beispiele:

1. $u' + u = 0$.
2. $u^2 - \log(u') = e^u$.
3. $u(x) + x^3 = \sin(x)$.

Übung 2.1.2. *Lösen Sie die obigen DGs so weit Sie schon können.*

Wenn wir uns mit gewöhnliche Differentialgleichungen (oft einfach DG genannt) beschäftigen, suchen wir eine unbekannte Funktion (oder mehr) die die Gleichung erfült. Es kann eine Lösung geben oder mehre oder keine. Es hängt davon ab, was für eine Gleichung wir haben. Schwerpunkt ist: die Lösung ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Oft werden solche Funktion verwendet, um physikalische Eigenschaften (Lage, Geschwindigkeit, Druck, u.s.w.) zu beschreiben im Laufe der Zeit, also ist die Funktion eine Funktion von $[0, \infty)$ (Zeit) nach $\mathbb{R}$.

Wesentliche schwieriger sind partielle DGs.

Definition 2.1.3. *Eine partielle DG ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion die $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ abbildet, wobei $n \geq 2$. Die Gleichung kann auch die partielle Ableitungen der Funktion enthalten.*

Eine partielle DG ist so genannt, weil sie partielle Ableitungen enthält wobei eine gewöhnliche DG nur gewöhnliche Ableitungen enthält. Wegen Schreibweise : wir schreiben (P)DG um zu bedeuten dass es um beide DGs sowie PDGs geht.

Beispiele:

1. $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Diese Gleichung ist eine Art der Laplace-Gleichung.

2. $u : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)_t \to \mathbb{R}$, $\nabla \cdot \nabla(u^2) = u_t$. Diese Gleichung beschreibt Diffusion.

3. $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u_{xx} = u_{tt}$.

Übung 2.1.4. *Lösen Sie die obigen PDGs so weit Sie schon können.*

2.2 Homogenität

Wenn Sie eine PDG haben sollen Sie zuerst alle Unbekannte (sowie Ableitungen) auf der linken Seite aufräumen. Dann kann Sie wegen Homogenität entscheiden.

Definition 2.2.1. *Eine (P)DG ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sowie für Ihre Ableitungen. Man schreibt die Gleichung, sodass die unbekannte sowie alle ihre Ableitungen, die es in der Gleichung gibt, auf der linken Seite stehen. Diese Schreibweise nennt man ,,Normalform." Wenn auf der rechten Seite eine Null steht, heisst die Gleichung homogen. Falls nicht, ist sie nicht homogen.*

Übung 2.2.2. *Welche der obigen Beispiele sind homogen?*

2.3 Der Grad

Der Grad eine (P)DG bestimmt etwa die Schwierigkeit der (P)DG.

Definition 2.3.1. *Es sei eine (P)DG in Normalform. Die höchste Grad der Ableitung, die auf der linken Seite steht, ist der Grad der (P)DG.*

Übung 2.3.2. *Bestimmen Sie dei Grad der obigen Beispielen.*

2.4 Linearität

In der Praxis spielen lineare (P)DGs eine sehr wichtige Rolle. Theoretische sowie numerische Lösungsmethode sind häufig auf linear (P)DGs basiert.

Definition 2.4.1. *Es sei eine (P)DG in Normalform geschrieben. Man schaut auf der linken Seite. Steht auf der linken Seite die Summe der Funktion sowie ihre Ableitungen jeweils mit einer bekannte Funktion multipliziert? Dann heisst die (P)DG* linear. *Falls nicht, heisst sie* nicht linear.

Proposition 2.4.2. *Wir haben eine DG Grades n, die linear ist. Es sei u die Unbekannte Funktion der DG. Dann gibt es genau $n+1$ bekannte Funktionen sowie eine bekannte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass die Gleichung so dargestellt werden kann*

$$c_0 u + c_1 u' + c_2 u'' + \ldots + c_n u^{(n)} = h.$$

Beweis: Laut Definition der Linearität, wenn wir die DG in Normalform schreiben, auf der linken Seite steht die Funktion bzw. ihre Ableitungen jeweils multipliziert mit bekannten Funktion (können auch Konstante sein) und danach sind diese jeweils addiert. Da der DG Grad n besitzt, gibt es jeweils eine bekannte Funktion c_0, c_1, $\ldots c_n$ die mit bzw. u, u', $\ldots u^{(n)}$ multipliziert sind. Diese sind danach addiert. Irgendwas, laut Definition Normalform, steht auf der rechten Seite, die nichts mit u zu tun hat. Also nennen wir was auf der rechten Seite steht einfach h und h ist also eine *bekannte* Funktion. Dann sieht die DG laut der Proposition aus.

Übung 2.4.3. *Bestimmen Sie die Linearität (oder nicht) der obigen Beispielen.*

2.4.1 Koeffizienten

Wen wir eine lineare (P)DG haben gibt es noch zwei Möglichkeiten.

Definition 2.4.4. *Wir haben eine (P)DG die linear ist und in Normalform geschrieben ist. Sind die Funktionen laut der Definition linear jeweils konstante Funktionen und ist h auf der rechten Seite auch eine konstante? Dann hat die (P)DG konstante Koeffizienten. Falls nicht, dann hat sie nicht konstante Koeffizienten.*

Bemerkung 2.4.5. *Wir sprechen nur von konstante Koeffizienten wenn die (P)DG* linear *ist.*

Übung 2.4.6. *Für die obigen Beispiele, die linear sind, bestimmen Sie ob sie konstante Koeffiziente besitzen oder nicht.*

2.5 DGSysteme

Wir werden uns nur mit Systeme Differentialgleichungen beschäftigen.

Definition 2.5.1. *Eine Differentialgleichungssysteme (DGS) ist eine Sammelung von Differentialgleichungen für eine Sammelung von unbekannte Funktionen.*

Wir schreiben (P)DG(S) um zu bedeuten, dass es entweder um eine PDG oder eine DG oder eine DGS geht.

2.6 Wie wild ist das Biest?

Ein Mathematiker, M. Keel, der Expert für einige die schwierigste PDG ist, hat so beschrieben, wie er eine Gleichung löst. Er beschreibt die Lösung als ein wildes Biest. Zuerst baut man einen Ring ums Biest herum von Feuer. Danach etwas von den Feuerring entfernt baut man einen Ring volle Eiswürfel. Falls das Biest trotzdem durchs Feuer flieht und danach auch durch die Eiswürfel rennt hat das Biest keinen Haar mehr (alles verbrannt) und friert. Nur dann, können wir das Biest unter Kontrolle bringen.

Also, die Lösung einer (P)DG(S) zu fangen ist wie ein ganz wildes Biest zu fangen. Wie schwierig ist das Biest zu fangen? Hier sind einige Hinweise:

1. DG sind einfacher als PDG.
2. Je niedriger der Grad, desto einfacher.
3. Homogen ist in der Regel *viel* einfacher als nicht homogen.
4. Linear ist in der Regel *viel* einfacher als nicht linear.
5. Konstante Koeffizienten sind einfacher als nicht konstante Koeffizienten.
6. Eine DGS ist nur so schwierig wie die DGs sie enthält. Kann also ganz zahm sein, falls jede DG zahm ist.

Wir werden die Abkürzung wie beim FBI verwenden, für die Unbekannte Funktion : Unsub.

Übung 2.6.1. *Woher kommt der Begriff „Unsub?"*

2.7 Übungsaufgabe

Klassizifieren folgende (P)DG(S) und schreiben sie in Normalform.

1. $f' + f'' = 0.$
2. $e^f + 1 = 0$
3. $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$, wobei $y = y(x)$.
4. $2ty'4y = 3$
5. $\frac{y'}{y} = e^t$
6. $y' = \frac{t}{y}$
7. $x'' = 5$

8. $\frac{dy}{dx} = x^2$

9. $y' + 5y = 2$

10. $y'' = -y$

Versuchen Sie die obigen (P)DG(S) zu lösen. Einige können Sie bestimmt schon! Welche von oben sind die schlimmste/wildeste bzw. zahmste (P)DGs?

Kapitel 3

DG Grad eins

Wir fangen mit dem Grad eins. Vor wir (P)DG(S) lösen können wir einiges betrachten ganz ohne die Gleichung lösen zu müssen. Das heisst, wir können Richtungsfelder schon berechnen. Ein DG Grades eins klingt vielleicht total einfach. Sind sie aber leider nicht. Hier sind einige Beispiel, was für Schwierigkeiten ins Bild kommen können.

1. Auch bei einer linearen DG Grades eins mit konstante Koeffiziente (das einfachste Beispiel) kann es schwierig sein, wie z.B. $2u' + u = e^{\sin(\ln(t))} + t^3 - \frac{\ln(t)}{t^4}$.

2. Die DG Grades eins könnte aber noch schlimmer sein: sie könnte nicht linear sein wie z.B.
$$(u')^4 + e^u = 0.$$

3.1 Richtungsfelder

Vor wir eine DG lösen oder versuchen zu lösen können wir in einigen Fällen schon einiges über die Lösung grob bestimmen. Um diese Idee zu motivieren, fangen wir mit einem Beispiel an. Das einfachste Beispiel ist ein fallendes Objekt. Angenommen haben Sie die Prüfung nicht bestanden, bauen trotzdem Flugzeuge, und einen geht kaputt und fällt Richtung Erde. Wir haben zwei Kräfte. Eine ist die Anziehungskraft der Erde, die Richtung Erde zieht, und die zweite ist der Luftwiderstand, die nach oben druckt.

Die Anziehungskraft
$$F_g = mg, \quad g = -9,8m/s^2,$$
wobei m der Mass des Objekts (Flugzeugs in diesem Fall) ist. Wir nehmen an, dass die positive Richtung nach oben ist wobei die negative Richtung gegen die Erde ist. Dann ist die Luftwiderstandskraft
$$F_a = \beta v.$$
Laut Netwons-Gesetz gilt
$$F = ma = F_g + F_a \implies m\dot{v} = mg + \beta v.$$

Um zu vereinfachen, teilen wir durch m, also

$$\dot{v} = g + \beta vm.$$

Die Idee des Richtungsfeld ist

> Ohne die (P)DG(S) zu lösen untersuchen wir, was passiert, wenn wir Werte in die Gleichung rein tun.

Angenommen ist der Mass des Objekts 1 Tonne und $\beta = 0.1$. In der Regel ist β von der Geometrie des Objekts zu bestimmen. Je aerodynamischer desto kleiner wird β. Verwenden wir „Tonne" als Mass-Einheit. Dann ist die Gleichung

$$\dot{v} = -9.8 + 0.1v.$$

Jetzt können wir die Gleichung untersuchen. Der Prinzip ist folgende:

1. Sie haben eine DG Grades eins (linear oder nicht - egal!) sodass alles ausser die Funktion sowie Ihre Ableitung bestimmt sind (d.h. alles ausser die unbekannte Funktion sowie ihre Ableitung sind entweder Konstante oder bekannte Funktion).

2. Es gibt *eine* Einschränkung : Sie müssen die Gleichung lösen können, damit auf einer Seite Sie die Ableitung der Unsub haben (z.B. auf der linken Seite) und auf der anderen Seite steht der Rest.

3. Da es um eine DG Grades eins geht, nennen wir die Variable, von der die Unsub abhängt, t.

4. Um den Richtungsfeld zu bestimmen, wählen Sie einen Wert für die Unsub und den Wert für $t = 0$. Setzen Sie diese Werte ein und rechnen Sie, was für einen Wert die Ableitung der Unsub raus kommt.

5. Jetzt ist Zeit zum zeichnen. Zeichnen Sie $\mathbb{R}^2$ und im Punkt

$$(0, u),$$

   wobei u der Wert, die Sie für den Unsub gewählt haben ist, also in dem Punkt zeichnen Sie einen Pfeil, der in die Richtung der Ableitung steht. Z.B. ist die Ableitung des Unsubs gross und positiv, soll der Pfeil steil nach oben richten. Ist die Ableitung des Unsubs gleich null, soll der Pfeil horizontal richten. Ist die Ableitung des Unsubs nur ein wenig negativ, soll der Pfeil fast horizontal aber nur ein bisschen nach unten richten.

6. Folgen Sie den Pfeil eine Zeitschritt nach rechts. Jetzt verwenden Sie $t = 1$ und den u-Wert, worauf Sie laut Richtung des Pfeils gekommen sind. Machen Sie das gleiche. Weiter so.

7. Jetzt wählen Sie für $t = 0$ ein neuen u-Wert. Tun Sie das gleiche nochmal.

8. Immer weiter so und haben Sie einen Richtungsfeld.

Beispiele: Jetzt führen wir dieses Prozess durch für unseres Beispiel. Unser Unsub heisst v. Wählen wir für $t = 0$ auch $v = 0$. Setzen wir dieses ein:

$$\dot{v}(0) = -9.8.$$

Also im Punkt $(0, 0)$ zeichnen wir einen Pfeil Richtung unten rechts. Jetzt also im Zeitpunkt $t = 1$ soll unser v etwas 9.8 weniger sein also berechnen wir $v'(1)$ mit den v-Wert -9.8. Dementsprechend ist

$$\dot{v}(1) = -9.8 - .98 = -10.78.$$

Und so weiter.

Es sei denn wir fangen mit $v = 100$ an. Dann im Punkt $(0, 100)$ berechnen wir

$$\dot{v}(0) = -9.8 + 10 = 0.2.$$

Also im Punkt $(0, 100)$ soll der Pfeil leicht nach oben richten. Nach einem Zeitschritt vorwärts setzen wir

$$v(1) = 100 + 0.2 = 100.2,$$

und berechnen wir

$$v'(1) = -9.8 + 10.02 = 0.22.$$

Und so weiter.

Falls Sie feiner oder grober den Richtungsfeld betrachten möchten sollen Sie dran denken, dass für eine Funktion u ist $u'(t)$ die Steigung des Graphs von u. Also wenn Sie den Wert nach 10 Zeitschritte nehmen wollen, dann multiplizieren Sie was Sie gerade für u' berechnet haben mit 10 und addieren Sie dieses mit dem Wert die Sie zuletzt für u hatten. Dann haben Sie einen groberen Richtungsfeld. Falls Sie aber einen ganz feinen Richtungsfeld berechnen möchten und dementsprechend nach $0,01$ Zeitschritte, dann multiplizieren Sie $0,01$ mit dem Wert für u' und addieren Sie das Ergebnis, um den neuen Wert u zu berechnen (im Zeitpunkt $0,01$ später).

Es folgt ganz einfach von dem Tat, dass die Steigerung ist

$$\frac{\text{Anstieg}}{\text{Ablauf}}.$$

Für den neuen u Wert, müssen Sie den Anstieg berechnen und dieses Addieren. Wenn Sie also den Ablauf eins haben, ist der Anstieg gleich u'. Wenn Sie aber einen Ablauf von $t \mapsto t + 10$ haben, dann da

$$u' = \frac{\text{Anstieg}}{\text{Ablauf}} \implies u \mapsto u + 10u',$$

da der Anstieg gleich u' mal Ablauf ist. Genau die gleiche Idee wenn Sie einen kürzeren Ablauf wie $0,01$ betrachten.

3.2 Übungsaufgabe

Berechnen Sie Richtungsfelder folgender DG wenn möglich. Wenn nicht möglich, erklären Sie, warum.

1. $y' = (y^2 - y - 2)(1 - y)^2$
2. $(y')^2 - 4 = y$
3. $e^{2u'} = u^3$
4. $\sin^2(u') + \cos^2(u') = \ln(u)$
5. $(u')^5 + 4u' = u$
6. $u' = u - t$, wobei $u = u(t)$
7. $y'' = 5$

3.3 Lineare DG

Wir fangen mit ein motivierendes Beispiel an. Wenn viele Menschen in einem Hörsaal sitzen, der Saal wärmer wird? Ein physikalisches Gesetz von Newton ist :

> Newton's Law of Cooling states that the rate of change of the temperature of an object is proportional to the difference between its own temperature and the ambient temperature (i.e. the temperature of its surroundings).
>
> Die Geschwindigkeit mit der die Temperatur eines Objekts sich ändert ist proportional zu dem Unterschied zwischen seiner eigenen Temperatur und dem Temperatur der Umgebung.

Das Gesetz ist für Objekte, die selbst keine Hitze produzieren. Wenn wir im Hörsaal sitzen, arbeiten unsere Körper, damit wir immer 98 Grad Fahrenheit Körpertemperatur haben. Das heisst, wir können das Gesetz nicht direkt anwenden, um zu berechnen, was im Hörsaal passiert. Das Gesetz können wir nur anwenden für jemanden der tot ist und daliegt. In diesem Fall besagt das Gesetz : die Geschwindigkeit mit der der Körper die Umgebungstemperatur annimmt, ist proportional zu dem Unterschied zwischen der Körpertemperatur und der Umgebungstemperatur. Schauen Sie auch Krimis im Fernsehen? Dr. Iles erkennt, wenn jemand gestorben ist, an der Körpertemperatur. Wie macht sie das? Es sei $v(t)$ die Geschwindigkeit mit der die Körpertemperatur sich ändert. Es sei 68 Grad F die Hörsaalstemperatur. Dann gilt :

$$v(t) \sim l(t) - 68,$$

wobei $l(t)$ das Körpertemperatur ist. Was bedeutet $\sim$?

Definition 3.3.1. *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen. Wir schreiben*

$$f(x) \sim g(x)$$

genau dann, wenn es eine Konstante $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ gibt, sodass gilt :

$$f(x) = kg(x).$$

Dementsprechend gilt :

$$v(t) = k\left(l(t) - 68\right).$$

Es gibt auch eine Beziehung zwischen $v(t)$ und $l(t)$. Da $v(t)$ die *Geschwindigkeit* mit der die Körpertemperatur sich ändert und $l(t)$ die Körpertemperatur ist, gilt :

$$l'(t) = v(t).$$

Wir können dann schreiben :

$$l'(t) = k\left(l(t) - 68\right).$$

Übung 3.3.2. *Klassifizieren Sie diese (P)DG.*

3.3.1 Theorie

Es gibt zwei Sätze, die wir nicht beweisen werden, die allerdings gut zu wissen sind. Zuerst definieren wir folgende Art DG.

Definition 3.3.3. *Eine DG für eine unbekannte Funktion u heisst ein Anfangswertproblem (AWP) wenn es eine DG für u gibt sowie $t_0 \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}$ sodass es auch gelten muss $u(t_0) = u_0$.*

Satz 3.3.4. *Für eine AWP der Form*

$$u' + p(t)u = g(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

sodass p und g stetig auf dem Intervall $a < t < b$ wobei t_0 sich ebenfalls in diesem Intervall befindet, dann gibt es genau eine Lösung auf dem Intervall.

Satz 3.3.5. *Für ein AWP der Form*

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0,$$

falls $f(t,u)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial u}$ stetig auf einem Rechteck $a < t < b$, $c < u < d$ sodass der Punkt (t_0, u_0) in dem Rechteck liegt, dann gibt es ein $h > 0$ sodass auf dem Intervall $t_0 - h < t < t_0 + h$ es genau eine Lösung des AWPs gibt. Dieses Intervall befindet sich in dem Intervall $a < t < b$.

Die Sätze sind wichtig, weil sie Ihnen sagen, wann Sie schon wissen können, dass Sie genau eine eindeutige Lösung zu suchen haben, und dass die Lösung überhaupt existiert. Für manche (P)DG(S) gibts keine Lösung oder gibts unendlich viele.

3.3.2 Konstante Koeffizienten

Wenn die Koeffizienten konstant sind, haben wir so eine DG

$$au' + bu = c.$$

Es gibt jetzt zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Falls $a = 0$ haben wir ein DG Grades 0. Es sieht so aus :

$$bu = c.$$

Falls $b = 0$ dann ist es keine DG mehr, da es keine Unbekannte Funktion gibt. Falls $b \neq 0$, dann ist die eindeutige Lösung

$$u = \frac{c}{b}.$$

2. Falls $a \neq 0$ dann zuerst, nehmen wir an, dass die Gleichung homogen ist also ist $c = 0$. Dann zuerst machen wir diese DG als Gleichung für den Unsub u'

$$u' = \frac{-bu}{a} = \frac{-b}{a}u.$$

Das heisst, die Ableitung der Funktion ist gleich eine konstante mal die Funktion. Dieses soll Sie zur e Funktion führen da

$$f(x) = e^x \implies f' = f.$$

Wir haben allerdings eine konstante da vorne dieses $-b/a$. Allerdings allgemeiner gilt

$$f(x) = e^{g(x)} \implies f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = g'(x)f(x).$$

Laut der Kettenregel ist für

$$u(x) = e^{-bx/a} \implies u'(x) = \frac{-b}{a}e^{-bx/a} = \frac{-b}{a}u(x).$$

Wir können auch so eine Funktion u mit einer Konstante multiplizieren und das ist ebenso eine Lösung also sind die Lösungen allgemein

$$u(x) = ce^{-bx/a}.$$

3. Jetzt betrachten wir den Fall, $c \neq 0$. Dann ist die Gleichung

$$u'(x) = -\frac{b}{a}u(x) + \frac{c}{a}.$$

Vieles in DG-Lösen ist einfach nehmen was wir schon wissen und versuchen es zu verändern damit wir eine Lösung finden. Versuchen wir also

$$u(x) = e^{-bx/a} + K,$$

wobei K eine konstante ist. Dann ist

$$u'(x) = \frac{-b}{a} e^{-bx/a},$$

wobei

$$-\frac{b}{a} u(x) + \frac{c}{a} = -\frac{b}{a} e^{-bx/a} - \frac{bK}{a} + \frac{c}{a}.$$

Damit diese gleich sind, muss

$$-\frac{bK}{a} + \frac{c}{a} = 0 \iff K = \frac{c}{b}.$$

Eine Lösung der DG ist also

$$u(x) = e^{-bx/a} + \frac{c}{b}.$$

4. Allgemein ist die Lösung eine DG der Form

$$u' = Au + B,$$

$$u = Ce^{At} - B/A.$$

Schauen wir, dass es tatsächlich funktioniert

$$u' = ACe^{At}, \quad Au + B = A(Ce^{At} - B/A) + B = ACe^{At}$$

passt.

Übung 3.3.6. *Verwenden Sie diese Methode um die DG zu lösen*

$$l'(t) = k\left(l(t) - 68\right).$$

3.4 Gleichgewicht-Lösung

Wir habe gesehen, dass manchmal kommen wir zum Punkt, sodass der Richtungsfeld einfach gerade nach rechts zielt, also von dem Zeitpunkt sowie Funktionswert weiter im Laufe der Zeit, wird der Unsub laut der DG sich nicht ändern. Dieses Phänomän nennt man eine Gleichgewicht-Lösung.

Definition 3.4.1. *Es sei eine DG Grades eins der Form*

$$u' = F(u),$$

sodass F nur von u abhängt also nicht von t. Falls es eine u_0 gibt, sodass es gilt

$$F(u_0) = 0,$$

dann zeigt die Richtungsfelder, die im Punkt (t_0, u_0) anfangen, für jede t_0, immer gerade nach rechts. Die Funktion $u(t) = u_0$ ist eine Gleichgewicht-Lösung der DG.

Eigentlich behauptet diese Definition, dass die konstante Funktion $u(t) = u_0$ eine Lösung ist, also sollen wir dieses überprüfen.

$$u_0' = 0 = F(u_0)$$

also ja.

Es gibt drei Arten von GleichgewichtsLösungen (GGL):

1. Es gibt $\epsilon > 0$ sodass für jede w_0 mit $|w_0 - u_0| < \epsilon$ dann für Lösungen mit dem Anfangswert w_0 im Punkt t_0, konvergiert die Lösung gegen u_0 als $t \to \infty$. In diesem Fall heisst die GGL stabil.

2. Es gibt $\epsilon > 0$ sodass -entweder für jede $u_0 + \epsilon > w_0 \geq u_0$ dann für Lösungen mit dem Anfangswert w_0 im Punkt t_0, konvergiert die Lösung gegen u_0 als $t \to \infty$; oder -für jede $u_0 - \epsilon < w_0 \leq u_0$ dann für Lösungen mit dem Anfangswert w_0 im Punkt t_0, konvergiert die Lösung gegen u_0 als $t \to \infty$. In diesem Fall ist die GGL quasi-stabil.

Falls keine von den beiden gelten, dann ist die GGL instabil.

In der Praxis rechnet man die Nullstellen der rechten Seiten. Dann schaut man die Richtungsfelder an, für Anfangswerte oben sowie unten der GGL. Man muss also nicht die Existenz dieses ϵs beweisen, sondern nur ,,Beweis mit Bild" mithilfe der Richtungsfelder und eine allgemeine Erklärung. Führen wir also ein Beispiel durch.

$$P' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{P}{1}0\right)P$$

Diese Gleichung ist ein typisches Populations-Beispiel aber solche Gleichungen hat man auch für Radioaktive-Material. Die rechte Seite verschwindet für $P = 10$ sowie $P = 0$. Wenn $0 < P < 10$ ist, dann ist die rechte Seite positiv also wird die Ableitung P' positiv und offenbar konvergiert die Lösung gegen 10. Wenn $10 < P$ dann ist $P' < 0$ also senkt die Lösung wieder gegen 10. Wegen der Stetigkeit der Lösung (aus der Theorie), kann eine Lösung nicht durch $P = 10$ fahren. Sobald die Lösung den Wert $P = 10$ annimmt, bleibt die Lösung konstant bei dem Wert. Für eine Poppulations-Beispiel machen Anfangswerte kleiner 0 keinen Sinn aber rein mathematisch schauen wir, dass für Anfangswerte kleiner 0 dann ist die rechte Seite negativ, also ist $P' < 0$ und die Lösung senkt und geht nicht gegen die GGL 0. Ist also 0 instabil.

Übung 3.4.2. *Untersuchen Sie die GGL Folgender DGs.*

1. $y' = y^2 - y - 6$
2. $y' = \sin(y)$
3. $y' = (y^2 - 4)(y + 1)^2$

3.5 Nicht konstante Koeffizienten

Jetzt nehmen wir an, dass die Koeffizienten nicht konstant sein müssen. Sie werden oft sehen, dass bei DG-Lösen versucht man immer zu etwas bekanntes zurückzukehern. Man versucht auch zuerst die einfachste Fälle zu betrachten, weil die gleiche Methode, wenn man Glück hat, kann man einfach leicht variieren, um kompliziertere Fälle auch zu lösen.

Ist unsere Gleichung Grad 0, dann ist die Lösung der Gleichung

$$b(t)u(t) = c(t) \implies u(t) = \frac{c(t)}{b(t)}.$$

Falls die Gleichung Grad eins ist, dann können wir durch $a(t)$ teilen und haben wir

$$u'(t) + p(t)u(t) = g(t), \quad p(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, \, g(t) = \frac{c(t)}{a(t)}.$$

Falls der $u(t)$-Teil wegfällt, dann haben wir

$$u'(t) = g(t).$$

In diesem Fall suchen wir eine Stammfunktion der Funktion g. Das heisst, unsere Lösung ist

$$\int g(t)dt,$$

und es gibt eine ein-Dimensionaler Lösungsraum, die von dem Konstant der Integration abhängt. Nämlich ist u eine Lösung, überlegen Sie, dass $u + c$ auch eine Lösung ist, für jede reelle Zahl c.

Die Idee, dass wir diese Fall mit Integration betrachten führt zur allgemeine Idee.

Allgemein haben wir

$$u'(t) + p(t)u(t) = g(t),$$

wobei $p(t)$ nicht unbedingt 0 ist. Wir haben auf der Linken Seite die Summe

$$u' + pu.$$

Falls es gelten würde, dass $p' = 1$, dann hatten wir

$$u' + pu = (pu)',$$

also unsere Lösung wäre

$$u = \frac{\int g(t)dt}{p(t)}.$$

Haben wir eben nicht unbedingt so eine p jedes mal. Also führen wir eine neue Unsub μ ein die uns vielleicht hilft

$$\mu u' + \mu pu = \mu g.$$

Wenn wir eine Funktion μ finden könnten, sodass

$$(\mu u)' = \mu u' + \mu pu,$$

dann könnten wir unsere Lösung finden, in dem wir eine Stammfunktion für die rechte Seite μg berechnen und danach durch μ teilen damit u alleine rauskommt. Lassen wir dieses untersuchen, wir wollen

$$(\mu u)' = \mu u' + \mu pu,$$

und wir wissen laut der Produktregel

$$(\mu u)' = \mu' u + u' \mu.$$

Also setzen wir

$$\mu' u + u' \mu = \mu u' + \mu pu \iff \mu' u = \mu pu \iff \mu' = p\mu.$$

Falls p eine Konstante ist, haben wir die Gleichung schon gelöst und die Lösung ist $\mu = e^{pt}$. Falls p aber keine Konstante ist, können wir ebenso den Fundamentalsatz der Analysis verwenden mit

$$\mu(t) := exp(\int p(s)ds).$$

Dann ist laut der Kettenregel sowie dem Fundamentalsatz der Analysis

$$\mu'(t) = p(t)exp(\int p(s)ds) = p\mu.$$

Also es gibt doch so eine μ, so lange wir p integrieren können, was wir immer tun können, so lange p stetig ist. Dann haben wir

$$(\mu u)' = \mu u' + \mu pu = \mu g,$$

also

$$\mu u = \int (\mu g) \implies u = \frac{\int (\mu g)}{\mu}.$$

Diese Lösungsmethod fassen wir jetzt zusammen.

1. Schreiben Sie die Gleichung zuerst in Normalform.

2. Falls die Koeffizient von u' nicht eins ist, teilen Sie durch, damit Sie jetzt eine Gleichung der Form
$$u'(t) + p(t)u(t) = g(t)$$
haben. Der Spitzname dieser Form ist ,,p-Form."

3. Angenommen ist $p(t)$ stetig. Falls nicht, machen sie *nicht* weiter! Es sei
$$\mu(t) := e^{\int p(t)dt + k}.$$
Wir werden sehen, dass wir die Konstante k hier nicht brauchen. Es folgt daraus, dass
$$e^{\int p(t)dt+k} = e^k e^{\int p(t)dt},$$
und später werden wir teilen und der e^k wird weg. Bis dahin lassen wir ihn mitkommen. Laut der Kettenregel sowie Fundamentalsatz der Analysis ist
$$\mu'(t) = p(t)e^{\int p(t)dt} = p(t)\mu(t).$$

4. Jetzt multiplizieren wir die Gleichung mit $\mu(t)$ also
$$\mu u' + p\mu u = \mu g.$$
Hier ist der Trick: die Linke Seite ist jetzt
$$(\mu u)'.$$
Also die Gleichung sieht jetzt so aus
$$(\mu u)' = \mu g.$$

5. Berechnen Sie
$$\int \mu(t)g(t)dt = F(t) + c.$$

6. Die Lösung ist
$$u(t) = \frac{F(t) + c}{\mu(t)} = \frac{\int e^k \exp(\int p(t)dt)g(t)dt}{\int e^k \exp(\int p(t)dt)},$$
und da k eine Konstante ist, kreuzt sie oben und unten weg.

7. Die Konstante der Integration von μ kann man wegwerfen. Die Konstante der Integration von F behaltet man, um laut Anfangsbedingungen zu bestimmen.

8. IMMER setzen Sie Ihre Lösung wieder in die Gleichung rein um zu überprüfen, ob sie tatsächlich die Gleichung erfüllt!

Führen wir jetzt Beispiele durch.

1. $tu' + 2u = t^2 - t + 1$, mit $u(1) = 0$.

2. $tu' - 2t = t\sin(2t) - t^2 + 5t^4$, mit $u(\pi) = \pi$.

3. $2u' - u = 4\sin(3t)$, $u(0) = u_0$.

Betrachten wir die erste Gleichung. Diese Gleichung ist in Normal-Form aber noch nicht in den ,,p-Form." Zuerst schreiben wir die Gleichung um, damit wir unser $p(t)$ betrachten.

$$u' + 2u/t = t - 1 + 1/t,$$

also ist die Funktion $p(t)$ die Koeffizient von u

$$p(t) = 2/t.$$

Diese Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Unsere $\mu(t)$ ist

$$\mu(t) = \exp(\int p(t)dt) = e^{2\ln(t)} = t^2.$$

Jetzt berechnen wir die Funktion F aber dafür müssen wir schauen, was unsere g ist,

$$g(t) = t - 1 + 1/t.$$

Wir betrachten dementsprechend

$$F(t) + c = \int \mu(t)g(t)dt = \int t^2(t - 1 + 1/t)dt = t^4/4 - t^3/3 + t^2/2 + c.$$

Die Lösung hat der Form

$$u(t) = \frac{t^4/4 - t^3/3 + t^2/2 + c}{t^2} = t^2/4 - t/3 + 1/2 + \frac{c}{t^2}.$$

Damit $u(1) = 0$ berechnen wir

$$1/4 - 1/3 + 1/2 + c = 0 \implies c = -5/12,$$

$$u(t) = t^2/4 - t/3 + 1/2 - \frac{5}{12t^2}$$

Sehr wichtig : schauen wir, dass unsere Lösung wirklich eine Lösung ist, in dem wir sie in die Gleichung einsetzen

$$u'(t) = t/2 - 1/3 + 5/(6t^3).$$

$$\begin{aligned} u' + 2u/t &= t/2 - 1/3 + 5/(6t^3) + t/2 - 2/3 + 1/t - \frac{5}{6t^3} \\ &= t - 1 + 1/t. \end{aligned}$$

Ganz ehrlich das erste mal als ich diese Gleichung gelöst habe, hatte ich einen Typfehler irgendwo und habe es nur herausgefunden, nach ich die Lösung wieder in der Gleichung gesetzt habe, um zu überprüfen, ob es keinen Fehler gab. Ich empfehle also sehr herzlich, immer diese letzten Schritt zu machen!

Jetzt betrachten wir die zweite Gleichung. Ist die Gleichung schon in Normalform bzw. p-Form? Nein.

Also zuerst setzen wir die Gleichung in Normalform.

$$tu' = t\sin(2t) - t^2 + 5t^4 + 2.$$

Danach berechnen wir die Funktion $p(t)$, also wir schreiben die Gleichung um, in dem wir durch die Koeffizient-Funktion u' teilen

$$u' = \sin(2t) - t + 5t^3 + 2/t.$$

Die Funktion

$$p(t) = 0.$$

Dann ist

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}) = e^0 = 1.$$

Die Funktion g ist, die, die auf der rechten Seite steht also

$$g(t) = \sin(2t) - t + 5t^3 + 2/t.$$

Dementsprechend berechnen wir

$$F(t) + c = \int \mu(t)g(t)dt = \int \sin(2t) - t + 5t^3 + 2/t + c$$

$$= -\cos(2t)/2 - t^2/2 + 5t^4/4 + 2\ln(t) + c.$$

Unsere Unsub

$$u(t) = -\cos(2t)/2 - t^2/2 + 5t^4/4 + 2\ln(t) + c.$$

Um die Konstante c auszurechnen, verwende wir den Anfangswert also

$$u(\pi) = \pi,$$

also

$$-\cos(2\pi) - \pi^2/2 + 5\pi^4/4 + 2\ln(\pi) + c = \pi,$$

$$\iff c = \pi + 1 + \pi^2/2 - 5\pi^4/4 - 2\ln(\pi).$$

Schauen wir, dass unsere Lösung doch die Differentialgleichung erfüllt :

$$u' = \sin(2t) - t + 5t^3 + 2/t.$$

3.6 Modellierung mit lineare DG Grades 1

3.6.1 Mischungen von Flüssigkeiten

In Mobiler-Systeme gibt es verschiedene Flüssigkeiten die man benötigt z.B. Benzin, Kühlungsflussigkeiten, Bremseflüssigkeiten, u.s.w. Kehren wir zu unsere Beispiele am Anfang zurück.

Die allgemeine Schritte hier sind:

1. Es sei $Q(t)$ die Menge eines Substanzes in einer Flüssigkeit.
2. $\dot{Q}$ = Geschwindigkeit der Flüssigkeit die reinkommt mal Konzentration Q in dieser einfliessende Flüssigkeit - Geschwindigkeit der Flüssigkeit die rauskommt mal Konzentration Q in dieser Flüssigkeit.

Machen wir einige Beispiele. Aus Kapitel 1 haben wir folgendes Beispiel.

Ein Wasserbehalter enthält ein Volumen $V(t)$ welches leider vergiftet mit dem Prozentanteil $c(t)$ im Zeitpunkt t ist. Um den Anteil des Gifts zu reduzieren wird Wasser mit der Geschwindigkeit Q_{in} ins Behalter rein gepumpt. Leider ist das Wasser auch vergiftet aber mit einer geringen Konzentration c_{in}. Wir nehmen an, dass die Flüssigkeiten mischen mit einander sofort. Wir lassen die Flüssigkeit raus dem Behalter fliessen mit einer Geschwindigkeit von Q_{out}. Angenommen im Zeitpunkt $t = 0$ ist das Volumen V_0 mit Konzentration des Gifts c_0. Die Konzentration des Gifts im Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$[V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t]\dot{c}(t) + Q_{in}c(t) = Q_{in}c_{in}, \quad c(0) = c_0.$$

Lösen wir es. Unser Unsub ist in diesem fall c. Schauen wir die DG an und klassifizieren wir sie. Der Grad ist eins. Sie ist linear. Die Koeffizienten sind nicht konstant. Wir haben eine Lösungsmethode für solche. Stellen wir die Gleichung in p-Form und definieren wir einige Abkürzungen:

$$\frac{Q_{in}}{V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t} := p(t), \quad \frac{Q_{in}c_{in}}{V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t} := g(t).$$

Dann ist unsere DG

$$\dot{c}(t) + p(t)c(t) = g(t).$$

Unsere Funktion

$$\mu(t) := \exp(\int p(s)ds),$$

also berechnen wir

$$\int p(s)ds = \frac{Q_{in}}{Q_{in} - Q_{out}} \ln(V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t)$$

$$\implies \mu(t) = (V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t)^{Q_{in}/(Q_{in} - Q_{out})}.$$

Als nächste berechnen wir

$$\int \mu(t)g(t)dt = \int Q_{in}c_{in}(V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t)^{Q_{in}/(Q_{in}-Q_{out})-1}dt.$$

Naja, das können wir eignetlich nicht so einfach lösen. Wenn wir die Gleichung anschauen, als Potenz ist es eine Konstante, die von Q_{in} und Q_{out} abhängt. Wenn wir also das Verhältnis zwischen den wissen, dann können wir die Gleichung lösen. Zum Beispiel, falls sie gleich sind, wird es besonders einfach, unsere μ in dem Fall wäre

$$\int Q_{in}/V_0 dt = tQ_{in}/V_0 = \int p(t)dt,$$

$$\mu(t) = e^{tQ_{in}/V_0}, \quad g(t) = Q_{in}c_{in}/V_0.$$

Also

$$\int \mu g = \int Q_{in}c_{in}/V_0 e^{tQ_{in}/V_0}dt = c_{in}e^{tQ_{in}/V_0} + K,$$

und

$$c(t) = \frac{c_{in}e^{tQ_{in}/V_0} + K}{e^{tQ_{in}/V_0}}.$$

Damit $c(0) = c_0$ lösen wir

$$c_{in} + K = c_0 \implies K = c_0 - c_{in}.$$

Die Lösung ist dementsprechend

$$c(t) = \frac{c_{in}e^{tQ_{in}/V_0} + c_0 - c_{in}}{e^{tQ_{in}/V_0}} = c_{in} + (c_0 - c_{in})e^{-tQ_{in}/V_0}.$$

Überprüfen wir, dass die Lösung die Gleichung erfüllt

$$\dot{c} = (c_{in} - c_0)e^{-tQ_{in}/V_0}Q_{in}/V_0,$$

$$p(t)c(t) = c_{in}Q_{in}/V_0 + Q_{in}/V_0(c_0 - c_{in})e^{-tQ_{in}/V_0},$$

also ist

$$\dot{c} + p(t)c(t) = c_{in}Q_{in}/V_0 = g(t).$$

Die Gleichung ist dementsprechend erfüllt. Unsere Annahme, dass $Q_{in} = Q_{out}$ ist nicht so unlogisch, da dann wird das Behalter nicht übergiessen. Falls $Q_{in} > Q_{out}$ werden wir Probleme haben, wenn das Wasser nicht rausfliessen kann. Falls $Q_{in} < Q_{out}$, dann wird die Menge Flüssigkeit im Behalter immer weniger.

3.6.2 Rakete

Für jedes Objekt, das durch die Luft fliegt bzw. fallt, können wir eine DG (oder DGS) lösen, um zu berechnen, wo das Objekt im Zeitpunkt t ist und wie schnell es ist. Im ersten Kapitel fürhte das Rakete-Beispiel zur folgende DGS

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) = 0,$$

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) = -mg.$$

Die Anfangsbedingungen sind im $t = 0$, dass $x(0) = 0 = y(0)$, $\dot{x}(0) = ||v_0|| \cos\theta_0$, $\dot{y}(0) = ||v_0|| \sin\theta_0$. Dieses System sieht jetzt wie Grad zwei aus aber wir können schon wieder einen Trick verwenden. Die DGS ist Grad zwei für die Unsubs x sowie y aber sie ist Grad eins für die Unsubs $\dot{x}$ sowie $\dot{y}$. Die erste DG hat konstante Koeffizienten, ist homogen, und wir können sie in Normal-Form so schreiben

$$x'' = -\frac{\beta}{m}\dot{x}.$$

Die Lösung ist also

$$\dot{x} = Ae^{-\beta t/m}.$$

Laut Anfangsbedingungen soll $\dot{x}(0) = ||v_0|| \cos\theta_0$. Also soll

$$A = ||v_0|| \cos\theta_0.$$

Die Gleichung für $\dot{y}$ ist nicht mehr homogen aber diese können wir auch lösen. Wir haben schon Gleichungen dieser Art gelöst

$$u' = Au + B \implies u = Ce^{At} - B/A.$$

Die Gleichung in dieser Form ist

$$y'' = -\beta/m\dot{y} - g \implies \dot{y} = Ce^{-\beta t/m} + \frac{gm}{-\beta}.$$

Laut Anfangsbedingungen soll $\dot{y}(0) = ||v_0|| \sin\theta_0$. Dann haben wir die Gleichung

$$C - \frac{gm}{\beta} = ||v_0|| \sin\theta_0 \implies C = ||v_0|| \sin\theta_0 + gm/\beta.$$

3.7 Nicht-lineare Gleichungen

Die erste Art von nicht lineare DG Grades eins sind ,,Trennbar.” Haben Sie eine Gleichung der Form

$$f(u)\dot{u} = g(t), \quad u = u(t)$$

wobei u der Unsub ist? Dann ist die Frage, gibt es eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass es gelten

$$F'(t) = f(t), \quad G'(t) = g(t)?$$

Falls ja, dann gilt ebenso folgendes (Kettenregel)

$$F'(u(t))u'(t) = g(t) = G'(t),$$

also die Funktionen $F(u(t))$ betrachtet also Funktion von t, hat laut der Kettenregel, die gleiche Ableitungsfunktion, wie die Funktion G. Dementsprechend unterscheiden sie nur von einander mit einer Konstante, d.h.

$$F(u(t)) = G(t) + c.$$

Dieses ergibt eine *implizite Lösung* für u

$$F(u) = G(t) + c.$$

Definition 3.7.1. *Eine* implizite Lösung *für eine DG für ein Unsub u ist eine Differentialgleichung für den Unsub u mit dem Grad* 0*. Falls diese Gleichung für u gelöst werden kann, damit u also Funktion (explizit) von t dargestellt werden kann, dann heisst diese Lösung* explizit.

Hier sind ein paar Beispiele.

3.7.1 Trennbare nicht lineare DG Grad eins

1. $\dot{u} = 6u^2 t$. Wir können diese so umschreiben

$$\frac{\dot{u}}{u^2} = 6t.$$

Eine Funktion F sodass die linke Seite $F'(u)\dot{u}$ ist wäre also

$$F(u) = \frac{1}{u}.$$

Eine Funktion G sodass die rechte Seite $G'(t)$ ist wäre also

$$G(t) = 3t^2.$$

Danach gilt

$$F'(u)\dot{u} = \frac{d}{dt}F(u(t)) = G'(t) \implies$$
$$F(u(t)) = G(t) + c,$$

also

$$\frac{1}{u} = 3t^2 + c,$$

und in diesem Fall können wir auch für u lösen (d.h. Explizit)

$$u = \frac{1}{3t^2 + c}.$$

Wenn wir einen Anfangswert haben, wie z.B.

$$u(0) = 1,$$

dann können wir c finden,

$$u(0) = 1 = \frac{1}{c} \implies c = 1.$$

2. $\sin(u)\dot{u} = 4t^2$. Eine Funktion F sodass die linke Seite $F'(u)\dot{u}$ ist wäre also

$$F(u) = -\cos(u).$$

Eine Funktion G sodass die rechte Seite $G'(t)$ ist wäre

$$G(t) = \frac{4t^3}{3}.$$

Dann gilt

$$F(u)\dot{u} = \frac{d}{dt}F(u(t)) = G'(t) \implies$$
$$F(u(t)) = G(t) + c.$$

Also

$$-\cos(u) = \frac{4t^3}{3}.$$

Dieses können wir auch für u lösen,

$$u = \arccos\left(-\frac{4t^3}{3}\right).$$

Einen Hinweis ist, dass oft wird diese Art von Gleichungen sehr schlecht geschrieben, also

$$f(u)\frac{du}{dt} = g(t),$$

dann macht man

$$f(u)du = g(t)dt.$$

Riemann dreht sich um in seinen Grab. Dieses ist mathematisch QUATSCH. Die Methode funktioniert, wenn man danach die beide Seite integriert

$$\int f(u)du = \int g(t)dt.$$

Falls diese Schreibweise Ihnen hilft, können Sie sie verwenden. Mathematisch betrachtet aber ist die Schreibweise Quatsch.

3.7.2 Exakte nicht lineare DG Grad eins

Kann Ihre Gleichung so dargestellt werden

$$\Psi_t(u,t) + \Psi_u(u,t)\dot{u} = 0?$$

Dann ist, laut Kettenregel, die linke Seite genau

$$\Psi'(u(t)) = \Psi_t(u,t) + \Psi_u(u,t)\dot{u} = 0,$$

also ist $\Psi(u(t))$ konstant,

$$\Psi(u(t)) = c,$$

für irgend eine $c \in \mathbb{R}$ (oder vlt. in $\mathbb{C}$). Notwendig ist es in diesem Fall, dass

$$\Psi_{t,u} = \Psi_{u,t}.$$

Schauen wir einige Beispiele an.

1. $2tu^2 + 4 = 2(3 - t^2 u)\dot{u}$. Schreiben wir um

$$2tu^2 + 4 + 2(t^2 u - 3)\dot{u} = 0.$$

Wenn wir den ersten Teil bzgl. t integrieren, damit die Ableitung bzgl. t den ersten Teil wird, haben wir eine Funktion der Form

$$\Psi(u,t) = t^2u^2 + 4t + f(u),$$

wobei dieses $f(u)$ kein t drin hat. Wenn wir den zweiten Teil bzgl. u integrieren, damit die Ableitung bzgl. u den zweiten Teil vor der $\dot{u}$ wird, dann haben wir eine Funktion der Form

$$\Psi(u,t) = 6u + t^2u^2 + g(t),$$

wobei g nur von t abhängt und keine Abhängigkeit von u hat. Passen die Beide zusammen? Ja. Unsere Ψ ist also

$$\Psi(u,t) = t^2u^2 + 6u + 4t.$$

Dann ist diese gleich eine Konstante, also gilt

$$t^2u^2 + 6u + 4t = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit Anfangsbedingungen können wir c fest stellen, z.B. $u(0) = 0$, dann muss $c = 0$.

2. $3y^3 e^{3xy} - 1 + (2ye^{3xy} + 3xy^2 e^{3xy})y' = 0$. Jetzt ist der Unsub $y = y(x)$. Wenn wir den ersten Teil bzgl. x integrieren, haben wir

$$y^2 e^{3xy} - x + f(y).$$

Wenn wir den zweiten Teil bzgl. y integrieren, haben wir

$$y^2 e^{3xy}.$$

Also sie passen zusammen mit

$$\Psi(y, x) = y^2 e^{3xy} - x,$$

und dieses ist gleich eine Konstante also

$$y^2 e^{3xy} - x = c.$$

Für den Anfangswert $y(0) = 1$ ist also

$$1 - 0 = c \implies c = 1.$$

In diesem Fall, können wir nicht die Gleichung für die explizite Lösung y lösen. Trotzdem haben wir eine implizite Lösung gefunden.

3.7.3 Bernoulli DGs

Haben Sie eine DG der Form

$$\dot{u} + p(t)u = q(t)u^n, \quad n \neq 0, 1?$$

Für die Fälle $n = 0, 1$ können wir so eine DG schon lösen. Für alle andere n teilen wir dieses insgesamt durch u^n, damit alle Unsubs auf der linken Seite werden. Was passiert ist

$$\frac{\dot{u}}{u^n} + p(t)u^{1-n} = q(t).$$

Die linke Seite ist (Kettenregel!)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^{1-n}}{1-n}\right) + p(t)u^{1-n}.$$

Definieren wir

$$v(t) := \frac{u^{1-n}}{1-n}.$$

Dann ist die DG

$$\dot{v} + \widetilde{p(t)}v(t) = q(t), \quad \widetilde{p(t)} = (1-n)p(t).$$

Diese ist jetzt eine linear DG Grades eins, die können wir schon lösen.

3.7.4 Substitution

Der Bernoulli-Trick ist eine Art Substitution. Es gibt noch mehr davon. Haben Sie eine DG der Form

$$\dot{u} = f\left(\frac{u}{t}\right)?$$

Dann setzen Sie

$$v := \frac{u}{t} \implies tv = u \implies t\dot{v} + v = \dot{u},$$

also die Gleichung kann so umgeschrieben werden

$$t\dot{v} + v = f(v) \iff v - f(v) = t\dot{v} \iff \frac{\dot{v}}{v - f(v)} = \frac{1}{t}.$$

Diese Gleichung ist jetzt der Art „Separable/Trennbar" am Anfang dieses Abschnitts. Sie suchen also eine Funktion F sodass gilt

$$F'(v) = \frac{1}{v - f(v)}.$$

Eine Funktion G sodass gilt

$$G'(t) = \frac{1}{t}$$

gibt es schon, nämlich $\ln(t)$. Wenn Sie so eine F haben, dann laut Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt}F(v(t)) = \frac{\dot{v}}{v - f(v)} = G'(t) = \frac{1}{t} \implies$$

$$F(v(t)) = \ln(t) + c.$$

Dann setzen Sie wieder u rein

$$F(u(t)/t) = \ln(t) + c.$$

Noch ein Fall, den wir auch mit Substitution lösen können ist Gleichungen der Form

$$\dot{u} = g(at + bu).$$

Definieren wir

$$v := at + bu \implies \dot{v} = a + b\dot{u}.$$

Dann wir die Gleichung

$$\frac{\dot{v} - a}{b} = g(v) \iff \dot{v} = bg(v) + a \iff \frac{\dot{v}}{bg(v) + a} = 1.$$

Gibt es eine Funktion G sodass gilt

$$G'(v) = \frac{1}{bg(v) + a}?$$

Falls ja, dann es gilt laut Kettenregel

$$\frac{d}{dt}G(v(t)) = \dot{v}G'(v(t)) = 1 = \frac{d}{dt}(t) \implies$$

$$G(v(t)) = t + c,$$

für eine Konstante c. Setzen wir wieder u rein

$$G(at + bu) = t + c.$$

3.8 Übungen

1. $y' = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4}$, $y(1) = 3$.
2. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$, $y(0) = -1$.
3. $y' = e^{-y}(2x - 4)$, $y(5) = 0$.
4. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$, $r(1) = 2$.
5. $\frac{dy}{dt} = e^{y-t}\sec(y)(1 + t^2)$, $y(0) = 0$.
6. $2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0$.
7. $2xy^2 + 4 = 2(3 - x^2y)y'$, $y(-1) = 8$.
8. $\frac{2ty}{t^2+1} - 2t - (2 - \ln(t^2 + 1))y' = 0$.
9. $y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$, $y(2) = -1$.
10. $y' = 5y + e^{-2x}y^{-2}$, $y(0) = 2$.
11. $6y' - 2y = xy^4$, $y(0) = -2$.
12. $y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0$, $y(1) = 0$.
13. $xyy' + 4x^2 + y^2 = 0$, $y(2) = -7$.
14. $xy' = y(\ln(x) - \ln(y))$, $y(1) = 4$.
15. $y' - (4x - y + 1)^2 = 0$, $y(0) = 2$.
16. $y' = e^{9y-x}$, $y(0) = 0$.

3.9 Zusammenfassung Lösungsmethode DG Grad eins

3.9.1 Linear KK

Können Sie die DG in dieser Form bringen?

$$u' = Au + B$$

Falls die Antwort ,,JA" ist, dann haben Sie eine lineare DG mit konstante Koeffizienten Grades eins. Die Lösungen solche Gleichung sind

$$u = Ce^{At} - B/A,$$

wobei C eindeutig durch Anfangswert bestimmt werden kann.

3.9.2 Linear nicht KK

Falls die DG nicht in dieser Form umgeschrieben werden kann aber in folgender Form

$$u'(t) + p(t)u(t) = g(t).$$

Diese ist die sogenannte ,,p-Form." Die DG ist in diesem Fall immer noch linear, Grad eins, aber jetzt sind die Koeffizienten nicht mehr konstant. Wenn Sie so eine DG haben, dann zuerst berechnen Sie

$$\mu(t) := exp(\int p(s)ds).$$

Beim ersten Schritt ist die Integrations-Konstante unwichtig. Wegfallen lassen. Danach berechnen Sie

$$\int \mu(t)g(t)dt + C.$$

Konstante dieses mal nicht vergessen! Lösung ist

$$u = \frac{\int(\mu g)}{\mu}.$$

3.9.3 Trennbar

Falls die DG nicht linear ist, dann schauen Sie, ob Sie die DG so umschreiben können

$$f(u)\dot{u} = g(t), \quad u = u(t).$$

Diese Art von nicht linearen DG Grad eins heissen ,, trennbar." Danach schauen Sie, ob folgendes gilt: Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass es gelten

$$F'(t) = f(t), \quad G'(t) = g(t)?$$

Falls ja, dann gibt es eine *implizite Lösung* für u

$$F(u) = G(t) + c.$$

3.9.4 Exakt

Kann Ihre Gleichung so dargestellt werden

$$\Psi_t(u,t) + \Psi_u(u,t)\dot{u} = 0?$$

Dann ist, laut Kettenregel, $\Psi(u(t))$ konstant,

$$\Psi(u(t)) = c,$$

für irgend eine $c \in \mathbb{R}$ (oder vlt. in $\mathbb{C}$). Diese heissen ,,genau."

3.9.5 BerNoulli

Haben Sie eine DG der Form

$$\dot{u} + p(t)u = q(t)u^n, \quad n \neq 0, 1?$$

Sei

$$v(t) := \frac{u^{1-n}}{1-n}.$$

Dann ist die DG

$$\dot{v} + \widetilde{p(t)}v(t) = q(t), \quad \widetilde{p(t)} = (1-n)p(t).$$

Diese ist jetzt eine linear DG Grades eins, die können wir schon lösen.

3.9.6 Substitution

Haben Sie eine DG der Form

$$\dot{u} = f(u,t)?$$

Gibt es eine Funktion

$$v = v(u,t)$$

sodass Sie $\dot{v}$ mit $\dot{u}$ vergleichen können? Das heisst, eine einfache Zusammenhang zwischen $\dot{u}$ und $\dot{v}$. Das Ziel ist dann, dass sie die Gleichung für v umschreiben können, damit Sie eine von den obigen Fällen haben. Dieses könnte Tricky werden.

3.9.7 Richtungsfelder sowie Gleichgewichtslösungen

Falls Sie die Gleichung nicht mit irgendeiner Methode lösen, dann ist die Frage, ob Sie die Gleichung so umschreiben können

$$u' = F(u,t).$$

Falls ja, dann können Sie Richtungsfelder sowie GGL untersuchen. Richtungsfelder betrachten Sie laut folgende Schritte:

1. Wählen Sie einen Wert für die Unsub und den Wert für $t = 0$. Setzen Sie diese Werte ein und rechnen Sie, was für einen Wert die Ableitung der Unsub raus kommt.

2. Entscheiden Sie die Zeitschritte. Nennen wir dieses δ.

3. Setzen Sie in der rechte Seite $F(u_0, 0)$ ein. Dieses ergibt $u'(0)$.

4. Jetzt betrachten Sie $u(\delta) = u(0) + u'(0)\delta$.

5. Nach dem n-ten Zeitschritt, sind Sie im Zeitpunkt $n\delta$. Sie haben denn Wert $u(n\delta)$. Danach berechnen Sie $F(u(n\delta), n\delta) = u'(n\delta)$. Dann der nächste Wert ist

$$u(n\delta + \delta) = u(n\delta) + \delta u'(n\delta).$$

   Und so weiter.

Ist die DG der Form
$$u' = F(u)?$$
Dann sind die Anfangswerte u_0 mit $F(u_0) = 0$ Gleichgewichts-Lösungen. Diese sind so genannt weil, für diese Anfangswert ist die Lösung der AWP $u' = F(u)$, $u(0) = u_0$ die Lösung

$$u(t) = u_0 \forall t \geq 0.$$

Es gibt drei Fälle zu unterscheiden.

1. Für Anfangswerte $w_0 > u_0$ ist $u'(0) = F(w_0) < 0$, dann dieses bedeutet, dass die Lösungen der AWP mit Anfangswert $> u_0$ werden gegen die GGL konvergieren.

2. Für Anfangswerte $w_0 < u_0$ ist $u'(0) = F(w_0) > 0$, dann dieses bedeutet, dass die Lösungen der AWP mit Anfangswert $< u_0$ werden gegen die GGL konvergieren.

Falls es gilt nur (1) oder (2) aber nicht beide, dann ist die GGL quasi-stabil. Falls es gelten (1) sowie (2), dann ist die GGL stabil. Falls es gelten nicht (1) und auch nicht (2), dann ist die GGL instabil.

3.9.8 Philosophische Bemerkung

In der Untersuchung (partielle) Differentialgleichungen wenn man was neues sieht, eine allgemeine und häufig verwendete Technik ist, diese neue (p)DG umzuschreiben, damit es wieder eine schon bekannte Art (p)DG wird. Danach wird laut schon bekannte Technik gelöst, und letzt endlich wird es wieder umgeformt als eine Gleichung für den ursprünglichen Unsub.

Linear? Ist die DG linear? Falls ja, bringen Sie die DG in der Form

$$u'(t) + p(t)u(t) = g(t),$$

sei

$$\mu(t) := \exp(\int p(t)dt),$$

die Lösungen sind

$$\frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)}.$$

Trennbar? DG ist nicht linear und kann nicht linear gemacht werden? Ist sie Trennbar?

$$f(u)u' = g(t).$$

Die implizite Lösung ist

$$\int f(u)du = \int g(t)dt + C.$$

Exakt? Gleichung der Form

$$f(u,t) + g(u,t)u' = 0.$$

Überprüfen ob es gilt:

$$\partial_u f = \partial_t g.$$

Falls ja, betrachten

$$\Psi(u,t) = \int f(u,t)dt + \phi(u) \text{ oder } \int g(u,t)du + \phi(t),$$

was einfacher ist. Dann berechnen $\Psi_u = g(u,t)$ um ϕ' zu finden und danach ϕ berechnen (bzw. $\Psi_t = f(u,t)$ um ϕ' zu finden und danach ϕ berechnen). Die implizite Lösung ist

$$\Psi(u,t) = C.$$

Bernoulli? Gleichung der Form

$$u' + p(t)u = q(t)u^n, \quad n \neq 0, 1.$$

Teilen durch u^n ergibt

$$u'u^{-n} + p(t)u^{-n+1} = q(t) \iff \frac{v'}{-n+1} + p(t)v = q(t)$$

wobei $v = u^{-n+1}$. Multiplizieren mit $(-n+1)$ ergibt eine lineare Gleichung. Dieses ist ein Beispiel Substitution: gibt es $v = v(u)$ sodass die Gleichung bzgl. v eine der vorherigen Forms.

Richtungsfeld/GGL Kann die Gleichung umgeformt werden, sodass

$$F(u,t) = u'.$$

Dann können Sie Richtungsfelder sowie GGL untersuchen.

Kapitel 4

Lineare DG Grades zwei

Eine lineare DG Grades zwei ist im einfachsten Fall

1. linear
2. konstante Koeffiziente
3. homogen

Wir betrachten den einfachsten Fall natürlich zuerst aber vorher schauen wir die Theorie an.

Satz 4.0.1. *Es sei eine lineare DG Grades zwei der Form*

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Dann falls $y_1(x)$ sowie $y_2(x)$ zwei Lösungen der DG sind und c_1, c_2 zwei Konstante sind, dann ist

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

ebenfalls eine Lösung der DG. Ferner gilt, falls $P(x) \neq 0 \forall x$, dann ist jede Lösung dieser Form wobei y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

4.1 Homogene lineare DG Grades zwei

Haben Sie eine DG der Form

$$ay'' + by' + cy = 0?$$

Zuerst überlegen Wir, ob wir die Exponentielle Funktion verwenden können. Es sei also

$$y(x) = e^{rx}.$$

Hier hilft eine Definition.

Definition 4.1.1. *Es sei eine DG Grades n. Dann gibt es eine Funktion $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sodass die Gleichung in folgender Weise dargestellt werden kann*

$$F(u, u', \dots, u^{(n)}) = G(x),$$

wobei $G(x)$ eine bekannte Funktion ist und u, u', $\dots u^{(n)}$ die unbekannte Funktion, Unsub, bzw. Ableitungen der Unsubs ist. Wir nennen F der differential-Operator (DO) und schreiben $F(u) = F(u, u', \dots u^{(n)})$.

Angenommen haben wir eine DO der Form

$$F(y) = ay'' + by' + cy = 0.$$

Betrachten wir $F(e^{rx})$,

$$F(e^{rx}) = ar^2y + bry + cy = 0, \quad y = y(x) = e^{rx}.$$

Naja, wir können durch y teilen, da $y \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, solange $r \in \mathbb{R}$ auch. Dann haben wir die quadratische Gleichung

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Die Lösungen sind

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jetzt betrachten wir einige Fälle.

1. $b^2 > 4ac$. Dann sind zwei lineare unabhängige Lösungen

$$y_1 = e^{r_+x}, \quad y_2 = e^{r_-x},$$

   wobei

$$r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. $b^2 = 4ac$. Dann haben wir nur eine lineare unabhängige Lösung

$$y = e^{rx}, \quad r = \frac{-b}{2a}.$$

   Die zweite Lösung ist

$$z = xe^{rx},$$

   also alle Lösungen sind

$$c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

3. $b^2 < 4ac$. In diesem Fall sind unsere Lösungen also

$$y_\pm = e^{r_\pm x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Der reelle Teil sowie Imaginär Teil erfüllen die DG ebenfalls also sind die Lösungen

$$e^{-bx/a}\left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}x}{2a}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}x}{2a}\right)\right)$$

Schauen wir, dass diese Lösungen tatsächlich funktionieren. Es sei zuerst $b^2 - 4ac > 0$. Dann gilt für $y_\pm = e^{r_\pm x}$,

$$ay'' + by' + cy = (a(r_\pm^2) + br_\pm + c)y = 0.$$

Für $y = c_1 y_+ + c_2 y_-$, gilt

$$F(y) = c_1 F(y_+) + c_2 F(y_-) = 0.$$

Also diese Lösungen sind tatsächlich Lösungen. Ferner gilt, laut dem Satz, dass wir alle Lösungen gefunden haben, da die Funktionen y_i linear-unabhängig von einander sind. Allgemeiner gilt folgendes.

Satz 4.1.2. *Es sei F eine lineare homogene DG. Falls f und g Lösungen sind, dann ist*

$$af + bg$$

ebenfalls eine Lösung für jede $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus der Linearität der DG und der Tat, dass $a0 = 0 = b0 = a0 + b0$.

Verwenden wir den Satz um zu zeigen, dass in den zweiten und dritten Fällen die Lösungen ebenfalls funktionieren. Im Fallle $b^2 = 4ac$ erfüllt für

$$r = -\frac{b}{a}$$

die Gleichung

$$ar^2 + br + c = 0 \implies F(y) = ar^2 y + bry + cy = 0, y = e^{rx}.$$

Schauen wir wie es mit $z(x) = xe^{rx}$ funktioniert.

$$F(z) = ar^2 xe^{rx} + are^{rx} + brxe^{rx} + be^{rx} + cxe^{rx}$$

$$= (ar^2 + br + c)xe^{rx} + (ar + b)e^x = 0 + 0,$$

da

$$r = -\frac{b}{a}.$$

Also ist z ebenfalls eine Lösung und es gilt dann, dass jede Lösung sich so darstellen lässt

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

Zu bemerken ist, dass e^{rx} und xe^{rx} voneinander linear unabhängig sind, also laut dem Satz haben wir alle Lösungen gefunden.

Im letzten Fall rechnen wir mit komplexen Zahlen. Es sei

$$b^2 < 4ac, \quad \alpha := -\frac{b}{2a}, \quad \beta := \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Für die Funktion $f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ es gilt ja

$$F(f) = ar^2 f + brf + c = 0,$$

und wir betrachten die reellen sowie imaginären Teilen

$$F(f) = F(e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x)) = F(e^{\alpha x}\cos(\beta x)) + iF(e^{\alpha x}\sin(\beta x)) = 0.$$

Dementsprechend muss der reelle Teil

$$F(e^{\alpha x}\cos(\beta x)) = ay'' + by' + cy = 0,$$

wobei $y(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$. Ebenfalls muss der imaginäre Teil

$$F(e^{\alpha x}\sin(\beta)x) = az'' + bz' + cz = 0,$$

wobei $z(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Noch zu bemerken ist, dass $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$ linear unabhängig sind, also haben wir alle Lösungen gefunden, laut dem Satz.

Machen wir folgende Beispiele.

1. $y'' + y' - 6y = 0$. In diesem Fall ist $a = b = 1$ und $c = -6$ also gilt

   $$r_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-6)}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

   also die Lösungen sind der Form

   $$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

2. $4y'' + 12y + 9y = 0$. Jetzt ist

   $$r_{\pm} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(4)(9)}}{8} = -\frac{3}{2},$$

   da $12^2 = 4 * 3 * 4 * 3 = 4 * 4 * 9$. Die Lösungen sind dementsprechend

   $$y = c_1 e^{-3/2x} + xc_2 e^{-3/2x}.$$

3. $y'' - 6y' + 13y$ hat
$$6^2 - 4(13) < 0.$$
Also die Lösungen sind
$$c_1 \sin(\sqrt{4(13) - 36}x) + c_2 \cos(\sqrt{4(13) - 36}x).$$

Satz 4.1.3. *Um eine eindeutige Lösung einer linearen, homogenen DG Grades zwei zu bestimmen, benötigt man genau zwei Anfangswerte (z.B. $y(0)$ sowie $y'(0)$.), sodass die DG für diese Werte linear unabhängig sind.*

Beweis: Wir haben zwei Konstante zu bestimmen. Man benötigt dann genau zwei lineare unabhängige Gleichungen um für die Konstante lösen zu können.

4.2 Aufgabe

1. $y'' - 6y' + 8y = 0.$
2. $y'' + 8y' + 41y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$
4. $4y'' + y = 0.$
5. $4y'' + y' = 0.$
6. $y'' + 12y' + 36y = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1.$
7. $y'' - 2y' + 5y = 0, y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2.$
8. $2y'' + 5y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$
9. $y'' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$
10. $y'' + 100y = 0,\ y(0) = 2,\ y(\pi) = 5.$
11. Es sei $L \in \mathbb{R}$ mit $L \neq 0$. Zeigen Sie, dass
$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(L) = 0$$
hat nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ für $\lambda \leq 0$. Für den Fall $\lambda > 0$ finden Sie λ sodass dieses Problem ein nichttriviale Lösung hat und geben Sie diese Lösung.
12. Es seien $a, b, c > 0$ und $y(x)$ eine Lösung der DG
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

4.2.1 Allgemeine Lösungen und der Wronskian

Es sei eine DG der Form

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0,$$

und y_1 sowie y_2 Lösungen. Um zu entscheiden, ob die zwei eine Basis für die allgemeine Lösungen der DG sind, gilt folgende Kriterien.

Satz 4.2.1. *Es seien und y_1 sowie y_2 Lösungen der DG*

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0.$$

Der Wronskian von y_1 und y_2 ist

$$W(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

Falls es t_0 gibt, sodass $W(y_1, y_w)(t_0) \neq 0$, dann sind y_1 und y_2 eine Basis für alle Lösungen der DG. Falls y_1 und y_2 linear abhängig sind, dann ist $W(y_1, y_2) \equiv 0$.

4.3 Inhomogene DG

Wir fangen mit einem Satz an.

Satz 4.3.1. *Es sei L der Differential-Operator*

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y.$$

Es seien Y_i Lösungen der DG

$$L(Y_i) = g(t), \quad i = 1, 2.$$

Dann ist $Y_2 - Y_1$ eine Lösung der DG

$$L(y) = 0.$$

Dementsprechend falls y_1 und y_2 eine Basis der Lösungen der DG $L(y) = 0$ sind, dann es gilt für jedes Paar Lösungen der inhomogen DG

$$Y_2 - Y_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$$

Wie löst man solche inhomogene DGs? Leider die Methode ist ziemlich ad-hoc. Hier sind Beispiele.

1. $y' - 4y' - 12y = 3e^{5t}$. Zuerst löst man die homogene DG und danach versucht man eine Lösung der inhomogene DG der Form Ae^{5t}.

2. Lösen wir die AWP der DG mit $y(0) = \frac{18}{7}$ und $y'(0) = -\frac{1}{7}$. Hier wissen wir, dass die Lösung der Form
$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t),$$
wobei $Y(t)$ eine Lösung der inhomogenen DG ist.

3. $y'' - 4y' - 12y = \sin(2t)$. Naja, jetzt versuchen wir eine Lösung der Form $A\sin(2t)$. Es wird nicht so gut klappen, also versuchen wir danach mit $A\cos(2t) + B\sin(2t)$.

4. $y'' - 4y' - 12y = 2t^3 - t + 3$. Jetzt versuchen wir ein Polynom mit dem Grad drei.

5. $y'' - 4y' - 12y = te^{4t}$. Jetzt versuchen wir eine Funktion der Form $e^{4t}(At + B)$.

4.3.1 Ad-Hoc

Es sei eine DG der Form
$$ay'' + by' + cy = g(t).$$

1. Zuerst löst man die homogene DG.

2. Dann schaut man die Funktion $g(t)$ an.

3. Sei $g(t) = Ae^{rt}$ dann versucht man eine Lösung $Y = Be^{rt}$. Zuerst müss r keine Lösung der Gleichung
$$ar^2 + br + c = 0,$$
da dann für jede B ist $Y = Be^{rt}$ eine Lösung der homogene DG. Falls r keine Nullstelle der polynom-Gleichung ist, dann ist
$$B = \frac{A}{ar^2 + br + c}.$$

4. Sei $g(t) = a\cos(\beta t)$ oder $b\sin(\beta t)$ oder $a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)$ dann versucht man eine Lösung $Y = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$. Diese wird ein Gleichungssystem für die zwei unbekannte A und B ergeben.

5. Sei $g(t)$ eine Polynom Grades n, dann versucht man Y eine polynome Funktion Grades n.

6. Sei g eine Funktion der Form ate^{ct} dann versucht man eine Lösung der Form $e^{ct}(At+B)$.

7. Allgemein: sei g ein Produkt von dieser Arten Funktionen, dann versucht man ein Produkt der dazugehörigen Lösungen.

4.3.2 Der Wronskian und Parameter-Variation

Es seien y_1 und y_2 eine Basis der Lösungen der DG

$$L(y) = y'' + q(t)y' + r(t)y = 0.$$

Dann eine Lösung der DG

$$L(y) = g(t)$$

ist

$$Y(t) = -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_t \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt.$$

1. $2y'' + 18y = 6\tan(3t)$.
2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2+1}$.

4.4 Vibrationen

Wir betrachten jetzt ein physikalisches Beispiel, das in vielen Autos zu finden ist. Wir betrachten ein Feder. Der Feder hat eine Länge ℓ. Wir werden ein Objekt auf dem Feder hangen, und das Ergebnis ist, dass der Feder eine Länge $L + \ell$ haben wird, und diese Länge ist die Länge, bei der der Feder still bleibt. Am Anfang wird das Objekt hoch und runter bis um die Gleichgewichtsposition. Wir werden die Funktion $u = u(t)$, die die Position des Objekts im Zeitpunkt t ergibt. Die Gleichgewichtsposition ist $u = 0$. Die Positive Richtung ist unten.

Laut dem zweiten Newtonischen Gesetz,

$$F = ma \iff F(t, u, u') = mu''.$$

Was haben wir da? Eine DG Grades zwei! Es gibt vier mögliche Kräfte auf dem Objekt.

1. Schwerkraft gibts immer. Diese Kraft ist

$$F_g = mg.$$

2. Der Feder hat ebenfalls ein Kraft, laut Hookes Gesetz.

$$F_s = -k(L + u), \quad k > 0,$$

wobei k eine Konstante ist. Das Gesetz sagt, dass die Kraft des Feders ist proportional zu $-(L + u)$. Das heisst, falls im Zeitpunkt t, $u(t) = 0$, und die Kraft des Feders zieht nach oben, weil ohne dem Gewicht, wäre es kürzer, also es zieht nach oben. Allgemein: je grösser u, desto länger ist der Feder ausgezogen, und desto mehr zieht die Federkraft nach oben. Falls das Objekt aber den Feder zusammen druckt, sodass die Länge $< \ell$ wird, dann dieses heisst, dass die Länge des Feders $L + u < \ell \iff u < \ell - L < 0$, und in diesem Fall ist $-(L + u) > 0$, das heisst, dass die Kraft will den Feder wieder länger ausziehen.

3. Es ist oft der Wunsch der Passagiere, das Federn gedampft werden. Diese Kraft versucht jede Bewegung zu wieder gehen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, F_d zu betrachten. Wir verwenden
$$F_d = -\gamma u', \gamma > 0,$$
wobei γ eine Konstante ist. Wie funktioniert diese Kraft? Falls das Objekt nach unten geht, ist $u' > 0$, und diese Kraft zieht das Objekt nach oben. Falls das Objekt nach oben geht, ist $u' < 0$ und diese Kraft zieht das Objekt nach unten. Also es versucht jede Bewegung zu vernichten.

4. Externe Kräfte: Dieses bedeutet einfach, alle übrige Kräfte, die auf das Objekt beziehen. Wir definieren diese $F(t)$.

Insgesamt haben wir folgende Gleichung
$$mu'' = F_g + F_s + F_d + F(t) = mg - k(L+u) - \gamma u' + F(t),$$
oder umgeschrieben
$$mu'' + \gamma u' + ku = mg - kL + F(t).$$
Können wir vereinfachen? Sobald der Feder nicht mehr bewegt und bei der Länge L bleibt, gibts nur zwei Kräfte die drauf beziehen. Ferner in diesem Fall, da der Feder nicht mehr bewegt, müssen beide $u'' = 0 = u'$. Ferner gilt auch $u = 0$. Also die Gleichung lässt sich vereinfachen
$$0 = F_g + F_s \iff mg - k(L+u) = 0, u = 0 \implies mg = kL.$$
Dieses heisst, dass wir die Konstante k bezüglich m, g, und L bestimmen können, nämlich
$$k = \frac{mg}{L}.$$
Wir können auch die Gleichung ein wenig vereinfachen
$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t).$$

4.4.1 Ohne Dampfung sowie externe Kraft

Der Fall ist der einfachste. In diesem Fall ist $\gamma = 0 = F(t)$ und unsere Gleichung ist linear, grad 2, konstante Koeffiziente, und homogen. Jackpot. Wir können sie lösen.
$$mu'' + ku = 0 \iff mu'' = -ku \iff u'' = -\frac{k}{m}u.$$
Die allgemeine Lösungen sind
$$u(t) = A\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + B\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$
Um eine genaue Lösung zu finden, benötigen wir zwei Infos:

1. Die Position des Feders am Anfang, d.h. $u(0)$.

2. Die Geschwindigkeit des Feders am Anfang, d.h. man (oder Motor) ergibt den Feder ein Geschwindigkeit im Zeitpunkt 0, d.h. $u'(0)$.

Gewicht bzw. Mass

Ein konkretes Beispiel ist ein Objekt, das 10 kg wiegt, zieht ein Feder 10cm. Der Feder ist am Anfang 5 cm höher von der Gewichtsposition und würde eine Geschwindigkeit $1cm$ pro Sekunde nach unten gegeben. Finden Sie $u(t)$.

Der erste Schritt, ist Gewicht als Mass zu übersetzen.

$$W = mg \implies m = \frac{W}{g}.$$

Glücklicherweise, im metrischen System passt alles schon gut zusammen da die Einheiten für W sind Newtons

$$\frac{kg \cdot m}{s^2}.$$

Also ein Objekt, mit einem Mass von $10kg$ heisst wirklich, ein Objekt, dass $10g \approx 100$ Newtons von Gewicht hat. Im metrischen System aber ist Gewicht (auf einer Waage z.B.) eine Approximierung eines Objekts Masses. Im blödem Englischen System, ist Gewicht in Pfunde leider nicht.

Dann berechnen wir k,

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100}{0,1} = 1000,$$

da wir mit Meters arbeiten und 10 cm ist $0,1$ Meter.

Die Gleichung ist

$$10u'' + 1000u = 0 \iff u'' + 100u = 0,$$

also

$$u(t) = A\sin(10t) + B\cos(10t).$$

Die Anfangsinfos sind:

$$u(0) = -0,05, \quad u'(0) = 0,01.$$

Dementsprechend ist

$$B = -0,05,$$

(da $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$), und

$$u'(0) = 10A = 0,01 \iff A = 0,001.$$

Die Lösung ist dementsprechend

$$u(t) = 0,001\sin(10t) - 0,05\cos(10t).$$

4.4.2 Mit Dampfung ohne externe Kräfte

Wir betrachten dasselbe Beispiel dieses mal mit Dampfung von einem Dampfer der eine Kraft von 10 Newtons ergibt als die Geschwindigkeit 10 cm/s ist. Wir wissen, dass

$$F_d = -\gamma u'.$$

Der Dampfer geht immer in die Gegenrichtung der Geschwindigkeit. Falls $u' > 0$ dann ist $F_d < 0$, also die Gleichung wird

$$-10 = -\gamma 0,1 \iff \gamma = 100.$$

Die AWP ist dementsprechend

$$10u'' + 100u' + 1000u = 0.$$

Jetzt teilen wir durch 10 und die Gleichung wird

$$u'' + 10u' + 100u = 0.$$

Wir betrachten die dazugehörige quadratische Gleichung

$$r^2 + 10r + 100r = 0 \iff r = -5 \pm \frac{\sqrt{100 - 400}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{3}i.$$

Die Lösungen sind allgemein dementsprechend

$$u(t) = e^{-5t}\left(A\sin(5\sqrt{3}t) + B\cos(5\sqrt{3}t)\right).$$

Da $e^0 = 1$, betrachten wir die Anfangswerte

$$u(0) = -0,05 = B,$$

$$u'(0) = 5\sqrt{3}A - 5B = 5\sqrt{3}A - 0,25 = 0,01 \iff A = \frac{26}{500\sqrt{3}}.$$

Naja, etwas hässlich aber so sind Anwendungen auch in der Tat. Überlegen wir, was passiert hier? Da $-5 < 0$,

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0,$$

und das bedeutet, dass die Dampfung funktioniert.

Wie funktioniert der Dampfer?

Der Dampfer funktioniert genau dann, wenn die Lösung

$$u(t) \to 0 \text{ als } t \to \infty.$$

Wir haben eine Gleichung der Form

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0,$$

Eins wissen wir schon: die Koeffizient u' ist $\gamma \geq 0$. Der Mass ist auch $m > 0$. In dem einfachsten Fall ist

$$\gamma^2 - 4mk = 0,$$

und die Lösung ist

$$Ae^{-\gamma t/2m} + Bte^{-\gamma t/2m} \to 0 \text{ als } t \to \infty,$$

solange $\gamma > 0$, d.h. solange es doch ein Dampfer gibt! Dieses nennt man ,,kritische Dampfung."

Es könnte auch passieren, dass

$$\gamma^2 - 4mk > 0.$$

In diesem fall die Potenze der Lösung sind

$$\frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \gamma\sqrt{1 - \frac{4mk}{\gamma^2}}}{2m}$$
$$= \frac{-\gamma}{2m}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mk}{\gamma^2}}\right).$$

Da $\gamma^2 > 4mk$,

$$1 > \frac{4mk}{\gamma^2} \implies \sqrt{1 - \frac{4mk}{\gamma^2}} < 1.$$

Das bedeutet, dass die Potenze jeweils *negative sind*, und unsere Lösung

$$Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} \to 0 \text{ als } t \to \infty.$$

Dieses Fall heisst ,,über Dampfung."

Im letzten Fall, gilt

$$\gamma^2 - 4mk < 0.$$

Hier sind die Lösungen

$$e^{\lambda t}\left(A\sin(\mu t) + B\cos(\mu t)\right), \lambda = \frac{-\gamma}{2m}, \mu = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}.$$

Der Dampfer funktioniert aber der Feder wachelt immer noch ein bisschen dank Sinus sowie Cosinus. Dieser Fall heisst ,,unter Dampfung."

4.4.3 Ohne Dampfung mit externe Kräfte

In diesem Fall die Gleichung wird

$$mu'' + ku = F(t).$$

Die allgemeine Lösung ist der Form

$$u(t) = u_c(t) + U_p(t),$$

wobei u_c eine Lösung der homogene DG (ohne $F(t)$) ist. Die Methode, um $U_p(t)$ zu finden, ist entweder Ad-Hoc oder mit dem Wronskian.

Es seien y_1 und y_2 eine Basis der Lösungen der DG

$$L(y) = y'' + q(t)y' + r(t)y = 0.$$

Dann eine Lösung der DG

$$L(y) = g(t)$$

ist

$$Y(t) = -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_t \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt.$$

Zur Erinnerung,

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

4.4.4 Mit Dampfung sowie externe Kräfte

Der letzte Fall, ist der Fall in dem alles dabei ist und die Gleichung ist

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t).$$

Die Lösungsmethode ist genau wie im Fall ohne Dampfung. Machen wir einige Beispiele.

4.4.5 Beispiele

1. Ein Objekt, das 1 kg wiegt, zieht ein Feder 10cm. Der Feder ist am Anfang 10 cm höher von der Gewichtsposition und würde eine Geschwindigkeit $1cm$ pro Sekunde nach unten gegeben. Ein Dampfer ergibt eine Kraft von 2N als die Geschwindigkeit 1cm/s ist. Finden Sie $u(t)$.

2. Ein Objekt, das 1 kg wiegt, zieht ein Feder 10cm. Der Feder ist am Anfang 10 cm höher von der Gewichtsposition und würde eine Geschwindigkeit $1cm$ pro Sekunde nach unten gegeben. Ein Dampfer ergibt eine Kraft von 20N als die Geschwindigkeit 1cm/s ist. Finden Sie $u(t)$.

3. Ein Objekt, das 1 kg wiegt, zieht ein Feder 10cm. Der Feder ist am Anfang 10 cm höher von der Gewichtsposition und würde eine Geschwindigkeit $1cm$ pro Sekunde nach unten gegeben. Es gibt zwar keine Dampfung aber eine externe Kraft der Form

$$F(t) = 10\cos(\omega t).$$

   Finden Sie $u(t)$.

4. Ein Objekt, das 1 kg wiegt, zieht ein Feder 10cm. Der Feder ist am Anfang 10 cm höher von der Gewichtsposition und würde eine Geschwindigkeit $1cm$ pro Sekunde nach unten gegeben. Ein Dampfer ergibt eine Kraft von 2N als die Geschwindigkeit 1cm/s ist. Es gibt auch eine externe Kraft der Form

$$F(t) = 10\cos(\omega t).$$

   Finden Sie $u(t)$.

Kapitel 5

Lineare KK DG Grad 3 und höher

Wie können wir lineare DGs mit dem Grad grösser gleich 3 lösen? Zum Beispiel

$$u^{(5)} + 3u''' + 2u'' + u' + u = 0.$$

Angenommen ist

$$u = Ae^{rx}$$

dann wenn r eine Lösung

$$r^5 + 3r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0$$

haben wir eine Lösung. Naja, Polynomiale-Gleichung Grad > 2 sind verdammt schwierig zu lösen in der Regel. Es gibt zwei Methoden, solche DGs zu lösen.

5.1 Polynome-Nullstellen

Sie verwenden einen Programm, um die Nullstellen der Polynome-Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$$

zu finden. Lösungen sind der Form

$$u(x) = e^{rx}, r \in \mathbb{R},$$

$$u(x) = e^{\alpha x}(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)), \quad r = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}.$$

5.2 Systeme

Die zweite Methode ist, Sie definieren eine Systeme DGs. Nehmen wir das Beispiel

$$u^{(5)} + 3u''' + 2u'' + u' + u = 0 \iff u^{(5)} = -3u''' - 2u'' - u' - u$$

Sei $u_0 := u$, $u_k := u^{(k)}$. Dann es gilt

$$u_1 = u_0', \quad u_2 = u_1' = u_0'', \quad u_3 = u_2' = u_1'' = u_0''',$$

$$u_4 = u_3' = u_2'' = u_1''' = u_0'''', \quad u_5 = u_4' = u_3'' = u_2''' = u_1'''' = u_0'''''.$$

Schreiben wir die Gleichungen so

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_0' \\ u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ -3u_3 - 2u_2 - u_1 - u_0 \end{bmatrix}.$$

Dieses können wir mithilfe lineare-Algebra umschreiben

$$\vec{u}' = A\vec{u}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Laut Erfahrungen falls es eine Lösung gibt wird es entweder eine exponentielle Funktion oder eine trigonometrische Funktion. Sei $\vec{n}$ eine Element $\mathbb{R}^5$. Betrachten wir $\vec{n}e^{rt} = \vec{u}$. Dann gilt

$$\vec{u}' = r\vec{n}e^{rt} = A\vec{n}e^{rt} \iff A\vec{n} = r\vec{n}.$$

Das ist ein Eigenwertproblem für die Matrix A: gibt es eine $r \neq 0$ und ein $\vec{n}$ sodass gilt

$$A\vec{n} = r\vec{n}?$$

Falls ja, dann ist $\vec{u} = \vec{n}e^{rt}$ eine Lösung, für jede $r \in \mathbb{R}$ der ein Eigenwert von A ist.

5.2.1 Aufgabe

Stellen Sie folgende DG-Systeme in Matrix-Form dar.

1. $u_1' = 4u_1 + 7u_2$ und $u_2' = -2u_1 - 5u_2$
2. $u_1' = 3u_2 + u_3$, $u_2' = u_1 + u_2 + u_3$, $u_3' = 0$.

Stellen Sie folgende lineare DG Grades ≥ 2 als DG-Systeme dar.

1. $2y'' - 5y' + y = 0$
2. $y^{(4)} - 3y'' + y' + 8y = 0$

Hinweis: DG Systeme sind nur in dieser Art lösbar, wenn es die gleiche Anzahl an Gleichungen wie an UnSubs $u_1, u_2, \ldots$ gibt. Der Grund ist, dass nur Matrizen, die die gleiche Anzahl an Spalten sowie Zeilen Eigenwerte sowie Eigenvektoren haben!

5.2.2 Lösungen einer DG System

Die einfachste Art um einer DG System zu lösen ist die Matrix in einem Computer oder Taschenrechner einzugeben, damit es die Eigenwerte für Sie findet. Nur wenn das System 2×2 ist, ist es menschlich realistisch die Eigenwerte per Hand auszurechnen. Ein bisschen Theorie ist hier in Ordnung.

Satz 5.2.1. *Es sei M eine $n \times n$ Matrix. Dann alle Eigenwerte sind Nullstellen der Polynom*

$$p(x) = \det(M - xI),$$

wobei I die Identitäts-Matrix ist, d.h.

$$I = [\delta_{i,j}].$$

Jede Matrix hat genau n Eigenwerte in $\mathbb{C}$ (wenn man sie mit Mehrfach zählt).

Definition 5.2.2. *Eine Matrix heisst diagonalizierbar genau dann, wenn es eine Basis $\mathbb{R}^n$ gibt $\{v_k\}_{k=1}^n$ sowie $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ reelle Zahlen sodass gilt*

$$Mv_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Eine Matrix $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^n$ heisst symmetrisch genau dann, wenn es gilt

$$M^T = [m_{ji}] = M.$$

Es gibt leider keine feste, einfach Regel, um zu erkennen ob eine beliebige Matrix diagonalizierbar ist oder nicht. Es gibt aber ein Satz, der hilfreich sein kann.

Satz 5.2.3 (Spektralsatz)**.** *Eine reelle Matrix M, die symmetrisch ist, ist diagonalizierbar.*

Also wenn Sie eine Matrix haben, und sie ist symmetrisch, dann gibt es genau n lineare unabhängige Lösungen der DG-System,

$$\{v_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n, \quad \{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R},$$

$$Mv_k = \lambda_k v_k, \quad u_k := v_k e^{\lambda_k t},$$

und alle Lösungen des Systems sind der Form

$$\sum_{k=1}^n c_k v_k e^{\lambda_k t}.$$

Im allgemein Fall kann es sein, dass eine Matrix komplexe Eigenwerte hat. Durch

$$\overline{p(x)} = p(\overline{x}) \implies p(\lambda) = 0 \iff p(\overline{\lambda}) = 0.$$

Also wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert ist, dann ist $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ebenfalls Eigenwert. In diesem Fall sind die dazugehörige Eigenvektoren auch aus $\mathbb{C}^n$. In diesem Fall, da gilt

$$Mv = \lambda v \implies \overline{Mv} = M\overline{v} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

also die Eigenvektoren für λ und $\overline{\lambda}$ sind v und $\overline{v}$. Schreiben wir

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)), \quad \lambda = a + ib.$$

Wir schreiben ebenfalls

$$v = \Re v + i\Im v, \quad u := ve^{\lambda t}$$

Dann ist

$$\Re(ve^{\lambda t}) = e^{at}(\Re(v)\cos(bt) - \Im(v)\sin(bt)),$$

und

$$\Im(ve^{\lambda t}) = e^{at}(\Re(v)\sin(bt) - \Im(v)\cos(bt)).$$

Wir betrachten

$$Mu = \lambda u = u',$$

also

$$M(\Re u + i\Im u) = M\Re u + iM\Im u = u' = \Re u' + i\Im u' = (\Re u)' + i(\Im u)'$$

$$\implies M\Re u = (\Re u)', \quad M\Im u = (\Im u)',$$

also

$$\Re u = e^{at}(\Re(v)\cos(bt) - \Im(v)\sin(bt))$$

ist eine Lösung und

$$\Im u = e^{at}(\Re(v)\sin(bt) - \Im(v)\cos(bt))$$

ist auch eine Lösung. Die zwei komplexe Eigenwerte ergeben diese zwei reelle Lösungen der Gleichung und diese sind linear unabhängig.

Die allgemeine Schritte für ein DG-System sind

1. Stellen Sie das System als

   $$Mu = u',$$

   wobei M eine $n \times n$ reelle Matrix ist und $U = (u_1, u_2, \dots u_n)$ die unbekannte Funktionen sind. Falls es nicht die gleiche Anzahl an Gleichungen wie Unbekannte gibt, STOP!

2. Verwenden Sie ein Computer-Programm, um die Eigenwerte sowie Eigenvektoren M zu finden.

3. Ist M symmetrisch? Falls ja, dann wissen Sie, die DGS hat n linear unabhängige Lösungen der Form

   $$\vec{U_k} = \vec{v_k} e^{\lambda_k t}, \quad v_k \in \mathbb{R}^n, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

und jede Lösung ist der Form

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \vec{U}_k.$$

Falls das Ergebnis des Programms nicht damit übereinstimmt, wissen Sie, dass das Programm einen Fehler gemacht hat.

4. Falls M nicht symmetrisch ist, dann ergibt jeder eindeutiger reellen Eigenwert λ mit reellen Eigenvektor $\vec{v}$ eine Lösung

$$\vec{U} = \vec{v} e^{\lambda t}.$$

Jedes Paar $\lambda, \overline{\lambda}$ komplexe (nicht reelle) Eigenwerte mit v Eigenvektor für λ ergibt ein Paar reelle Lösungen

$$e^{\Re \lambda t}(\Re(v)\cos(\Im\lambda t) - \Im(v)\sin(\Im\lambda t))$$

und

$$\Im u = (v e^{\Im\lambda t}) = e^{at}(\Re(v)\sin(\Im\lambda t) - \Im(v)\cos(\Im\lambda t)).$$

5.3 Aufgabe

Stellen Sie folgende DGS in Matrix-Form dar.

1. $u_1 + 2u_2 = u_1'$ und $-2u_1 + u_2 = u_2'$
2. $u_2 = u_2'$ und $-u_1' - u_2' = 0$
3. $u_1 + 4u_2 = u_1'$ und $-3u_1 + 2u_2 = u_2'$

Stellen Sie folgende DGs als DGS und danach in Matrix-Form dar.

1. $u'' + u' + u = 0$
2. $u''' + u'' + u' + u = 0$
3. $2u'' + 5u' - 3u = 0$

Lösen Sie mithilfe ein Computer-Programm diese DGS.

Kapitel 6

Einführung in die PDG

Warum sind die interessanteste (P)DGs Grad eins oder zwei? Der Grund ist, dass die Gleichungen aus der Natur, Physik, sowie Praxis beschreiben Änderungen und sind durch die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung gegeben. Dafür braucht man eine bzw. zwei Ableitungen.

6.1 Alle gute Dinge sind drei

Sie haben eine PDG. Die erste Fragen sind:

1. Linear oder nicht? Falls nicht, klassifizieren. Fertig.

2. Grad grösser 2 dann klassifizieren. Fertig.

3. Linear aber keine KK dann klassifizieren. Fertig.

4. Gibts Gleichungen bzgl. mehr als 2

5. Linear, grad kleiner gleich 2, KK, dann können Sie entscheiden ob die Gleichung elliptisch, parabolisch, oder hyperbolisch ist.

Definition 6.1.1. *Eine PDG für eine Unbekannte Funktion $u = u(x, y)$ der Form*

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

ist elliptisch *falls $B^2 - 4AC < 0$,* hyperbolisch *falls $B^2 - 4AC > 0$ und* parabolisch falls $B^2 - 4AC = 0$.

Elliptische Gleichungen beschreiben Steady-State Prozesse. Hyperbolische Gleichungen beschreiben Vibrationen und Wellen. Parabolische Gleichungen beschreiben Diffusion und Wärmeleitung.

6.1.1 Aufgabe

1. Klassifizieren:

   (a) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$

   (b) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$

   (c) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

   (d) $u_{tt} = uu_{xxxx} + e^{-t}$

2. Versuchen Sie Lösungen der Form

   $$u(x,t) = e^{ax+bt}$$

   um Lösungen der Gleichung

   $$u_t = u_{xx}$$

   zu finden.

3. Lösen Sie

   $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0.$$

4. Lösen Sie

   $$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

   Vergleichen Sie mit

   $$y'' = 0.$$

   Welche Gleichung hat mehr Lösungen?

6.2 Die Wellengleichung auf einer Seite

Die Wellengleichung auf einer Seite ist

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Die Funktion $u = u(x,t)$ ergibt das Temperatur auf der Seite im Punkt x das Temperatur. Mathematiker nehmen oft an, dass $c = 1$. Es ändert die Gleichung in keiner grösser Art. Das Problem ist ein Anfangwertsproblem sowie Randwertproblem. Angenommen sind die Ende der Seite fest gehalten, d.h.

$$u(0,t) = 0 = u(L,t),$$

wobei L die Länge der Seite ist. Ferner gilt

$$u(x,0) = 0 \forall x,$$

da wir auch annehmen, dass im Zeitpunkt $t = 0$ die Seite bewegt sich nicht.

6.2.1 Trennung der Variablen

Eine wichtige Methode in der PDG ist eine PDG zu eine DG umzuwandeln. Eine Art um dieses zu tun ist nach folgender Ansatz.

Definition 6.2.1. *Wir versuchen die PDG zu lösen, in dem wir annehmen, dass die Funktion*

$$u(x,t) = f(x)g(t).$$

Dieses heisst, Trennung der Variablen.

Setzen wir f und g in die PDG

$$g''(t)f(x) - f''(x)g(t) = 0.$$

Teilen wir die gesamte Gleichung durch $f(x)g(t)$

$$\frac{g''(t)}{g(t)} - \frac{f''(x)}{f(x)} = 0 \iff \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Die linke Seite hängt nur von t ab. Die rechte Seite hängt nur von x ab. Dementsprechend müssen beide konstant sein. Also es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ (angenommen sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) sodass gilt

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = \lambda = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Jetzt haben wir zwei Gleichungen

$$g''(t) = \lambda g(t), \quad f''(x) = \lambda f(x).$$

Umgeschrieben:

$$g'' - \lambda g = 0 \implies r^2 - \lambda = 0 \implies r = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Die Lösungen sind entweder

$$g(t) = Ae^{\sqrt{\lambda}t} + Be^{-\sqrt{\lambda}t}, \quad \lambda > 0,$$

oder

$$g(t) = A\sin(\sqrt{-\lambda}t) + B\cos(\sqrt{-\lambda}t), \quad \lambda < 0.$$

Wir haben für g nur einen Anfangswert, also nicht genug Info um A sowie B zu bestimmen. Für f haben wir allerdings mehr Info, und die DG für f ist die Gleiche also die Lösungen sind entweder

$$f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad \lambda > 0,$$

oder

$$f(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x), \quad \lambda < 0.$$

Wir benötigen $f(0) = 0$ sowie $f(L) = 0$. Im ersten Fall dieses ergibt

$$A + B = 0 \implies B = -A,$$

sowie

$$A(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \iff A = 0 \text{ oder } e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0.$$

Falls $A = 0$ ist die Lösung $f \equiv 0$. Falls aber

$$e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \implies e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{-\sqrt{\lambda}L} \implies \sqrt{\lambda}L = -\sqrt{\lambda}L \implies \lambda = 0.$$

Dann ist die Funktion f konstant und ebenfalls muss g konstant auch sein. Dieses würde bedeuten, dass die Seite sich nicht bewegt.

Also es sein muss, falls unsere Methode und Ansatz zu eine Lösung führen können, dass $\lambda < 0$. Dann ist

$$f(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x), \quad \lambda < 0.$$

Damit $f(0) = 0$ ist $B = 0$. Damit $f(L) = 0$ ist

$$\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \iff \sqrt{-\lambda}L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

also

$$f(x) = A\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}.$$

Die Konstante A hängt von der Elastizität der Seite ab, also wir nehmen einfach an, dass $A = 1$.

Jetzt wissen wir ebenfalls, dass

$$g(t) = A\sin(\sqrt{-\lambda}t) + B\cos(\sqrt{-\lambda}t), \quad \lambda < 0.$$

Damit $g(0) = 0$ ist $B = 0$. Also

$$g(t) = A\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right).$$

Wir nehmen wieder an, dass $A = 1$. Die Lösungen der Wellengleichung auf einer Seite, die wir gefunden haben, sind

$$u_k(x,t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right).$$

Die Zahlen $-\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ spielen eine besondere Rolle: sie entscheiden, wie die Seite zu unseren Ohren klingt. Sie haben auch eine mathematische Bedeutung.

Definition 6.2.2. *In einer Dimension ist der Laplace-Operator*

$$\Delta u := u''.$$

Die Laplace-Gleichung ist

$$\Delta u = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Dirichlet-Randbedingung in einer Dimension ist

$$u(0) = u(L) = 0.$$

Die Zahlen λ, sodass eine Lösung u gibt die nicht $\equiv 0$ ist, heissen Eigenwerte und die dazugehörige u heisst Eigenfunktion. Die Menge alle Eigenwerte heisst das Spektrum.

6.3 Die Wellen und Laplace-Gleichungen in $\mathbb{R}^n$

Die Wellengleichung in $\mathbb{R}^n$ ist

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0,$$

aber wir werden annehmen, dass $c = 1$.

Definition 6.3.1. *Der Wellen-Operator ist der partielle-Differential-Operator*

$$\Box = \partial_t^2 - \Delta.$$

Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$ ist der partielle-Differential-Operator

$$\Delta := \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2.$$

Die Zusammenhang zwischen dem Laplace sowie Wellen Operatoren ist folgende. Angenommen ist die Lösung

$$u = f(x)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann die Wellengleichung ist

$$\Box u = 0 = g''(t)f(x) - g(t)\Delta f(x) \iff \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{\Delta f}{f}(x).$$

Da die linke Seite auf t abhängt, wobei die rechte Seite auf $x \in \mathbb{R}^n$ abhängt, sind dementsprechend beide Seiten konstant. Dementsprechend gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass gelten

$$g''(t) = \lambda g(t), \quad \Delta f(x) = \lambda f(x).$$

Satz 6.3.2. *Es seien $\{\lambda_k\}$ alle Eigenwerte des Laplace-Operators auf einem Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit der Dirichlet-Randbedingung. Dann es gibt eine Basis aus Eigenfunktionen $\{f_k\}$ des Laplace-Operators. Die Lösungen der Wellen-Gleichung sind dementsprechend*

$$u_k(x,t) = \sin(\sqrt{\lambda_k}t)f_k(x),$$

wenn angenommen $u_k(x,0) = 0$.

6.3.1 Rechteck-Aufgabe

Die Laplace-Gleichung ist in der Regel nicht so einfach zu lösen. In einem Fall können Sie diese Gleichung lösen. Ein Rechteck ist ein Teilmenge $\mathbb{R}^2$ der form

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass gilt

$$(\Delta f)(x + v) = \Delta g(x), \quad g(x) := f(x + v).$$

Dementsprechend kann man annehmen, dass der Rechteck hat $a = c = 0$ also der Form

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq W\}.$$

Die Laplace-Gleichung ist

$$\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y).$$

Aufgabe: Nehmen Sie an, dass die Funktion

$$u(x, y) = f(x)g(y).$$

Verwenden Sie Trennung der Variablen, um die Laplace-Gleichung mit Dirichlet Randbedienung zu lösen. Betrachten Sie die gesamt Menge Eigenwerte sowie Eigenfunktionen.

Kapitel 7

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$(\partial_t + \Delta)u = 0.$$

Es gibt eine Fundamentallösung.

Satz 7.0.1. *Die Fundamentallösung der WLG auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$H(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}.$$

Für ein AWP

$$u(x, 0) = f(x),$$
$$(\partial_t + \Delta)u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

die Lösung ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y, t) f(y) dy.$$

Es sei $f(x)$ das Temperatur im Punkt x im Zeitpunkt 0. Dann die Lösung u ergibt das Temperatur im Punkt x im Zeitpunkt t für jede $x \in \mathbb{R}^n$ sowie $t \geq 0$. Auf einem Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit Dirichlet-Randbedingungen d.h.

$$u(x, t) = 0 \forall x \text{ Randpunkte}$$

dann die Fundamentallösung der WLG ist

$$H(x, y, t) = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} f_k(x) f_k(y),$$

wobei λ_k die Eigenwerte des Laplace-Operators sind und f_k die dazugehörige Eigenfunktionen sind. Ferner sind die EF normaliziert sodass gilt

$$\int_\Omega f_k^2(x) dx = 1,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Gebiet ist.

Kapitel 8

Numerische und weitere Methoden

8.1 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation kann verwendet werden, um DGs zu lösen.

Definition 8.1.1. *Die Laplace-Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Diese ist definierbar für alle Funktionen sodass das Integral konvergiert. In der Regel es sein kann, dass s dementsprechend eingeschränkt ist.

Beispiele:

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

für $s > 0$.

$$\mathcal{L}(e^{at)} = \frac{1}{s - a}$$

falls $s > a$.

Aufgabe: Berechnen Sie

$$\mathcal{L}(\sin(at)).$$

Satz 8.1.2. *Es gilt für zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$*

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f)(s) + b\mathcal{L}(g)(s).$$

Der Beweis folgt aus der Linearität des Integrals.

8.1.1 Aufgabe

Berechnen Sie Laplace-Transformationen (Hinweis: verwenden Sie eine Tabelle!!)

1. $6e^{-5t} + e^{3t} + 5t^3 - 9$

2. $4\cos(4t) - 9\sin(4t) + 2\cos(10t)$
3. $3\sinh(2t) + 3\sin(2t)$
4. $e^{3t} + \cos(6t) - e^{3t}\cos(6t)$.

Die Inverse-Transformation wird geschrieben

$$\mathcal{L}^{-1}.$$

Die Definition ist durch ein Weg-Integral in $\mathbb{C}$ definiert also wir lassen das einfach sein.

Satz 8.1.3. *Es gilt für $F(s) := \mathcal{L}(f)(s)$ und $G(s) := \mathcal{L}(g)(s)$*

$$\mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

Der Beweis folgt wieder aus der Linearität des Integrals.

8.1.2 Aufgabe

Berechnen Sie Inverse-Laplace-Transformationen (Hinweis: Tabelle!!!)

1. $F(s) = \frac{6}{s}$
2. $F(s) = \frac{1}{s-8}$
3. $F(s) = \frac{5}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3}$
4. $F(s) = \frac{9}{3s^2+12} + \frac{3}{s^2-49}$

Satz 8.1.4. *Es seien $f^{(k)}$ stetig für $k = 0, \dots, n-1$ und $f^{(n)}$ Stuckweis-Stetig (d.h. stetig bis auf einzelne Punkte, wo sie einen Sprung haben darf). Dann es gilt*

$$\mathcal{L}(f^{(n)} = s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Dieses kann man verwenden um AWP zu lösen. Man kann den Satz verwenden um

- lineare DGs mit *nicht* KK
- lineare DGs Grad ≥ 2 die *nicht* homogen sind

zu lösen.

Hier ist ein Beispiel:

$$y'' + 3ty' - 6y = 2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Wir verwenden die Tabelle

$$\mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y') = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -sY'(s) - Y(s),$$

wobei

$$Y = \mathcal{L}(y).$$

Dann haben wir

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + e(-sY'(s) - Y(s)) - 6Y(s) = \frac{2}{s}$$

also

$$-3sY'(s) + (s^2 - 9)Y(s) = \frac{2}{s}$$

also

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right) Y(s) = -\frac{2}{3s^2}.$$

Dieses ist eine lineare DG für den Unsub Y. Die Lösung ist laut der p-Form Methode

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + ce^{s^2/6} s^{-3}.$$

Jetzt sucht man auf der Tabelle $\mathcal{L}^{-1}$ davon. Es ist allerdings notwendig um die $\mathcal{L}^{-1}$ nehmen zu können, dass unsere Funktion erfüllt folgendes.

Satz 8.1.5. *Die Laplace-Transformation einer Funktion $f(t)$ existiert genau dann, wenn es $s > 0$ gibt, sodass das Integral*

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

Damit $Y(s)$ die Laplace-Transformation einer Funktion ist, muss gelten

$$\lim_{s \to \infty} Y(s) = 0 \implies c = 0.$$

Also unsere Lösung ist

$$y(s) = \mathcal{L}^{-1}(2s^{-3}) = t^2.$$

Aufgabe: Verwenden Sie Laplace-Transformation um folgende AWP zu lösen.

$$ty'' - ty' + y = 2, \quad y(0) = 2, y'(0) = -4.$$

8.2 Potenzreihen-Entwicklungen

Die wichtigste Funktionen sind

1. Polynom
2. e^{rx}

3. $\sin(ax$ und $\cos(ax)$

4. Kombinationen aus dieser

Alle diese Funktionen habe was gemeinsames : sie haben jeweils eine Potenzreihenentwicklung.

Definition 8.2.1. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat eine Potenzreihenentwicklung im Punkt x_0 falls es gilt*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

und die Reihe konvergiert gleichmässig absolut für alle $|x - x_0| < r$ für irgend ein $r > 0$.

Falls Sie eine DG haben, die linear ist aber nicht KK ist, folgende Methode kann funktionieren.

1. Sind die Koeffizienten Funktionen $a_n x^n$ für konstante a_n?

2. Ist die Gleichung homogen?

Falls ja, dann die Potenzreihe Methode ist, dass man annimmt, dass die Lösung der DG eine Potenzreihe hat. Das wichtigste Beispiel ist die Bessel Gleichung

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - a^2)u = 0.$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Laplace-Gleichung in Polar-Koordinaten (r, θ) mit

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ist

$$(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r\partial_\theta + r^{-2}\partial_\theta^2)u = \lambda u.$$

Verwenden Sie dieses zusammen mit Trennung der Variablen

$$u = f(r)g(\theta)$$

um zu zeigen, dass f eine Lösung der Besselsche-Gleichung ist.

8.3 Numerische Lösungen

Eine numerische Lösung ersetzt die (P)DG mit einer einfacheren (P)DG. Eine Methode heisst FEM (finite element method) oder ,,finite difference method." In dieser Methode die Ableitungen sind jeweils folgendermasse ersetzt

$$\partial_x f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Eine FEM Lösung wird dementsprechend eine Tabelle mit Werte der Eingabe-Variable(n) und Werte des Unsubs wobei für diese Methode braucht man genug Info wie z.B. ein AWP oder RWP. DG Grad n benötigt n Infos. PDG naja, die Theorie da ist etwas komplizierter.

Eine andere Methode ist die MPS (method of particular solutions). Ein Beispiel davon ist die Laplace-Gleichung auf einem Gebiet in $\mathbb{R}^2$. Die Funktion

$$u = J_\lambda(cr)\sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

löst die Laplace-Gleichung. Die konstante λ sowie c hängen von der Geometrie des Rands des Gebiets ab, da die Lösungen müssen auf dem Rand verschwinden. In MPS man nimmt so eine allgemeine Lösung und eine endliche Menge Rand-punkte und löst die Gleichungen

$$u = \sum_{i=1}^{n} J_\lambda(c_i r_i)\sin(\sqrt{\lambda}\theta_i) = 0,$$

für die Konstante c_i, wobei (r_i, θ_i) die Randpunkte sind.