Die Schöne Sprache der Mathematik

Mathematische Grundlagen für UXDesigners

Prof. Dr. Julie Rowlett

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Warum und wie?

Stellen Sie sich die Frage,

> *Warum muss ich Mathematik lernen?*

1.1 Warum?

Die Mathematik ist eine universelle Sprache. In der Informatik werden viele wichtige Ideen in der mathematischen Sprache ausgedrückt. Dementsprechend ist es wichtig für Sie, diese Sprache zu beherrschen. Wie funktionieren Computers? Was ist ihre Sprache? Die Sprache der Mathematik. Wenn Sie ein schönes Design entwerfen wollen, verwenden Sie ein Programm um Ihre Idee zu erzielen. Programms sind auf der mathematische Sprache gebaut.

Vielleicht denken Sie, dass Mathematik die Sie irgendwann brauchen werden, mit einem Taschenrechner oder Computer gemacht werden kann, und dass Sie dementsprechend keine Mathematik lernen müssen. Das stimmt nicht. Sie können etwas sehr wichtiges tun, was kein Taschenrechner oder Computer tun kann: Sie können denken. Zum Beispiel Ihr Computer zeigt Ihnen eine Antwort, die überhaupt keinen Sinn macht. Sie besitzen einen ,, Bullshit Detector." Sie können erkennen, ob ein Ergebnis sinnvoll ist oder eben Bullshit ist.

Sie besitzen noch irgendwas, was kein Taschenrechner oder Computer hat: Sie haben Gefühle. Durch dieses Buch werden Sie Ihre mathematisches Gefühl entwickeln. Sie werden lernen mathematisch zu denken und dadurch schaffen Sie mathematische Grundlagen die für Ihre Zukunft als UXDesigner. Die Mathematik in diesem Buch ist genau für Sie ausgewählt.

1.2 Wie? Der Gehirnsport

Vielleicht denken Sie, "Ja, ja, ich interessiere mich immer noch überhaupt nicht für die Mathematik. Ich werde bis zur letzten Woche vor der Klausur warten und dann nur so viel lernen damit ich die Klausur bestehe."Das wäre eine Möglichkeit. Mit dieser Methode sind die Chancen sehr gering, dass Sie die Klausur bestehen. In der Regel muss man Mathematik wie Kampfkunst (oder Sport) lernen. Wenn man durch ein Holzbrett schlagen will, muss man vorher viel üben. Sie können es ohne Übungen ausprobieren und höchstwahrscheinlich werden Sie Ihre Hand entweder zerbrechen oder zumindest sehr weh tun.

Um durch das Holz zu schlagen, braucht man Kampfkunsttechnik. Um eine mathematische Aufgabe zu lösen, braucht man Mathematiktechnik. Wie bekommt man diese Technik? Durch Übungen!

Grandmaster sagt, dass wenn man einen Perfekten Schlag haben will (Front Punch), muss man ein jeden Tag ein ganzes Jahres 8 Stunden am Tag nur den Schlag (Front Punch) üben. Nur durch so viel Übung wird der Schlag perfekt. Genauso mit der Mathematik : je mehr man übt, deste besser werden die mathematische Fähigkeiten sowie Ergebnisse.

Wenn Sie also sicher sind, dass Sie Ihre mathematische Veranstaltung bestehen wollen, dann können wir zusammen arbeiten. Sie werden sehen, dass Mathematik sogar Spaß machen kann. (Sie glauben mir jetzt vielleicht nicht aber meiner Erfahrungen nach werden Sie Ihre Meinung ändern...)

Erfolg macht jedem Spaß. Am Anfang, sieht neue Mathematik erschreckend aus.[1] Wenn Sie aber geduldig sind und versuchen diese zu verstehen, und gut üben, kann ich Ihnen versprechen, dass Sie irgendwann alles verstehen werden. Ganz leicht. Und Sie werden erfahren, was für ein tolles Gefühl das ist! Ja, Sie haben was erschreckendes gemeistert! Der Prozess: (1) neues Material - Verwirrung, (2) Arbeit und Übungen, stur sein, dran bleiben, (3) Die Glühbirne! Und noch ein bisschen mehr üben, (4) Geschafft! Nach diesem Prozess werden Sie ein ganz tolles Erfolgsgefühl haben.

[1] Als Mathematikerin muss ich ständig neue Mathematik lernen, und ich denke oft am anfang, WAS?? Was soll dies darstellen?

Teil I

Logische und topoLogische Grundlagen

Kapitel 2

Einführung in die Logik

Die Mathematik ist eine Sprache, die auf fundamentalen Ideen begründet ist. Wie jede Sprache hat sie Wörter.

Definition 2.0.1. *Ein mathematischer Wort ist eine mathematische Idee mit einer ganz genauen technischen Definition.*

Alles was wir in der Mathematik diskutieren hat eine Definition. Der erste Schritt wenn man Mathematik lernt, ist die Definitionen auswendig zu lernen. Wie bei jeder Sprache müssen Sie zuerst den Wortschatz auswendig lernen! Es reicht nicht wenn Sie eine Definition vage lernen. Sie brauchen ihre ganz genaue Bedeutung. Die Mathematik ist aber eine Sprache der Ideen, und Sie können diese Ideen in ihren eigenen Wörtern ausdrücken. Am besten können Sie die Bedeutung eine mathematische Definition in ihrer Muttersprache verstehen. Wichtig sind nicht die Sprache in der Sie eine mathematische Definition ausdrücken, auch nicht Ihre Wortwahl, sondern nur die richtige Bedeutung.

Nachdem Sie einige mathematische Definitionen gelernt haben, können Sie mathematische Sätze lernen.

Definition 2.0.2. *Ein Satz in der Sprache der Mathematik ist ein (oder mehre) Sätze in der grammatikalischen Definition eines Satzes, der immer wahr ist.*

Der Grund weshalb einen Satz immer stimmt, ist sein Beweis. Die reine Mathematik ist rein: ein Satz ist unfehlbar, er ist rein.

Jeder Satz hat Hypothese, die erfüllt werden müssen, um den Satz anwenden zu können. Kennen Sie einige mathematische Formeln? Der Grund weshalb solche Formel immer gelten ist, weil sie auf mathematischen Sätze begründen. Zum Beispiel : die Lösungen der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bei einer Gleichung die ähnlich aussieht, wie

$$ax^3 + bx + c = 0,$$

gilt die Formel nicht mehr. Die Formel gilt nur genau für Gleichungen in genau dieser Form $ax^2+bx+c=0$. Jedes mal wenn Sie irgendeinen Satz oder mathematische Formel anwenden, sollte die Hypothese übereinstimmen. Wenn Sie eine Formel mit einem Taschenrechner oder mit einem Computer berechnen, hat der Taschenrechner oder der Computer keine Ahnung, ob die Hypothese für die Formel übereinstimmen. Nur Sie, ein Mensch mit einem Gehirn, können das tun.

2.1 Die Logik

In der Logik geht es um die Zusammenhänge Ereignisse zu verstehen.

- Impliziert ein Ereignis weitere Ereignisse?
- Sind manche Ereignisse nicht zu gleich möglich?
- Was benötigt man, um ein Ereignis zu erreichen?

Um die Logik auszudrücken benötigen wir Aussagelogik.

2.2 Klassische Aussagelogik

Definition 2.2.1. *Eine Aussage ist ein Ereignis in Wörter ausgesprochen oder aufgeschrieben. Oft wird eine Aussage einen einfachen Namen gegeben, wie z.B. ein Buchstabe ,,A" oder ,,B". Der Name einer Aussage ist nur eine Art Abkürzung der Aussage.*

Beispiele: Aussage: Es regnet. Ereignis in diesem Fall ist ja, dass es regnet! Wir können diese Aussage ,,R" nennen. Der Name oder Abkürzung einer Aussage kann am besten gewählt werden, im dem er uns dran erinnert, was die Aussage bedeutet.

Definition 2.2.2. *In der klassische Logik hat jede Aussage einen von genau zwei Warheitswerten falsch oder wahr. Dieses nennt man das Prinzip der Zweiwertigkeit oder Bivalenzprinzip.*

Wir bezeichnen eine Aussage als wahr nur genau dann, wenn die Aussage immer und ewig wahr ist.

Definition 2.2.3. *Eine Elementaraussage ist eine Aussage, die keine aussagenlogischen Verknüpfungen (nicht, und, oder, wenn...dann, genau dann wenn) enthält.*

Beispiele Elementaraussagen:

A Ingolstadt ist 120 km von München entfernt.

B 12 ist durch 2 teilbar.

C Alle Häuser in Ingolstadt sind bund.

D Prof. Dr. Rowlett hat einen Schwarzgürtel zweites Grades in einem Koreanischen Kampfkunst.

Übung 2.2.4. *Welche der obigen Elementaraussagen sind wahr und welche sind falsch? (Hinweis: Aussage D ist wahr.)*

Definition 2.2.5. *Es sei eine Aussage A gegeben. Die verneinte Aussage bzw. Negation (auch Satzverneinung, äußere Verneinung, kontradiktorisches Gegenteil) der Aussage ist diejenige Aussage geschrieben $\neg A$ oder $!A$ oder A, die genau wahr ist, wenn A falsch ist, und die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist. Einfacher: Die Verneinung einer Aussage A dreht den Wahrheitswert von A in sein Gegenteil um.*

Übung 2.2.6. *Formulieren Sie die Negation der obigen Aussagen.*

Eselsbrücke 2.2.7. *Um das Zeichnen $\neg A$ zu merken, denke ich, dass es wie ein Weg aussieht, in dem man zuerst Richtung A läuft, dann sich von A erschreckt und schnell weg von A nach rechts abbiegt.*

Übung 2.2.8. *Mögen Sie meine Eselsbrücke nicht, dann erfinden Sie Ihre eigene!*

Beispiele:

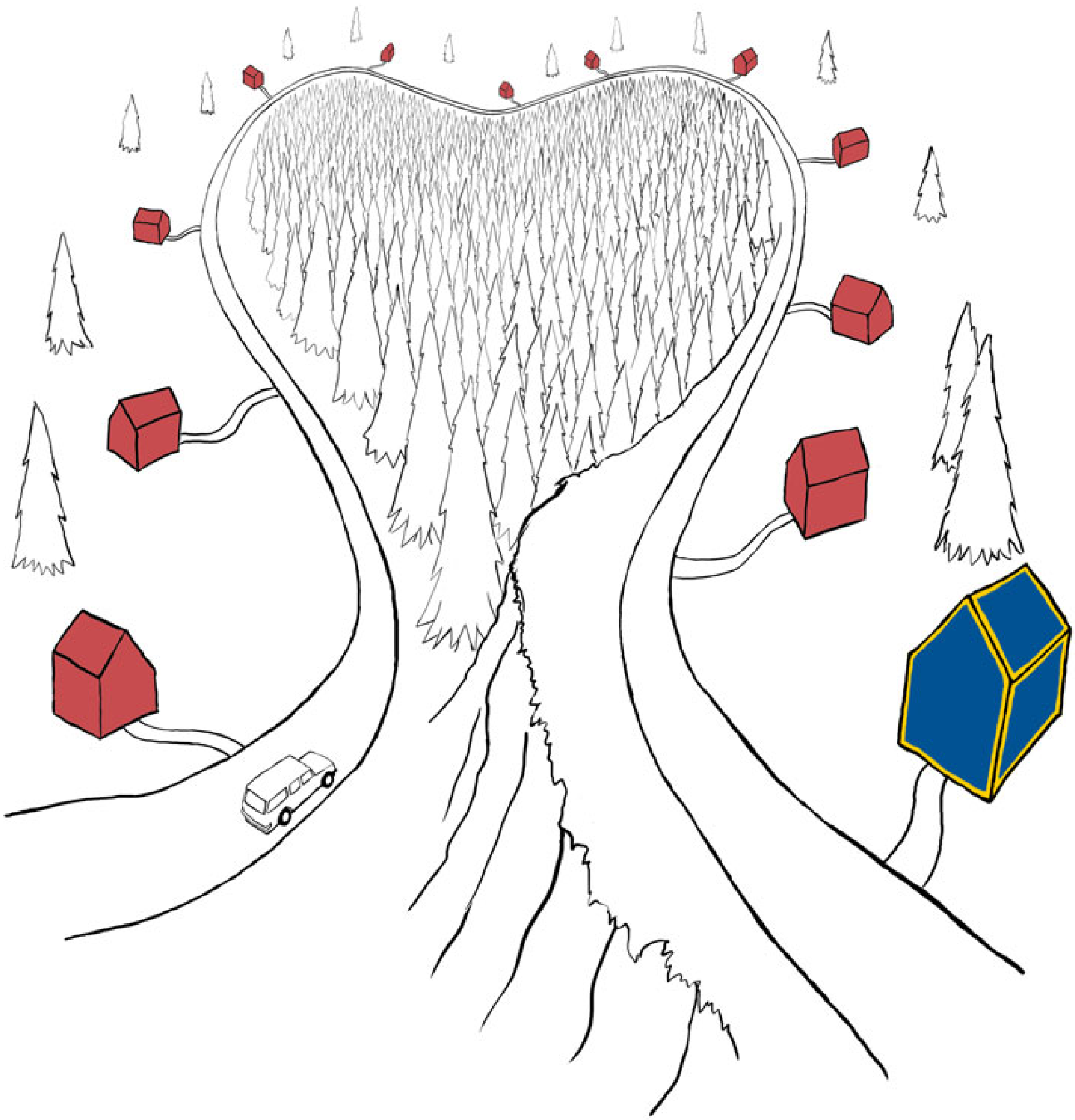
1. Aussage : jede Zahl ist ungerade. Die Bedeutung dieser Aussage ist dass jede Zahl ungerade sein muss. Wenn diese falsch ist, bedeutet das, dass es einige Zahlen geben kann, die nicht ungerade sind. Die Negation ist also : nicht jede Zahl ist ungerade. In diesem Fall ist die ursprungliche Aussage falsch und die Negation richtig.

2. Aussage : es gibt einige gerade Zahlen. Die Gegenbedeutung ist : es gibt keine gerade Zahlen. In diesem Fall ist die ursprungliche Aussage richtig und die Negation falsch.

3. Aussage : Jeder Deutsche isst gern Fleisch. Die Negation ist also : Nicht jeder Deutsche isst gern Fleisch. Was wichtig ist, ist die Bedeutung. Wir können dieselbe Bedeutung auch so ausdrücken : nicht unbedingt jeder Deutsche isst gern Fleisch. Dieselbe Bedeutung ist : Es kann sein, dass einige Deutsche nicht gern Fleisch essen.

Eine typische mathematische Aussage ist : zu jede-oder für jede A gilt B. Was ist die Negation? Die Negation ist : es gibt ein A sodass B nicht gilt.

Hier ist ein Beispiel. Waren Sie mal in Schweden? Auf dem Schwedischen Land ist jedes Haus rot. Man könnte also denken, dass jedes Haus in Schweden rot ist. Wenn dies als einen mathematischer Satz bewiesen werden soll, dann muss man jedes einzelne Haus in Schweden besuchen, und wir können dies mathematisch vergleichen : wir müssen jeden Fall (Haus) übereinstimmen! Um aber zu beweisen dass die Aussage falsch ist, und die Negation richtig ist, brauchen wir nur ein Haus das nicht rot ist!



Übung 2.2.9. *Überlegen Sie, dass folgende für die Verneinung gelten:*

- *Wenn eine Aussage A wahr ist, ist die Verneinung $\neg A$ falsch.*
- *Wenn eine Aussage A falsch ist, ist die Verneinung $\neg A$ wahr.*
- *Eine Aussage A kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.*
- *Die Aussagen A und $\neg A$ können nicht gleichzeitig wahr sein*

2.2.1 Konjunktion und Disjunktion

Definition 2.2.10. *Die Konjunktion ist eine aus zwei Aussagen zusammengesetzte Aussage, die die Wahrheit all ihrer Teilaussagen behauptet. Umgangssprachlich verbindet man zwei Aussagen A und B durch das Bindewort „und" zu einer Konjunktion „A und B", in der logischen Sprache verwendet man meist das Zeichen $\wedge$ gelegentlich auch das kaufmännische Und, den Ampersand &.*

Die Aussage $A \wedge B$ ist immer dann wahr, wenn sowohl A als auch B jeweils wahr sind. Andernfalls ist $A \wedge B$ falsch, nämlich dann, wenn entweder A oder B oder beide Aussagen falsch sind.

Übung 2.2.11. *Machen die Konjunktion von den obigen Aussage $A - -D$. Wie viele insgesamt gibt es?*

Es gibt 4 Aussagen insgesamt und wir wählen jeweils 2 davon. Die Päarchen sind dementsprechend AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Eselsbrücke 2.2.12. *Um das Zeichnen $\wedge$ zu merken, denke ich, dass man zwischen A und B steht und die Seite der $\wedge$ sind wie zwei ausgestreckte Arme, damit man mit der linken Hand A hält und in der rechten Hand B hält, wie zwei Freunde.*

Übung 2.2.13. *Mögen Sie meine Eselsbrücke nicht, dann erfinden Sie Ihre eigene!*

Definition 2.2.14. *Eine Disjunktion ist eine zusammengesetzte Aussage, die behauptet, dass mindestens eine ihrer Teilaussagen wahr ist. Die Disjunktion in diesem Sinn wird auch nichtausschließendes Oder genannt. (Aber Achtung: Die Bezeichnung ,,Disjunktion" wurde und wird oft auch für das ausschließende Oder, ,,entweder ... oder", verwendet. Einige Autoren verwenden daher für das Nichtausschließende Oder den Begriff Adjunktion.) Das Formelzeichen $\vee$ stammt von dem lateinischen Wort ,,vel", was auf deutsch ,,oder" bedeutet.*

Sprechweise: ,,A oder B"; genauer: ,,A oder B oder beide", abgekürzt ,,A und/oder B" oder auf Englisch ,,A OR B."

Die Aussage ist immer dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen A oder B wahr ist, bzw. wenn beide Teilaussagen wahr sind. Andernfalls ist sie falsch, genau dann, wenn sowohl A als auch B falsch sind.

Übung 2.2.15. *Machen die Disjunktion von den obigen Aussage $A--D$. Wie viele insgesamt gibt es?*

Eselsbrücke 2.2.16. *Um das Zeichnen $\vee$ zu merken, ich stelle mir vor, dass ich zwischen A und B stehe, und nicht entscheiden kann, ob ich A will oder B oder beide. Dann halte ich die Hände hoch wie beim Achselzucken.*

Übung 2.2.17. *Mögen Sie meine Eselsbrücke nicht, dann erfinden Sie Ihre eigene!*

2.2.2 Implikation und Umkehrung

Es ist gut zu wissen wann irgendwas wichtiges passieren wird. Zum Beispiel : wenn der Nutzer auf diesem Knopf drückt dann wird folgende App offnen. Dieses können wir in der reine Mathematik mithilfe der Aussagelogik ganz genau und ganz kurz schreiben.

Definition 2.2.18. *Die materiale Implikation, auch Implikation, Konditional oder Subjunktion genannt, drückt die hinreichende Bedingung aus: Sie sagt, dass die Wahrheit des einen Satzes eine hinreichende Bedingung für die Wahrheit des anderen Satzes ist. Man schreibt*

$$A \implies B$$

um liest A impliziert B.

Beispiele:

1. Es sei A die Aussage ,,der Nutzer drückt auf dem Knopf A." Es sei B die Aussage ,,App A offnet sich." Sie wollen ein Programm schreiben, damit $A \implies B$.

2. Sie sind im Hörsaal der THI impliziert, dass Sie in der THI sind. Definieren wir die Aussage A als ,,Sie sind im Hörsaal der THI."Definieren wir die Aussage B als ,,Sie sind in der THI." Dann es gilt
$$A \implies B.$$

Die Implikation ist ein wichtiges Mittel in der Mathematik sowie in der Informatik. Die meisten mathematischen Beweise verwenden das Konzept der Implikation. Computer-Programms verwenden auch die Implikation insbesondere folgende Art der Implikation.

Definition 2.2.19. *Es seien A und B Elementaraussagen. Die Implikation $A \implies B$ ist ausgesprochen als ,,falls A dann B." Anders formuliert : Jedes mal wenn A gilt dann muss auch B gelten. In einer Äußerung wie "A impliziert B" ist A die Hypothese und B die Folgerung. Der Pfeil der Implikation $\implies$ bedeutet, was sich auf dem Ansatz des Pfeils befindet impliziert was auch der Spitze des Pfeils.*

Der Pfeil der Implikation ist ein wunderbare kurze Schreibweise. Es ist egal ob ich
$$A \implies B$$
schreibe, oder
$$B \Leftarrow A$$
schreibe. Wir können auch den Pfeil vertikal verwenden, von oben nach unten oder unten nach oben.

Proposition 2.2.20. *Die Negation einer Implikation $A \implies B$ ist $A \not\Longrightarrow B$ und bedeutet, dass es sein kann, dass A gilt aber B gilt nicht.*

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus der Definitionen.

Definition 2.2.21. *Die Umkehrung einer Implikation $A \implies B$ ist die Implikation $B \implies A$.*

Beispiel: Die Umkehrung des letzten Beispiels ist : Sie sind in der THI impliziert, dass Sie im Hörsaal der THI sind. Ist diese Aussage wahr? Eigentlich nicht, da Sie auch beim Kaffee trinken sein könnten oder in der Bibliothek oder in einem Büro oder aufs Klo...

Eselsbrücke 2.2.22. *Wenn wir den Pfeil anwenden, ist es leichter die Definition der Umkehrung zu merken : die Umkehrung von $A \implies B$ ist genau*
$$B \implies A.$$
Die Richtung des Pfeils wurde also umgekehrt.

Übung 2.2.23. *Mögen Sie meine Eselsbrücke nicht, dann erfinden Sie Ihre eigene!*

Beispiele:

1. Aussage: falls $2+2=4$, dann ist $x=5$. Erst sollen wir diese in die Form "A impliziert B" setzen. Was ist A? In diesem Fall ist "A" die Aussage $2+2=4$, und "B" die Aussage $x=5$. Mit dem Pfeil können wir diese wie folgt darstellen :

$$2+2=4 \implies x=5.$$

Um die Umkehrung zu machen, müssen wir den Pfeil einfach umkehren :

$$x=5 \implies 2+2=4.$$

Die Umkehrung ist also in Wörter : falls $x=5$, dann ist $2+2=4$.

2. Aussage : falls es regnet, dann wachsen die Blumen. Diese ist zwar keine mathematische Aussage aber sie hat ebenso eine Umkehrung. Erst sollen wir A und B identifizieren. In diesem Fall ist A "es regnet" und ist B "die Blumen wachsen."Wir können also schreiben :

$$\text{es regnet} \implies \text{die Blumen wachsen.}$$

Die Umkehrung ist also

$$\text{die Blumen wachsen} \implies \text{es regnet.}$$

Bei diesem Beispiel haben die ursprüngliche Aussage und ihre Umkehrung verschiedene Bedeutungen. Allgemeiner gilt :

> Normalerweise hat eine Aussage und ihre Umkehrung sehr verschiedene Bedeutungen.

Die ursprüngliche Aussage ist realistisch, da Blumen Regen brauchen um zu wachsen. Die Umkehrung würde bedeuten, dass Blumen das Regnen voraussagen können, und das wäre erstaunlich! [1]

Es kann manchmal sein dass eine Aussage und ihre Umkehrung beide gelten. Zum Beispiel :

3. Äußerung falls $2x+3=1$, dann ist $x=-1$. In diesem Fall ist A $2x+3=1$ und ist B $x=-1$. Mit dem Pfeil :

$$2x+3=1 \implies x=-1.$$

Die Umkehrung ist also

$$x=-1 \implies 2x+3=1,$$

und die Bedeutung ist: falls $x=-1$, dann ist $2x+3=1$.

[1]Es gibt einige Arten von Pflanzen scheinen Regen voraussagen zu können. Erforschen Sie "the Texas Sage" und andere Pflanzen die vielleicht doch voraussagen können. Es gibt viel hoch-interessante Forschung wenn Naturwissenschaftler zusammen mit Mathematiker arbeiten.

In dem Beispiel sind beide Aussagen äquivalent. Dies bedeutet dass beide

$$2x + 3 = 1 \implies x = -1$$

und

$$x = -1 \implies 2x + 3 = 1,$$

was wir so schreiben können

$$2x + 3 = 1 \iff x = -1,$$

da die Implikation in beiden Richtungen gilt!

Manchmal ist es nicht so anschaulich ob zwei Aussage dieselbe Bedeutung haben. An folgenden Beispiel zu sehen

$$2x + 3 = 1 \iff x = -1,$$

sollen wir zuerst beide Richtungen bestätigen :

1. $2x + 3 = 1$ impliziert $x = -1$, und
2. $x = -1$ impliziert $2x + 3 = 1$.

2.2.3 Äquivalenz und Kontraposition

Definition 2.2.24. *Falls eine Implikation $A \implies B$ wahr ist und auch ihrer Umkehrung $B \implies A$ wahr ist, dann sind die Aussagen A und B äquivalent, und wir schreiben*

$$A \iff B.$$

Definition 2.2.25. *Es seien A und B Aussagen. Die Kontraposition der Implikation $A \implies B$ ist die Implikation $\neg B \implies \neg A$.*

Jetzt werden wir unseren ersten Satz beweisen.

Satz 2.2.26. *Eine Implikation $A \implies B$ gilt, genau dann, wenn ihre Kontraposition $\neg B \implies \neg A$ gilt. Anders formuliert : die Implikation $A \implies B$ ist äquivalent ihrer Kontraposition.*

Beweis: Wir müssen zwei Aussage zeigen : zuerst falls $A \implies B$ gilt, dann gilt $\neg B \implies \neg A$. Die Implikation $A \implies B$ bedeutet, dass B aus A folgt. Dementsprechend die Negation von B impliziert die Negation von A.

Die zweite Aussage ist, dass $\neg B \implies \neg A$ impliziert $A \implies B$. Wenn die Negation von A aus der Negation von B folgt bedeutet es, dass falls A gilt dann kann $\neg A$ nicht gelten also kann $\neg B$ auch nicht gelten (weil falls ja, dann müss $\neg A$ auch gelten, was nicht wahr ist). Wenn $\neg B$ nicht gilt, heisst es, dass B gilt. Also $A \implies B$.

Kurzer formuliert haben wir zuerst gezeigt

$$(A \implies B) \implies (\neg B \implies \neg A)$$

und danach

$$(\neg B \implies \neg A) \implies (A \implies B).$$

2.3 Mengen

Wir benötigen den Begriff „Menge” um Ordnung in unser Programms und Umgebung zu beherrschen.

Definition 2.3.1. *Eine Menge ist eine Sammlung Elemente. Man schreibt*

$$\{\textit{Liste der Elementen der Menge }\}.$$

Die leere Menge ist die Menge, die kein Element enthält. Sie ist geschrieben

$$\{\}$$

oder auch

$$\emptyset.$$

Falls eine Menge M nicht leer ist und e ist Element der Menge M dann schreibt man

$$e \in M,$$

was ausgesprochen würde als „e ist Element von M.” Ebenso kann man sagen „M enthält e” und schreiben

$$M \ni e.$$

Beispiele:

1. Die Menge, die die Elemente der Zahlen 1, 2, und 3 enthält schreibt man

$$\{1, 2, 3\}.$$

$$1 \in \{1, 2, 3\},$$

und

$$2 \in \{1, 2, 3\},$$

und

$$\{1, 2, 3\} \ni 3,$$

aber Bob ist kein Element dieser Menge.

2. Die Menge, die alle Studenten deren Namen mit Z anfängt ist?

3. Eine interessante Menge ist, die Menge alle Zahlen, die ein Potenz von 2 sind.

Definition 2.3.2. *Eine Menge, genannt M, ist eine Teilmenge der Menge N falls jedes Element M auch ein Element N ist. Man schreibt*

$$M \subset N$$

oder auch

$$M \subseteq N.$$

Beispiele:

1. Was ist eine Menge, die Teilmenge von jeder Menge ist?
2. Es sei M eine Menge, die nicht leer ist. Was ist ebenso eine nicht leere Menge, die M als Teilmenge enthält?

Definition 2.3.3. *Für zwei Menge A und B ist die Menge*

$$A \cup B$$

definiert als die Menge alle Elemente, die entweder in A sind, oder in B sind, oder in beide sind. Ausgesprochen heisst $A \cup B$ die Vereinigung von A und B.

Beispiele:

1. Es sei M eine Menge. Was ist $M \cup \emptyset$?
2. Es sei $M = \{1, 2, 4\}$ und $N = \{2, 4, 6\}$. Was ist $M \cup N$?

Definition 2.3.4. *Für zwei Menge A und B ist die Menge*

$$A \cap B$$

definiert als die Menge alle Elemente, die in beide A und B sind. Ausgesprochen heisst $A \cap B$ der Durschnitt von A und B. Falls A und B kein gemeinsame Elemente haben ist also der Durschnitt die leere Menge und in diesem Fall sagt man, dass A und B disjunkt sind.

Beispiele:

1. Es sei M eine Menge. Was ist $M \cap \emptyset$?
2. Es sei $M = \{1, 2, 4\}$ und $N = \{2, 4, 6\}$. Was ist $M \cap N$?

Es gibt einige Menge von Zahlen, die wir später genauer anschauen werden, die Sie schon kennen.

Definition 2.3.5. *Die Menge alle ganze positive Zahlen, auch als natürliche Zahlen, heisst*

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die Menge alle ganze Zahlen, heisst

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Sobald wir eine Menge M haben, können wir ihre Potenzmenge definieren.

Definition 2.3.6. *Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge alle Teilmenge von M und würde geschrieben als*

$$\mathcal{P}(M).$$

Übung 2.3.7. ** Es sei M eine Menge die n Elemente enthält. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente enthält. (Hinweis: Beweis durch Induktion).*

Definition 2.3.8. *Es seien M und N Menge. Eine Regel, die zu jedes Element aus M eindeutig ein Element aus N ordnet heisst eine Abbildung von M in N. Nennen wir so eine Regel f dann schreiben wir*

$$f : M \to N,$$

und bezeichnen wir für $m \in M$ $f(m)$ das Element aus N die f zu m ordnet. Falls für $a \neq b$ zwei verschiedene Elemente M sind gilt $f(a) \neq f(b)$ dann heisst f injektiv. Falls für jedes $n \in N$ es ein $m \in M$ gibt, sodass gilt $f(m) = n$, dann heisst f surjektiv. Falls f injektiv sowie surjektiv ist, dann heisst f bijektiv.

2.4 Aufgaben

Sie können die Mathematik nur durch mathematische Erfahrungen lernen. Was sind "mathematische Erfahrungen?" Mathematische Übungen oder Probleme zu lösen! In der reinen Mathematik lösen wir mathematische Probleme die noch nie gelöst worden sind. Es ist nicht immer so leicht. Wir arbeiten Stunden, Tage, Wochen, Monate und sogar Jahre an einem Problem. Jeden Tag versuchen wir verschiedene Idee, lösen Gleichungen, betrachten Beispiele, und die meiste Zeit wird das ganze in den Mulleimer geworfen. Es kann vielleicht zwecklos erscheinen, ist es aber nicht. Die Zeit wenn wir das Problem nicht lösen können aber dran bleiben genau die Zeit und die Erfahrung, die wir brauchen um unser Ziel zu erreichen. Wenn man lange daran arbeitet, kämpft und endlich die Lösung findet, ist das Gefühl unbeschreiblich. Jeder mag Erfolg, aber Erfolg nach einem langen Kampf ist noch besser. Wenn Sie versuchen die Übungsaufgabe zu lösen und es scheint, dass alles einfach in den Mülleimer geht - dran bleiben! Geben Sie nicht auf! Sie können das, und Sie sind auch nicht allein. Es gibt Mathematiker auf der ganzen Welt die denselben Kampf durchmachen, Sie sind in guter Begleitung.

1. Was ist die Umkehrung : falls das Produkt von zwei ganzen Zahlen positiv ist, dann sind beide Zahlen positiv.

2. Was ist die Kontraposition?

3. Was ist die Negation?

4. Was stimmt : die Aussage, ihre Umkehrung, die Kontraposition, oder die Negation?

5. Was ist die Negation : jede ungerade ganze Zahl kann durch 2 geteilt werden.

6. Was ist die Negation : Düsseldorf ist immer wolkig.

7. Was ist die Umkehrung : falls die Summe von zwei ganze Zahlen ungerade ist, dann ist eine von den beiden ungerade.

8. Was ist die Kontraposition : falls es regnet, dann regnet es wie Wasser aus einem Eimer.

9. Sie haben eine Berechnung mit einem Computer durchgeführt, um die Konzentration einer Salzwasserlösung zu berechnen. Das Ergebnis ist 117 Prozent Salz. Kann dass sein? Warum oder warum nicht?

10. Man nennt eine Zahl die grösser als 0 ist positiv, und eine Zahl die kleiner als 0 ist wird negativ genannt. Was ist der Unterschied zwischen einer positiven Zahl und einer nicht-negativen Zahl?

11. * Sie sind leider von Russische Mafioso entführt worden. Die Russen argumentieren über zwolf Steine. Sie sehen alle wie Diamanten aus aber nur eine davon ist das echte Diamant. Die Russen haben vier Apothekerwaagen die perfekt kalibriert sind, aber sobald Sie sie einmal anwenden, nicht mehr kalibriert werden können, ohne sie irgendwohin zu bringen. Sie wissen, dass das echte Diamant ein wenig schwerer oder leichter sein muss, als die falsche Steine, die identisch sind. Sie sagen, dass Sie feststellen können, welches Diamant das echte ist und ebenso beweisen können, dass Sie recht haben. Damit wollen Sie Ihre Freiheit tauschen. Wie machen Sie das?

12. * Sie haben leider ein instabiles System auf viele Computers die zufällig zwischen Betriebssystem A und B wechselt. Wenn Sie ein bestimmtes Code eingeben, wir das Betriebssystem gewechselt (falls es auf A ist, wird es zu B wechseln und umgekehrt). Sie wollen die Computers in zwei Gruppen aufteilen, damit jede Gruppe den gleichen Prozentanteil hat, die auf Betriebssystem A läufen. Sie wissen, dass es im Moment insgesamt 100 Computers gibt, und dass insgesamt 50 davon auf Betriebssystem A sind. Die Computers sind aber komplett durcheinander gemischt und Sie arbeiten von fern also können Sie nicht einfach schauen ob sie auf A oder B sind. Wie können Sie trotzdem zwei Gruppen von Computers aufteilen, damit Sie jeweils den gleichen Prozentanteil haben, die auf Betriebssystem A läufen?

13. * Sie arbeiten bei der Polizei, wie im Fernsehen (CSI, Rizzoli und Isles, Bones...). Die Polizei hat zwei mögliche Täter festgenommen, die Zwillinge sind. Einer davon ist ein ehrlicher Mensch, und der andere davon ist ein Lügner und ein Dieb. Ein Kind wurde entführt, und die beiden Zwillinge wissen wo das Kind zu finden ist. Die Polizei hat schon herausgefunden, dass das Kind entweder im Novotel oder im Ibis festgehalten wird. Sie können sicher sein, dass der ehrliche Zwillinge immer die Wahrheit sagt, und der Lügner immer lügt. Wie können Sie mit nur eine Frage, deren Antwort entweder ja oder nein ist, herausfinden wo das Kind ist?

2.5 Hinweise und Beispiele

Sie haben vielleicht nicht so viel Interesse an Mathematik, aber Sie wollen möglicherweise eine gute Note in der Klausur. Da Sie die Klausur allein schreiben werden, sollten Sie immer zuerst die Aufgaben allein versuchen, um dafür bereit zu sein. Es kann sein, dass Sie irgendwann einfach nicht weiter kommen können, und dass Sie einen Hinweis verdient haben. Wie können Sie wissen, ob Sie einen Hinweis verdient haben?

2.5.1 Die Hinweisregel

Sie haben einen Hinweis verdient wenn :

> *Sie lang genug an der Aufgabe gearbeitet haben, damit Sie die Aufgabe und jede mathematische Definition die für die Aufgabe relevant ist auswendig können.*

Wenn Sie einen Hinweis verdient haben, soll Ihrer Lehrer oder Professor Ihnen helfen, bis Sie die Aufgabe lösen können. Sie haben es doch verdient!

- Für eine Aussage der Form "falls A dann B," können wir diese so schreiben

  $$A \implies B.$$

  Die Umkehrung kehrt die Richtung des Pfeils um. Um die Kontraposition zu machen, machen wir zuerst die Negation von A sowie B. Dann lautet die Kontraposition : nicht B impliziert nicht A.

- Was bedeutet 100 Prozent?

  Bemerkung 2.5.1. *Sie sind ein Mensch und Sie können denken. Wenn Sie einen Taschenrechner anwenden um eine Rechnung durchzuführen können nur Sie merken, ob die Antwort überhaupt möglich ist. Nennen wir diesen Gedankprozess, "Der Bullshit Detektor.Taschenrechner haben keinen Bullshit-Detektor, aber Sie schon! Falls Sie einen Tippfehler gemacht haben, als Sie die Rechnung eingaben, können Sie nachher den Fehler bemerken und korrigieren, wenn Sie sich nur ein bisschen Zeit nehmen, um mathematisch zu denken, und Ihren Bullshit-Detector anzuwenden.*

- Was unterscheidet positiv und negativ? Welche Zahl ist nicht positiv und nicht negativ?

- Sie haben zwölf Proben und vier Waagen. Anstatt mit 6 auf jeder Seite, probieren Sie erst mit vier und vier.

- Sie können die Code anwenden, damit alle in einer Gruppe die auf A sind, zu B wechseln und umgekehrt.

- Sie brauchen eine Frage die mit beiden Brüdern zu tun hat. Diese Aufgabe ist fast dieselbe wie im Film „Labyrinth" als Jennifer Connelley vor zwei Türen steht…

2.6 Quantorenlogik

,,Die Quantorenlogik bildet eine Familie logischer Systeme, die es erlauben, einen weiten und in der Praxis vieler Wissenschaften und deren Anwendungen wichtigen Bereich von Argumenten zu formalisieren und auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Auf Grund dieser Eigenschaft spielt die Prädikatenlogik eine große Rolle in der Logik sowie in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie." (Wikipedia)

Definition 2.6.1. *Ein Quantor legt fest, wie viele Elemente aus einer Menge eine Aussage erfüllen.*

Warum benötigen wir Quantoren? Wir benötigen Quantoren um Aussage kurzer ausdrücken zu können. Hier ist ein Beispiel.

> Für jede Zahl ist das Produkt der Zahl mit zwei gleich die Summe der Zahl mit sich selbst.

Mit Quantoren können wir den Satz so schreiben

$$z + z = 2z \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Sie können Quantorenlogik und logische Zeichnen mit Computer-Sprachen vergleichen. Sie sind auf demselben Prinzip aufgebaut. Dementsprechend ist die Logik so wichtig für Sie!

Um Quantoren zu verwenden benötigen Sie folgende Zutaten:

1. Eine Menge M die nicht leer ist
2. Eine Aussage A die eine Regel für die Elemente M ist
3. Ein Quantor sagt also wie viele Elemente der menge M die Aussage A erfüllt. Man schreibt für ein Element $x \in M$, $A(x)$ um zu bedeuten, dass Aussage A fürs Element x gilt.

Beispiele Quantoren sind:

1. Der Allquantor $\forall$. Dieser Quantor bedeutet, dass die Aussage die mit dem $\forall$ verknüpft ist gilt, für jedes Element.
2. Der Existenzquantor $\exists$ bedeutet, dass es mindestens ein Element gibt, die die Aussage erfült.
3. Der Eindeutigskeitquantor $\exists!$ bedeutet, dass es genau ein Element gibt, die die Aussage erfüllt.
4. Der Anzahlquantor $\exists^{=n}$ bedeutet, dass es genau n von einander verschiedene Elemente gibt, die die Aussage erfüllen.

Definition 2.6.2. *Die kurze Schreibweise einer Aussage der Form $\forall$ Elemente einer nicht leere Menge M gilt Aussage A ist*

$$\forall x \in M A(x).$$

Äquivalent ist die kurze Schreibweise

$$A(x) \forall x \in M.$$

Die kurze Schreibweise einer Aussage der Form $\exists x \in M$ sodass A gilt für x ist

$$\exists x \in M A(x).$$

Die kurze Schreibweise einer Aussage der Form $\exists! x \in M$ sodass A gilt für x ist

$$\exists! x \in M A(x).$$

Beispiele:

1. Es sei für dieses Beispiel M die Menge $\mathbb{N}$. Es sei A die Aussage, dass das Element von M gleich 1 ist. Dann
$$\exists! x \in M A(x),$$
was ist x in diesem Fall?

2. Es sei wieder $M = \mathbb{N}$. Dieses mal sei A die Aussage, dass das Element von M ist grosser oder gleich 1. Dann
$$\forall x \in M A(x).$$

3. Es sei jetzt $M = \mathbb{Z}$. Es sei A die Aussage, dass das Element von M ist grosser oder gleich 0. Dann gilt die Aussage für einige Elemente, also nicht nur eine, aber nicht für jedes Element also
$$\exists x \in M A(x).$$

4. Es sei $M = \mathbb{Z}$. Es sei A die Aussage, dass das Element von M zwischen 5 und 10 ist (grosser gleich 5 und kleiner gleich 10). Dann
$$\exists^{=6} x \in M A(x).$$

Satz 2.6.3 (Fundamentalsatz der Quantorenlogik)**.** *Für eine nicht leere Menge M und eine Aussage A gilt:*

$$\neg(\forall x \in M A(x)) = \exists x \in M \neg A(x),$$

$$\neg(\exists x \in M A(x)) = \forall x \in M \neg A(x).$$

Beweis: Für die erste Aussage überlegen wir, einfach was es bedeutet, wenn die Aussage $\forall\ x \in M\ A(x)$ nicht wahr ist. Die Aussage bedeutet, dass $A(x)$ muss für jede $x \in M$ gelten. Also damit dieses nicht mehr wahr ist, braucht man nur ein (oder mehre) $x \in M$ sodass $A(x)$ nicht gilt. Dementsprechend ist die Negation, dass es mindestens ein $x \in M$ gibt, sodass $A(x)$ nicht gilt, und $A(x)$ gilt nicht, genau dann, wenn $\neg A(x)$ gilt. Das heisst, dass die erste Negation ist

$$\exists x \in M \neg A(x).$$

Für die zweite Aussage, wollen wir die Negation von $\exists x \in M A(x)$. Diese Aussage bedeutet, dass die Aussage $A(x)$ für mindestens ein Element $x \in M$ gilt. Dieses ist genau nicht mehr wahr, wenn es kein Element $x \in M$ gibt, so dass $A(x)$ gilt. Anders formuliert heisst es, dass $A(x)$ gilt nie, so lange $x \in M$ ist. $A(x)$ gilt nicht genau dann, wenn ihre Negation gilt. Also $A(x)$ gilt nie, so lange $x \in M$ ist bedeutet, dass $\neg A(x)$ gilt, so lange $x \in M$ ist. Dementsprechend gilt $\neg A(x)$ für jede $x \in M$. Also haben wir

$$\forall x \in M \neg A(x).$$

2.7 Aufgabe

Übung 2.7.1. *Schreiben Sie folgende Aussage anders aber äquivalent.*

1. $\exists x \in M$ *sodass (kurz: s.d.) gilt* $A(x)$ *oder* $B(x)$ *oder beides.*

2. $\forall x \in M$ *es gelten* $A(x)$ *sowie* $B(x)$.

3. * $\forall x \in M$ *gilt entweder* A *oder* $B(x)$ *oder beides.*

4. * $\exists x \in M$ *sodass* A *sowie* $B(x)$ *gelten.*

5. * $\exists x$ *sodass* $A(x) \implies B$.

6. * $A \implies \forall x \in M$ *gilt* $B(x)$.

Übung 2.7.2. *Überlegen Sie folgende Aussage. Wann machen Sie keinen Sinn?*

1. $\forall x \in M\ A(x) \implies B \iff \exists x \in M$ *sodass* $A(x) \implies B$.

2. $A \implies \exists x \in M$ *sodass* $B(x)$ *gilt* $\iff \exists x \in M$ *sodass* $A \implies B(x)$.

Übung 2.7.3. *Formulieren Sie folgende Aussage mithilfe der logische Zeichnen.*

1. *Alle Ingolstadter sind Bayern.*

2. *Alle Bayern sind Deutsche.*

Bestimmen Sie, welche der obigen Aussagen stimmen und falls eine oder beide nicht stimmt, formulieren Sie die Negation.

Übung 2.7.4. *Zeigen Sie, dass folgende für die Verneinung gelten:*

- *Wenn eine Aussage A wahr ist, ist die Verneinung $\neg A$ falsch.*
- *Wenn eine Aussage A falsch ist, ist die Verneinung $\neg A$ wahr.*
- *Eine Aussage A kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.*
- *Die Aussagen A und $\neg A$ können nicht gleichzeitig wahr sein*

Übung 2.7.5. *Es seien M und N endliche Menge. Es hängt davon ab, ob $\#M > \#N$ oder umgekehrt ob es eine Abbildung $f : M \to N$ gibt, die surjektiv bzw. injektiv überhaupt existieren kann. Entscheiden Sie diese Fälle. In welchem Fall ist jede Abbildung surjektiv, genau dann , wenn sie injektiv ist?*

Kapitel 3

Zahlensysteme, Funktionen, und Boolesche-Algebra

Jetzt ist ein guter Zeitpunkt, die abstrakte logische Begriffe mit den schon bekannten Mathematik aus der Schule zu verbinden. Zuerst definieren wir einige wichtige Arten von Abbildungen auf Mengen und auch den Begriff einer Produkt-Menge.

Definition 3.0.1. *Es seien M und N Menge. Die Produkt-Menge von M und N ist die Menge alle Elemente der Form*

$$(m, n)$$

sodass $m \in M$ und $n \in N$. Diese Menge ist die Menge alle Päarchen sodass ein Element des Paars aus M kommt und ein Element aus N kommt und man schreibt sie als $M \times N$.

Beispiel: Was sind die Produkt-Menge $M \times N$ für folgende M und N?

$$M = \{0, 1, 3\}, \quad N = \{0, 4, 2\}$$

$$M = \emptyset, N = \mathbb{N}$$

$$M = \{100\}, \quad N = \{100\}$$

$$M = \{1, 3\}, \quad N = \{2, 4\}$$

Übung 3.0.2. *Es sei M eine Menge, die 5 Elemente enthält und N eine Menge, die 4 Elemente enthält. Wie viele Elemente hat $M \times N$?*

Definition 3.0.3. *Eine zweistellige Verknüpfung definiert auf einer nicht leere Menge M, die mindestens zwei Elemente enthält, ist eine Abbildung von $M \times M \to M$. Eine einstellige Verknüpfung ist eine Abbildung von $M \to M$.*

Die genaue Definition der natürlichen Zahlen ist folgende.

Definition 3.0.4. *Die erste natürliche Zahl ist 1. Für jede natürliche Zahl, gibt es eine folgende natürliche Zahl, die genau 1 grösser ist.*

Beispiel: Eine zweistellige Verknüpfung auf der natürlichen Zahlen ist Addition.

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Diese Verknüpfung ist auch eine zweistellige Verknüpfung auf der ganzen Zahlen. Wichtig ist, dass

$$\forall x \wedge y \in \mathbb{N} x + y \in \mathbb{N}.$$

Eine zweistellige Vernküpfung in der Logik ist $\wedge$. Diese Verknüpfung wird oft mit $\times$ vergleicht. Diese ist auch eine zweistellige Verknüpfung auf der natürlichen Zahlen.

$$\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (x, y) \mapsto xy.$$

Übung 3.0.5. *Ist diese Verknüpfung auch eine zweistellige Verknüpfung auf der ganzen Zahlen? Warum oder warum nicht?*

Definition 3.0.6. *Ein Element I aus einer Menge M mit einer zweistellige Verknüpfung $F : M \times M \to M$ heisst* neutrales Element *für die Verknüpfung falls es gilt*

$$F(x, I) = x \forall x \in M.$$

Sie kennen schon zwei Beispiele.

Übung 3.0.7. *Was ist das neutrale Element für die Verknüpfung $+$ auf der ganzen Zahlen? Was ist das neutrale Element für die Verknüpfung $\times$ auf der ganzen Zahlen?*

Überlegen Sie, welches Element $z \in \mathbb{Z}$ erfüllt

$$x + z = x \forall x \in \mathbb{Z}?$$

Welches Element $y \in \mathbb{Z}$ erfüllt

$$xy = x \forall x \in \mathbb{Z}?$$

Auch ein wichtiger Begriff ist das Inverses-Element.

Definition 3.0.8. *Es sei eine Menge M mit einer zweistellige Verknüpfung $F : M \times M \to M$ gegeben und neutrales Element I. Falls für $x \in M$ es ein $y \in M$ gibt, sodass gilt*

$$F(x, y) = I,$$

dann heisst y ein inverses Element von x.

Genau mit diesem Begriff werden die ganze Zahlen ausführlich mithilfe der zweistellige Verknüpfung $+$ definiert.

Definition 3.0.9. *Eine ganze Zahl ist entweder :*

1. *Eine natürliche Zahl ;*

2. *Das neutrale Element für Addition (d.h. 0);*

3. *Die additive Umkehrung (d.h. inverses Element für die zweistellige Verknüpfung $+$) einer natürlichen Zahl. Diese nennen wir negative Zahlen.*

Der Zahlenstrahl ist die beste Darstellung der reellen Zahlen. Wenn man eine negative Zahl addiert, ist das dasselbe wie wenn man dieselbe positive Zahl subtrahiert, und wir können uns vorstellen, dass irgendjemand den Zahlenstrahl nach links zieht. Wir können uns vorstellen, dass die additive Umkehrung einer Zahl genau das tut, was man braucht, um den Zahlenstrahl zurück zu bringen.

Wir können auch Zahlen multiplizieren, und das Ergebnis wird immer noch eine Zahl sein. Wenn wir zum Beispiel mit 2 multiplizieren, können wir uns vorstellen, dass den Zahlenstrahl ausgezogen wird, damit alles 2 mal so gross ist. Wenn wir mit -1 multiplizieren, können wir uns vorstellen, dass den Zahlenstrahl gespiegelt wurde. Wenn wir mit -2 multiplizieren, können wir uns vorstellen, dass wir erst den Zahlenstrahl ausziehen, und danach den Zahlenstrahl spiegeln.

Nach diesen Beispielen, definieren wir die Regeln für Multiplikation, Addition, und Subtraktion mit Zahlen.

1. Eine positive Zahl mal eine positive Zahl ist eine positive Zahl.

2. Eine positive Zahl mal eine negative Zahl ist eine negative Zahl.

3. Jede Zahl mal 0 ergibt 0.

4. Eine negative Zahl mal eine negative Zahl ist eine positive Zahl.

5. Eine positive Zahl m minus eine positive Zahl, n ist gleich m plus die additive Umkehrung von n.

6. Wenn man eine negative Zahl subtrahiert, ist das dasselbe wie die additive Umkehrung dieser Zahl zu addieren.

Wie können wir danach den Zahlenstrahl wieder zurück bringen, nach wir en mit einer Zahl multiplizieren? Um dies zu tun, brauchen wir inverses Element für Multiplikation.

Definition 3.0.10. *Das inverses Element einer natürlichen Zahl n für die zweistellige Verknüpfung $\times$ erfüllt:*

$$n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Dieses nennt man auch die multiplikative Umkehrung von n. Das inverses Element einer negativen Zahl $-n$ ist

$$-\frac{1}{n},$$

und gilt :

$$-n \times -\frac{1}{n} = 1.$$

Definition 3.0.11. *Es sei n eine ganze Zahl. Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ bedeutet : durch n teilen.*

Definition 3.0.12. *Eine rationale Zahl ist eine der folgenden :*

1. *Eine ganze Zahl;*
2. *Die multiplikative Umkehrung einer ganzen Zahl ;*
3. *Das Produkt einer ganzen Zahl und der multiplikativen Umkehrung einer ganzen Zahl.*

3.1 Bruchrechnungen und freundliche rationale Zahlen

Die rationale Zahlen der Arten 1 und 2 wurden bereits erklärt. Wie sehen die der Art 3 aus? Zum Beispiel nehmen wir die Zahl 5 und multiplizieren wir diese mit der multiplikativen Umkehrung von 6. Dann schreiben wir :

$$5 \times \frac{1}{6}.$$

Was passiert mit dem Zahlenstrahl? Der wird entweder erst ausgezogen, damit alles 5 mal so gross ist, und danach wieder zusammengezogen, damit alles durch 6 geteilt ist. Oder wir können das umgekehrt tun, das Ergebnis ist dasselbe :

$$5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 5.$$

Wie schreiben wir das Ergebnis? Wir schreiben

$$5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Allgemeiner für zwei natürliche Zahlen, n und m, ist

$$n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m},$$

und diese bedeutet genau : n mal so gross ausziehen und durch m teilen. Allgemeiner gilt folgendes.

Definition 3.1.1. *Für jede rationale Zahl die ungleich 0 ist, gibt es eine natürliche Zahl n und eine Zahl m sodass die rationale Zahl gleich*

$$\frac{m}{n}$$

ist. Wir nennen m Zähler und n Nenner.

Was ist die multiplikative Umkehrung von einer beliebigen rationalen Zahl? Nehmen wir das Beispiel

$$\frac{5}{6}.$$

Was passiert mit dem Zahlenstrahl wenn wir mit $\frac{5}{6}$ multiplizieren? Er wird erst 5 mal so weit ausgezogen und danach durch 6 geteilt.

Wie können wir das Ganze zurückbringen? Erst ziehen wir den Zahlenstrahl wieder 6 mal so weit, und danach teilen wir durch 5.

Das heisst : wir multiplizieren mit 6 und teilen durch 5. Dementsprechend ist die multiplikative Umkehrung von $\frac{5}{6}$ gleich $\frac{6}{5}$ und gilt

$$\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} = 1.$$

Allgemeiner haben wir folgende Definition.

Definition 3.1.2. *Es sei eine rationale Zahl*

$$\frac{p}{q},$$

wobei p eine ganze Zahl ist, und q eine natürliche Zahl ist. Falls $p \neq 0$, dann ist die multiplikative Umkehrung von $\frac{p}{q}$ gleich

$$\frac{q}{p}.$$

Jetzt können wir durch rationale Zahlen teilen.

Definition 3.1.3. *Es sei x eine rationale Zahl. Falls $x \neq 0$, teilen durch x ist gleich multiplizieren mit der multiplikative Umkehrung von x. Wir nennen auch teilen durch x dividieren durch x.*

Sie haben vielleicht bemerkt, dass das teilen durch 0 nicht definiert ist. Wir haben ja in der Definition angenommen, dass $x \neq 0$. Warum?

Das neutrale Element für Addition hat keine multiplikative Umkehrung.

Wir wissen, dass 0 mal jede Zahl 0 ergibt. Das heisst, dass es keine Zahl gibt, mit der 0 mal diese Zahl 1 ergibt. Dementsprechend, hat 0 keine multiplikative Umkehrung.

Lassen Sie uns diese Definition anwenden.

Definition 3.1.4. *Es seien m, n natürliche Zahlen und p, q Zahlen. Dann gilt :*

$$\frac{p}{m} \times \frac{q}{n} = \frac{pq}{mn},$$

und

$$\frac{p}{m} \div \frac{q}{n} = \frac{p}{m} \times \frac{n}{q} = \frac{pn}{mq}$$

und

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{q} = \frac{m+n}{q}.$$

Wir können nur rationale Zahlen mit demselben Nenner addieren oder subtrahieren.

Wie können wir beliebige rationale Zahlen addieren? Um beliebige rationale Zahlen zu addieren, brauchen wir Hilfe von dem neutralen Element für Multiplikation. Das neutrale Element für Multiplikation kann man als spielerische Zahl sehen, die sich gern verkleidet. Für $x \neq 0$, gilt

$$\frac{x}{x} = x \times \frac{1}{x} = 1.$$

Ein Beispiel ist : was ist

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{7} = ?$$

Die Regel ist :

Wir können nur rationale Zahlen mit demselben Nenner addieren.

Diese rationalen Zahlen haben jedoch nicht denselben Nenner. Was können wir dann machen? Mit eins multiplizieren! Für jede natürliche Zahl x und y gilt :

$$\frac{5}{6} = 1 \times \frac{5}{6} = \frac{x}{x} \times \frac{5}{6} = \frac{x \times 5}{x \times 6}$$

und gilt

$$\frac{2}{7} = 1 \times \frac{2}{7} = \frac{y}{y} \times \frac{2}{7} = \frac{y \times 2}{y \times 7}.$$

Um beide Nenner gleich zu machen brauchen wir also natürliche Zahlen x und y sodass

$$x \times 6 = y \times 7.$$

Dann setzen wir

$$x = 7, \quad y = 6.$$

Dementsprechend machen wir

$$\frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{7 \times 6}, \quad \frac{2}{7} = \frac{6 \times 2}{6 \times 7}.$$

Dann betrachten wir

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{7} = \frac{35}{42} + \frac{12}{42} = \frac{47}{42}.$$

Jetzt können wir beliebige rationale Zahlen addieren und Subtrahieren funktioniert auch.

Definition 3.1.5. *Es seien m und p ganze Zahlen und n und q natürliche Zahlen. Dann gilt :*

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm}{qn} + \frac{np}{nq} = \frac{qm + np}{nq},$$
$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{qm}{qn} - \frac{np}{nq} = \frac{qm - np}{nq}.$$

Übung 3.1.6. *1. Was ist* $5 \times \frac{2}{5}$*?*

2. Was ist $5 \div \frac{2}{5}$*?*

3. Was ist $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$*?*

4. Was ist $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$*?*

5. Was ist $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$*?*

Es gibt noch Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl sind aber nicht rational sind. Diese nennt man die reelle Zahlen,[1] aber Sie müssen sich keine Sorgen machen. Die rationale Zahlen sind wie gute Freunde : Sie sind immer für Sie da! Die reelen Zahlen sind alle Punkte auf dem Zahlenstrahl. Der folgende Satz bedeutet, dass Sie alles mit reelen Zahlen tun können, genau wie mit rationalen Zahlen.

Satz 3.1.7. *Es sei x und y reelle Zahlen, mit $x < y$. Dann gibt es eine rationale Zahl z sodass gilt :*

$$x < z < y.$$

Da Sie kein Mathematiker oder Mathematikerin sind, ist der Beweis dieses Satzes nicht so wichtig. Wichtig ist die Bedeutung :

Zwischen jeden zwei reellen Zahlen gibt es eine rationale Zahl.

Egal wie nah die zwei Zahlen auf der Zahlenstrahl sind, es gibt immer eine rationale Zahl dazwischen. Das heisst, dass Sie alles mit reellen Zahlen tun können, genau wie mit rationalen Zahlen. Man sagt:

Die rationale Zahlen liegen dicht in der reellen Zahlen. Dicht wie gute Freunde.

3.2 Die reelle Zahlen

Die ganz genaue Definition der reelle Zahlen kommt aus Mengentheorie.

Definition 3.2.1. *Es sei M eine Teilmenge der rationale Zahlen. Dann heisst M von oben beschränkt, falls es eine rationale Zahl O gibt, sodass jedes Element M kleiner gleich O ist. Die Menge M heisst von unten beschränkt, falls es eine rationale Zahl U gibt, sodass jedes Element grösser gleich U ist. Die Menge heisst beschränkt, falls sie von oben und von unten beschränkt ist.*

Übung 3.2.2. *1. Überlegen Sie, dass jede Menge der rationalen Zahlen, die endlich viele Elemente hat, von oben sowie von unten beschränkt ist.*

2. Ist die Menge der natürlichen Zahlen von oben beschränkt? Ist sie von unten beschränkt?

[1] Es gibt auch die komplexe Zahlen. Die sind nicht mehr in der Zahlenstrahl!

3. *Ist die Menge der ganzen Zahlen von oben bzw. unten beschränkt?*

Definition 3.2.3. *Eine kleinste obere Schranke (KOS) einer nicht leeren Menge ist eine obere Schranke, die kleiner gleich jede andere obere Schranke ist. Eine grösste untere Schranke (GUS) einer nicht leeren Menge ist eine untere Schranke, die grösser gleich jede andere obere Schranke ist.*

Es gibt Menge aus der rationalen Zahlen, die von oben (bzw. unten) beschränkt sind aber keine KOS (bzw. GUS) haben. Diese fehlende Schranke sind die Löcher, die mit reellen Zahlen gefüllt sind.

Um oben und unten bzw. Elemente einer Menge vergleichen zu können benötigt man Ordnung.

Definition 3.2.4. *Eine Totalordnung einer nicht leere Menge M ordnet jedes Paar Elemente aus M, x und y eine Ordnung, d.h. entweder x ist grösser als y oder kleiner oder sie sind gleich.*

1. *(Reflexivität) x ist kleiner gleich x. x ist auch grösser gleich x.*

2. *(Antisymmetrie) Falls x kleiner gleich y ist und auch y kleiner gleich x ist, dann sind x und y gleich.*

3. *(Transitivität) Falls x grösser oder gleich z ist und z grösser oder gleich y ist, dann ist x grösser oder gleich y.*

Eine nicht leere Menge mit einer Totalordnung heisst total geordnet.

Definition 3.2.5. *Die reelle Zahlen ist die kleinste total geordnete Menge die die rationale Zahlen enthält, sodass jede nicht leere Menge die von oben (bzw. unten) beschränkt ist ein KOS (bzw. GUS) in der reellen Zahlen hat. Wir bezeichnen dieser Menge mit $\mathbb{R}$.*

Übung 3.2.6. ** Zeigen Sie, dass folgende Menge aus $\mathbb{Q}$ von oben beschränkt ist aber keine KOS in $\mathbb{Q}$ hat.*

$$\{x \in \mathbb{Q} \text{ sodass } x^2 < 2\}$$

Es gilt also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Es kommt aber noch weitere wichtige Zahlen, nämlich die komplexe Zahlen. Es gibt zwei Grunde für Sie warum wir komplexe Zahlen haben wollen: Sie werden komplexe Zahlen für die Geometrie verwenden sowie für die Algebra.

Es gibt noch zwei wichtige Begriffe : Supremum sowie Infimum.

Definition 3.2.7. *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, die von oben beschränkt ist. Dann gibt es eine KOS von M in $\mathbb{R}$ und diese würde das Supremum von M benannt. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, die von unten beschränkt ist, dann gibt es eine GUS von M in $\mathbb{R}$ und diese würde das Infimum von M genannt. Falls M nicht von oben beschränkt ist, dann ist das Supremum von M definiert als ∞. Falls M nicht von unten beschränkt ist, dann ist das Infimum von M definiert als $-\infty$. Man kann ebenfalls diese als Definition ∞ sowie $-\infty$ nehmen.*

Übung 3.2.8. *Falls M eine endlichen Supremum (bzw. Infimum) besitzt, sind dieses immer Element(e) M? Beweisen Sie oder geben Sie einen Gegenbeispiel.*

Diese Übung zeigt das Unterschied zwischen Supremum bzw. Infimum und Maximum bzw. Minimum. Falls eine Menge das Supremum bzw. Infimum auch besitzt, heisst dieses auch Maximum bzw. Minimum. Falls die Menge aber das Supremum bzw. Infimum nicht besitzt, dann hat die Menge kein Maximum bzw. Minimum. Dieses Unterschied sollte man merken.

Definition 3.2.9. *Falls eine nicht leere Teilmenge der reellen Zahlen ein grösstes Element besitzt, ist dieses Element das Maximum und dieses ist gleich das Supremum dieser Teilmenge. Falls die Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, ist dieses Element das Minimum und dieses ist gleich das Infimum dieser Teilmenge.*

Dieser Definition ist eher wie eine Proposition, da man mithilfe der Definitionen beweisen kann. Wenn eine Menge ein Maximum bzw. Minimum besitzt, dann muss jede andere OS $\geq$ bzw. US $\leq$ dieses Element, um ein OS bzw. US zu sein. Dementsprechend ist das Element das Supremum bzw. Infimum. Es gilt also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Es kommt aber noch weitere wichtige Zahlen, nämlich die komplexe Zahlen. Es gibt zwei Grunde für Sie warum wir komplexe Zahlen haben wollen: Sie werden komplexe Zahlen für die Geometrie verwenden sowie für die Algebra.

3.3 Funktionen und Verknüpfungen

In der Logik gibt es eine Reihenfolge der Operationen. Als Warm-Up wiederholen wir die Reihenfolge der Operationen für die reelle Zahlen.

Hier ist ein Beispiel :

$$5 \times 2^{1+2} - 12 \div (3 \times 4) =?$$

Es gibt viel zu tun, also was macht man zuerst? Die Reihenfolge der Rechnenoperationen ist :

1. Klammern
2. Potenz
3. Multiplikation
4. Division
5. Addition
6. Subtrahieren

Um die Reihenfolge zu erinnern, erfinden wir einen Satz zusammen oder finden Sie ihren eigenen. Mein Freund hat folgenden Satz erfunden : Können Personen mit Demenz Asbach schlürfen?

Nach der Reihenfolge sollen wir bei $5 + 3 \times 2^{3+4} - 12 \div (3 \times 4)$ erst den Klammern betrachten :

$$3 \times 4 = 12.$$

Dann schreiben wir

$$5 + 3 \times 2^{1+2} - 12 \div 12.$$

Danach sollen wir die Potenz betrachten :

$$1 + 2 = 3,$$

also ist

$$2^{1+2} = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Dann schreiben wir

$$5 + 3 \times 8 - 12 \div 12.$$

Das nächste ist Multiplikation :

$$3 \times 8 = 24,$$

also schreiben wir

$$5 + 24 - 12 \div 12.$$

Nach Multiplikation kommt Demenz, ich meine Division :

$$12 \div 12 = 1.$$

Also schreiben wir

$$5 + 24 - 1.$$

Das nächste ist das Asbach, ich meine Addition :

$$5 + 24 = 29,$$

also schreiben wir

$$29 - 1.$$

Und das letzte ist das schlürfen, ich meine Subtraktion :

$$29 - 1 = 28.$$

Also die Antwort ist 28.

Noch einige wichtige Regeln sind die Potenz Regeln.

Definition 3.3.1 (Potenz Regeln). *1. Es seien n und m natürliche Zahlen. Dann n^m bedeutet $n \times n \times \ldots n,$ wobei n ist mit sich selbst m mal multipliziert.*

2. *n^{-m} bedeutet :*

$$\frac{1}{n^m}.$$

3. *$n^1 = n$.*

4. *$n^0 = 1$.*

5. *Man nennt n die Basis und m die Potenz.*

Nach diesen Regeln, kann man folgendes beweisen : Es seien n, m, und k natürliche Zahlen. Dann gilt :

1. $(n^m)^k = n^{mk}$.

2. $n^{m+k} = n^m n^k$.

3. $n^{m-k} = \frac{n^m}{n^k}$.

Noch eine wichtige Regel ist, wie man Klammern multipliziert. Machen wir ein Beispiel :

$$(1+2)(1+2).$$

Nach der “Können Personen mit Demenz Asbach schlürfen?Regel, sollen wir zuerst

$$1+2=3$$

betrachten. Dann haben wir

$$(1+2)(1+2) = 3 \times 3 = 9.$$

Der folgende Fehler ist oft gemacht:

$$(a+b)(a+b) \quad -" \quad a^2+b^2.$$

Wenn wir mit $a = 1$ und $b = 2$ betrachten haben wir

$$(1+2)(1+2) \quad -" \quad 1^2+2^2 = 5.$$

Das stimmt nicht! Sie haben gesehen, dass

$$(1+2)(1+2) = 9,$$

und 9 ist vier mehr als 5.

Wenn Sie mit Zahlen arbeiten, werden Sie möglicherweise diesen Fehler nicht machen. Aber wenn Sie mit Variabeln arbeiten, ist der Fehler leicht zu machen. Dementsprechend, haben wir noch einen Merksatz :

1. Zuerst

2. Aussen

3. Innen

4. Letzte

Zum Beispiel :

$$(a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Lassen wir diese mit dem Beispiel $a = 1$, $b = 2$ übereinstimmen :

$$(1+2)(1+2) = 1^2 + 2 \times 1 \times 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9.$$

Ja!

Der Merksatz läutet :

Zu allem immer lieb. ♡♡♡♡

3.4 Gleichungen : Das ganze Ruckwärts

Es sei x eine rationale Zahl sodass gilt :

$$3 \times x - 4 = 5.$$

Was ist x? Merken Sie, dass $\times$ und x etwas ähnlich aussehen? Aus diesem Grund, können wir $*$ statt $\times$ benutzen, um Multiplikation zu bezeichnen. Wir können auch Klammern anwenden, und wir können auch manchmal alles weglassen. Dann habe die folgende dieselbe Bedeutung :

$$3 \times x, \quad 3 * x, \quad (3)(x), \quad 3x.$$

Unser Ziel um die Gleichung $3x - 4 = 5$ zu lösen, ist irgendwas mathematisches zu machen, damit x allein steht und wir haben

$$x = ...$$

Auf der linken Seite haben wir $3x + 4$. Wir wollen also die 3 und die 4 weg haben! Gilt immer

$$4 - 4 = 0.$$

Die Umkehrung von -4 ist $+4$. Also um ein -4 weg zu schaffen, addiert man 4. Wir haben auch auf der linken Seite 3 mal x. Die Umkehrung von mal 3 ist durch 3 teilen, da

$$3 \div 3 = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Was sollen wir zuerst machen? Wem sollen wir zuerst weg schaffen? Sie können sich vorstellen, dass x in der Gleichung gefangen ist. Um zu wissen, wie Sie x befreien können, lassen Sie uns überlegen, was würde x passieren und in welcher Reihenfolge?

Wir kennen die Reihenfolge : KPMDAS. Das heisst dass zuerst x mit 3 multipliziert wird und danach wird 4 subtrahiert. Wir brauchen die Umkehrung, und das heisst wir machen KPMDAS ruckwärts um die Gleichung zu lösen.

Wir müssen 4 addieren und durch 3 teilen, um x zu befreien. Ruckwärts kommt A vor M in KPMDAS. Das heisst, zuerst sollten wir 4 addieren.

> Damit die Gleichung eine Gleichung bleibt müssen wir immer dasselbe auf beiden Seiten tun.

Dementsprechend addieren wir 4 auf beider Seiten.

$$3x - 4 + 4 = 5 + 4.$$

Die linke Seite ist also :

$$3x,$$

und die rechte Seite ist

$$5 + 4 = 9.$$

Dementsprechend haben wir

$$3x = 9.$$

Super. Jetzt müssen wir nur diese drei wegschaffen. Wir wissen schon : durch 3 teilen :

$$3x \div 3 = 9 \div 3.$$

Durch die Regeln wissen wir

$$3x \div 3 = 3x \times \frac{1}{3} = \frac{3x * 1}{3} = x, \quad 9 \div 3 = 3.$$

Dementsprechend haben wir x befreit und sehen wir dass

$$x = 3.$$

So eine Gleichung nennt man eine lineare Gleichung. Ein sehr wichtiges Prinzip in der Mathematik ist :

> Linear ist der beste Fall.

Linear ist immer einfacher als nicht linear. Hier ist noch ein Beispiel wie man eine Gleichung zu lösen hat :

$$5 \times 2^{1+x} - 12 \div (3 \times 4) = 29.$$

Diese Gleichung ist etwas kompliziert. Zuerst lassen wir die Gleichung so vereinfachen :

$$5 \times 2^{1+x} - 12 \div 12 = 29,$$

$$5 \times 2^{1+x} - 1 = 29.$$

Wir wissen, dass wir zuerst subtrahieren und danach addieren. Wir können also diese -1 wegschaffen wenn wir $+1$ auf beiden Seiten machen :

$$5 \times 2^{1+x} - 1 + 1 = 29 + 1,$$

dann haben wir

$$5 \times 2^{1+x} = 30.$$

Danach kommt dividieren und danach multiplizieren. Um die Multiplikation mit 5 wegzuschaffen, können wir durch 5 auf beiden Seiten teilen :

$$5 \times 2^{1+x} \div 5 = 30 \div 5,$$

dann haben wir

$$2^{x+1} = 6.$$

Jetzt haben wir eine Potenz.

Wie können wir eine Potenz umkehren?

Um diese zu tun definieren wir den Logarithmus. Die Basis ist 2.

Definition 3.4.1. *Es sei n und m zwei positive reele Zahl. Dann gibt es eine eindeutig reele Zahl y sodass*

$$n^y = m.$$

Wir nennen diese y das Logarithmus von m bezüglich der Basis n, und wir schreiben die

$$y = \log_n(m).$$

Lassen Sie uns die Definition anwenden. Wir haben

$$2^{x+1}.$$

Die Basis ist 2. Das heisst dass in der Definition des Logarithmus 2 die Rolle von n spielt. Jetzt überlegen Sie wer m ist. Wir haben die Gleichung

$$2^{x+1} = 6.$$

Dann gilt für

$$m = 6,$$

$$x + 1 = \log_2(6).$$

Wir haben die Potenz befreit! Der letzte Schritt ist diese $+1$ weg zu schaffen. Um dies zu tun, subtrahieren wir 1 von beiden Seiten :

$$x + 1 - 1 = \log_2(6) - 1,$$

und endlich haben wir

$$x = \log_2(6) - 1.$$

3.5 Funktionen und Verknüpfungen

Sie werden bald sehen, dass Ihre Lieblingsfunktionen die linearen Funktionen sind. Warum? Weil sie die einfachsten Funktionen sind.

Definition 3.5.1. *Eine lineare Funktion nimmt eine Eingabe x, multiplizert x mit irgendeiner festen Zahl m, und danach wird das Ergebnis mit irgendeiner festen Zahl b addiert. Die Ausgabe ist also :*

$$mx + b.$$

Falls Frank, die Funktion, eine lineare Funktion ist, dann gibt es Zahlen m und b sodass für jede x gilt :

$$f(x) = mx + b.$$

Definition 3.5.2. *Es seien f und g Funktionen. Die Komposition $f \circ g$ (auch die Verknüpfung von f mit g) ist auch eine Funktion, und wir schreiben*

$$f(g(x))$$

um zu bezeichnen, dass die Ausgabe von der Funktion f für die Eingabe $g(x)$.

Die Komposition bedeutet : erst nimmt g die Eingabe vor und ergibt seine Ausgabe $g(x)$, dann nimmt f diese als Eingabe und ergibt $f(g(x))$. Sie können mit einer Analogie denken, dass die Komposition funktioniert als ob die zwei Funktionen in Team arbeiten. Erst macht Georg seine Arbeit, zum Beispiel, erst würzt Georg das Fleisch, und danach wendet Frank das gewürzte Fleisch an, um das Würstchen zu machen.

Manchmal haben Studenten Probleme um sich zu erinnern welche Funktion in der Komposition $f \circ g$ passiert. Wenn Sie das lesen würden, würden Sie zuerst f lesen. Aber Sie sollen mathematisch denken. Schreiben wir also eine Eingabe x,

$$f(g(x)).$$

Stellen Sie sich vor, dass Sie die Eingabe x sind. Welche Funktion ist am nächsten zu Ihnen? Die Funktion g nicht wahr? Dementsprechend passiert Ihnen, dass die Eingabe x zuerst g vornimmt und danach f kommt. So können Sie sich erinnern welche Funktion in der Komposition zuerst kommt.

Die Komposition wird auch Verknüpfung genannt. Dies ist kein Zufall.

Proposition 3.5.3. *Es sei M eine Menge und*

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to M\},$$

die Menge alle Abbildungen (Funktionen) von M nach M. Dann ist $\circ$ eine zweistellige Verknüpfung auf $\mathcal{F}(M)$, definiert durch

$$\circ : (f, g) \mapsto f \circ g.$$

Falls zwei Funktionen jeweils auf M definiert sind und M auf (oder in, muss nicht surjektiv sein) M abbilden, dann können wir die Verknüpfung definieren. Diese wird wieder eine Funktion von M nach M, also $\circ : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ erfüllt die Definition einer zweistelligen Verknüpfung.

Wenn man eine Gleichung lösen will, muss man Umkehren können. Dafür gibt es Umkehrfunktionen.

Definition 3.5.4. *Es sei f eine Funktion. Wenn es eine Funktion g gibt sodass*

$$g(f(x)) = x$$

sowie

$$f(g(x)) = x$$

gilt für jede x, dann ist g die Umkehrfunktion von f und ist f die Umkehrfunktion von g.

Die Bedeutung ist : Die Umkehrfunktion kehrt die Ausgabe wieder zu der Eingabe um.

Definition 3.5.5. *Es sei M eine Menge und*

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to M\},$$

die Menge alle Abbildungen (Funktionen) von M nach M. Dann das neutrale Element der Komposition $\circ$ ist die Identitätsfunktion, I, die erfüllt

$$I(x) = x \forall x \in M.$$

Für eine $f \in \mathcal{F}(M)$, falls es eine $g \in \mathcal{F}(M)$ gibt, sodass gilt

$$g \circ f(x) = I(x) = x \forall x \in M,$$

dann heisst g eine Umkehrfunktion von f.

Eine Umkehrfunktion tut genau das Gegenteil der Funktion f. Hier sind einige Beispiele.

1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x$. Die Umkehrfunktion ist $g(x) = \frac{x}{2}$, da es gilt

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} = \frac{2x}{2} = x = I(x).$$

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - 1$. Die Umkehrfunktion ist $g(x) = x + 1$, da es gilt

$$g(f(x)) = f(x) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

3. Allgemein, um zu schauen, ob es eine Umkehrfunktion für eine Funktion f gibt kann man zuerst

$$y = f(x)$$

schreiben und danach versuchen, dieses für x bzgl. y zu lösen. Danach hat man eine Formel für x bzgl. y. Dieses ist die Funktion g geschrieben als von y abhängig, d.h. $g(y)$.

Verwenden wir jetzt diese allgemeine Methode. Es sei $f(x) = 2x + 3$. Setzen wir

$$y = 2x + 3.$$

Lösen wir für y

$$y - 3 = 2x \iff \frac{y-3}{2} = x.$$

Also die Funktion $g(y) = \frac{y-3}{2}$.

Hier sind noch einige Beispiele :

1. Ziemliche langweilige Funktionen sind die konstanten Funktionen. Für eine reelle Zahl z ergibt die konstante Funktion z zu jeder Eingabe dieselbe Ausgabe : z. Zum Beispiel die konstante Funktion 5. Sie geben diese Funktion eine Eingabe, und die Ausgabe ist immer einfach 5. Diese Funktionen sind wichtig aber etwas langweilig. Für eine konstante Funktion, gibt es eine Umkehrfunktion?

2. Exponentielle Funktionen: Es sei b eine reelle Zahl. Dann ist für eine reelle Zahl x

$$b^x$$

eine exponentielle Funktion mit der Basis b. Es gibt eine sehr besondere reelle Zahl die e heißt, und die Funktion

$$e^x$$

ist extrem wichtig in der Naturwissenschaften.

3. Die Logarithmusfunktion, die

$$\log_b(x)$$

geschrieben wird, wobei b die Basis ist und gilt $b > 0$. Für eine $x > 0$ ist

$$\log_b(x)$$

die eindeutige Zahl sodass gilt :

$$b^{\log_b(x)} = x.$$

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentiellenfunktion.

4. Die Trigonometrischen Funktionen,

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x).$$

Diese Funktionen haben Sie möglicherweise durch Dreiecke gelernt, aber sie haben mehr mit der Natur zu tun als mit einfachen Dreiecken! Die Sinus und Cosinus Funktionen sind der Schlüssel wenn Sie Wellen, Klang, und Licht verstehen wollen. Die Umkehrfunktionen sind entweder $\sin^{-1}$ oder arcsin bezeichnet (für die Umkehrfunktion von sin), und analog für die weitere Trig-Funktionen.

3.6 Bezug auf der Logik

In der Logik gibt es ebenfalls eine Reihenfolge Operationen:

1. Klammern
2. Negation $\neg$
3. Und $\wedge$ (vgl. $\times$)
4. Oder $\vee$ (vgl. $+$)

Man kann alles eindeutig schreiben, wenn man genug Klammern verwendet. Also im Falle Verzweiflung, verwenden Sie einfach viele Klammern. Hier sind einige Beispiele.

1. $\neg A \vee B$ ist nicht das gleiche, wie $\neg(A \vee B)$. Eindeutiger ist $(\neg A) \vee B$. Wir können

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

auch schreiben und dann sieht man deutliche das Unterschied. Wenn wir $\vee$ mit Addition vergleichen, $\wedge$ mit Multiplikation vergleichen, $\neg$ mit $-$ vergleichen und mit Zahlen denken, dann sind die zwei verschiedene

$$-a + b \neq -(a + b) = (-a) + (-b).$$

2. $A \wedge B \vee \neg C \vee D$ bedeutet nicht $A \wedge B \vee \neg(C \vee D)$. Eindeutiger ist einerseits

$$((A \wedge B) \vee (\neg C)) \vee D,$$

und anderseits

$$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg D).$$

Vergleich mit Zahlen:

$$a \times b + -c + d = ab - c + d,$$
$$a \times b + -(c + d) = ab - c - d.$$

3.7 Aufgaben

1. Machen Sie Ihre eigenen Merksätze um sich an die Reihenfolge der Rechnenoperationen und Klammern ausmultiplizieren erinnern zu können.
2. Was ist

$$3 \times 4^{5-3} \div 9 + \log_2(8) \div \frac{2}{3}^{3-2}?$$

3. Lösen Sie die Gleichung :

$$3x - 42 = 5.$$

4. Lösen Sie die Gleichung :
$$3x^2 - 42 = 5x^2.$$

5. Was ist die Umkehrfunktion der Funktion
$$f(x) = 2x + 3?$$

6. Schreiben Sie folgende mit mehr Klammern damit die Reihenfolge Operationen eindeutiger aussieht
$$\neg(A \wedge B \vee C)$$
$$A \vee \neg B \wedge C$$
$$A \vee \neg(B \wedge C)$$

7. Vergleichen Sie die obigen Beispiele mit Zahlen Operationen mit $\neg$ als $-$ (d.h. Multiplikation mit -1), $\wedge$ als $\times$ und $\vee$ als $+$.

8. * Sie sind Direktor eines Zoos. Viele Tiere haben Gurken in Ihrer Diät, und Sie haben gesehen, dass bei einem Bauer Gurken im Angebot sind. Dementsprechend kaufen Sie 100 Kilo Gurken. Jede Gurke besteht zu 99% aus Wasser. Nach einigen Tage sind die Gurken etwas ausgetrocknet, sodass jede zu 98% aus Wasser besteht. Wie viel wiegen die Gurken jetzt?

3.8 Boolesche-Algebra

Alles kostet Geld. Wenn Sie für sich selbst oder für eine Firma oder Klient Geld sparen können, ist dieses für Sie ein Vorteil. Als Designer oder Informatiker müssen Sie Interface-Systeme darstellen und Programms schreiben. Je effizienter sie geschrieben werden, desto billiger werden sie kosten. Billig in diesem Sinn heisst, wie viele Schritte der Rechner/Computer machen muss. Sie benötigen Boolesche-Algebra um die Schritte Ihre Programms (1) zählen zu können und (2) zu reduzieren wenn möglich.

Noch eine Definition die ich sehr gern habe und vielleicht Sie auch ...

Definition 3.8.1. *Ein Axiom ist eine Regel die man einfach fest legt, dass sie immer gilt. Ein Axiom wird oft auch Gesetz genannt. Ein Axiomssystem ist eine Menge Axiome.*

Genau wie im Bundesland Deutschland, das Gesetze hat, die von Politiker entschieden worden sind und einfach fest gelegt, dass sie gelten, in der Mathematischen sowie Programmier-Welt gibt es Gesetze, die einfach von Leuten entschieden worden sind, die immer gelten müssen.

Beispiele: Kennen Sie html? Wenn Sie eine Kommando schreiben, muss es in diese $\langle$ sowie $\rangle$ Klammern sein, sonst funktioniert es nicht. Kennen Sie C oder C++? Es ist für mich eine Weile her, aber ich glaube, dass ein C/C++ Gesetz ist, dass jeder Satz mit ; endet. Bei C++ noch ein Gesetz ist, dass wenn Sie ++ am Ende eines Satzes schreiben, wird 1 addiert.

Wir können also die Regeln entscheiden wenn wir ein Axiomssystem wählen.

Definition 3.8.2. *Eine Boolesche-Algebra hat sechs Zutaten.*

1. *Eine Menge*
2. *Zwei binarische Operatoren (zweistelligen Verknüpfungen), die wir ,,und" und ,,oder" nennen und als* $\wedge$ *bzw.* $\vee$ *schreiben. Eine zweistellige Verknüpfung ist eine Abbildung die zwei Elemente der Menge nimmt und eine Elemente der Menge ergibt.*
3. *Eine einstellige Verknüpfung, die wir ,,nicht" nennen und* $\neg$ *schreiben.*
4. *Zwei Elemente der Menge die man als Nullelemente 0 und Einselelement 1 nennt.*

Ferner müssen folgende Axiome gelten.

1. *Kommutativgesetze* $a \wedge b = b \wedge a$ *sowie* $a \vee b = b \vee a$
2. *Assoziativgesetze* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ *sowie* $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. *Idempotenzgesetze* $a \wedge a = a$ *sowie* $a \vee a = a$
4. *Distributivgesetze* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
5. *Neutralitätsgesetze* $a \wedge 1 = a$ *sowie* $a \vee 0 = a$
6. *Extremalgesetze* $a \wedge 0 = 0$ *sowie* $a \vee 1 = 1$
7. *Doppelnegationsgesetz (Involution)* $\neg(\neg a) = a$
8. *De Morgansche Gesetze* $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
9. *Komplementärgesetze* $a \wedge \neg a = 0$ *sowie* $a \vee \neg a = 1$
10. *Dualitätsgesetze* $\neg 0 = 1$ *sowie* $\neg 1 = 0$
11. *Absorptionsgesetze* $a \vee (a \wedge b) = a$ *sowie* $a \wedge (a \vee b) = a$.

Es sieht vielleicht total abstrakt aus aber ist sie nicht. Das wichtigste Boolesche Algebra für Sie ist ganz einfach. Sie ist die binarische Boolesche Algebra. Was sind die sechs Zutaten?

Definition 3.8.3. *Die binarische Boolesche Algebra hat als Menge*

$$\{0, 1\}.$$

Die Verknüpfungen sind folgendermasse definiert

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0$$

$$1 \wedge 1 = 1, \quad 1 \wedge 0 = 0$$

$$0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1,$$

$$1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1.$$

$$\neg 1 = 0, \quad \neg 0 = 1.$$

Eigentlich ist der abstrakte Begriff Boolesche Algebra nur für den einen Fall wichtig : 0 bedeutet falsch und 1 bedeutet wahr. Die Bedeutung $\wedge$ ist ,,und" wobei die Bedeutung $\vee$ ist ,,oder." Die Bedeutung $\neg$ ist ,,nicht." Also überlegen Sie, was $0 \wedge 0$ bedeutet. Wenn Sie zwei Falschheiten haben dann sind beide zusammen ebenso eine Falschheit. Dementsprechend ist $0 \wedge 0 = 0$. Wenn Sie eine Falschheit und eine Wahrheit haben, ist es insgesamt noch eine Falschheit also ist $0 \wedge 1 = 0$. Ebenso ist $1 \wedge 0 = 0$. Nur wenn Sie zwei Wahrheiten haben sind beide zusammen wieder eine Wahrheit also ist $1 \wedge 1 = 1$.

Alle Computers und Programms sind auf dieser Algebra gebaut! Jedes ,,und" (auch als Konjunktion bekannt) bedeutet ein Schritt, der Geld kostet. Ebenso kostet jedes ,,oder" (auch als Disjunktion bekannt) Geld und Negation $\neg$ kostet ebenso Geld. Das Ziel bei erfolgreiches Programmieren ist, so wenig Schritte wie möglich zu verwenden. Wenn Sie also logische Aussage abkürzen können, dann sparen Sie Geld. Dementsprechend ist es wichtig (1) zu verstehen, wie man logische Aussage mit Quantorenlogik ausdrückt und (2) wie man logische Aussage ablest und verstehen, was sie bedeuten damit man (3) solche Aussage mit wenig möglichst Boolesch-Algebraische Schritte darstellt.

3.8.1 Die Menge der logischen Aussagen

Es sei M die Menge aller logischen Aussagen, d.h. alle Aussage, die ganz deutlich entweder wahr oder falsch sind. Dann sind $\vee$ und $\wedge$ zweistellige Verknüpfungen auf M und $\neg$ ist eine einstillige Verknüpfung auf M, d.h.

$$\vee : M \times M \to M, \quad \wedge : M \times M \to M, \quad \neg : M \to M.$$

Wenn wir jede Aussage den Wahrheitswert 0 (falsch) oder 1 geben, dann den Wahrheitswert ist durch die Regeln der binarische Boolesche Algebra gegeben. D.h. die Regeln, mit den den Wahrheitswerte Aussagen sich ändert wenn man Aussagen mit $\vee$ oder $\wedge$ oder $\neg$ verknüpft, sind genau die Regeln, der Definition Boolesche Algebra. Wenn Sie verstehen, wie die Wahrheitswert unter $\vee$, $\wedge$, $\neg$ funktioniert, dann verstehen Sie das Prinzip, der Boolesche Algebra, also haben Sie alles schon im Griff.

3.8.2 Die Potenzmenge

Es sei M eine Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge alle Teilmenge M. Wir haben hier drauf zwei Beispiele zwei-stellige Verknüpfungen :

$$\bigcup : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), \quad (A, B) \mapsto A \bigcup B,$$

sowie

$$\bigcap : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), \quad (A, B) \mapsto A \bigcap B.$$

Es gibt auch hier eine einstellige Verknüpfung :

$$^c : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), \quad A \mapsto M \setminus A = A^c = \{m \in M : m \notin A\}.$$

Dieses ergibt ebenfalls eine Boolesche Algebra mit der Rolle von 1 gespielt von M und die Rolle von 0 gespielt von $\emptyset$.

3.8.3 Beispiele und Gegenbeispiele

1. Es sei $\mathbb{U}$ die Menge alle ungerade ganze Zahlen und $\mathbb{G}$ die Menge alle gerade ganze Zahlen. Wir unterscheiden nicht zwischen verschiedene ungerade Zahlen. Es sei $\wedge = \times$ und $\vee = +$ und sei $\neg\mathbb{U} = \mathbb{G}$ sowie $\neg\mathbb{G} = \mathbb{U}$. Versuchen Sie, einmal mit $0 = \mathbb{G}$ und $1 = \mathbb{U}$ und einmal mit $1 = \mathbb{G}$ und $0 = \mathbb{U}$. Entscheiden Sie, welche Gesetze gelten und welche gelten nicht.

2. Es sei I die Identitätsfunktion, d.h. $I(x) = x\forall x$ und 0 die null-Funktion, d.h. $0(x) = 0\forall x$. Es sei $\wedge = \circ$ und $\vee = +$, $I = 1$ und $0 = 0$, und definieren wir $\neg I = 0$, $\neg 0 = I$. Entscheiden Sie, welche Gesetze gelten und welche gelten nicht.

3. Es sei B eine Boolesche Algebra und $C \subset B$ sodass die zwei sowie einstellige Verknüpfungen auch bzw. auf C sind (d.h. die bilden $C \times C \to C$ sowie $C \to C$). Dann ist C mit dieser Verknüpfungen auch eine Boolesche Algebra.

3.9 Aufgabe

1. Zeigen Sie, dass
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

2. Zeigen Sie, dass jede lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

3. Zeigen Sie, dass eine Konstante Funktion definiert auf $\mathbb{R}$ nie bijektiv ist. Genau wann, ist eine Konstante Funktion bijektiv?

4. Definieren wir eine Boolesche-Algebra als $\{I, 0\}$ wobei $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität Funktion ist, das heisst
$$I(x) = x\forall x \in \mathbb{R},$$
und 0 die konstante Funktion
$$0(x) = 0\forall x \in \mathbb{R}.$$
Es sei $\neg I := 0$, $\neg 0 := I$, $\wedge := \circ$, sowie $\vee := +$. Bestimmen Sie, ob dieses eine Boolesche Algebra ist oder nicht.

   (a) Kommutativgesetze $a \wedge b = b \wedge a$ sowie $a \vee b = b \vee a$

   (b) Assoziativgesetze $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ sowie $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

   (c) Idempotenzgesetze $a \wedge a = a$ sowie $a \vee a = a$

   (d) Distributivgesetze $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

   (e) Neutralitätsgesetze $a \wedge 1 = a$ sowie $a \vee 0 = a$

   (f) Extremalgesetze $a \wedge 0 = 0$ sowie $a \vee 1 = 1$

   (g) Doppelnegationsgesetz (Involution) $\neg(\neg a) = a$

(h) De Morgansche Gesetze $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

(i) Komplementärgesetze $a \wedge \neg a = 0$ sowie $a \vee \neg a = 1$

(j) Dualitätsgesetze $\neg 0 = 1$ sowie $\neg 1 = 0$

(k) Absorptionsgesetze $a \vee (a \wedge b)a$ sowie $a \wedge (a \vee b) = a$.

5. Sie wollen $\sqrt{x}$ für irgendein $x \in \mathbb{N}$ berechnen, z.B. $x = 5$. Wie können Sie, nur mit einem ganz genauem (bis auf mm) Messband berechnen? (Hinweis: Verwenden Sie einen Dreieck).

Kapitel 4

Analytische Geometrie

In der Kunst ist der ,,goldener Schnitt" besonders fein, um Augen-anziehende Designs herzustellen. Sie wollen ein Herz zeichnen? Ein Herz entsteht aus einige Kurve mit bestimmte Krümmung sowie Zusammenhang. Manche Zeichnens sind schon reinprogrammiert aber wenn Sie selbst ein schöne Form als Graphic Design zeichnen wollen, benötigen Sie analytische Geometrie um mit dem Computer Programm Ihre Idee zu kommunizieren.

Definition 4.0.1. *Der Betrag $|x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist der Abstand auf der Zahlenstrahl zwischen x und y.*

Daraus folgt es, dass der Betrag $|x|$ ist der Abstand zwischen x und 0 auf der Zahlenstrahl. Man kann natürlich auch äquivalent

$$|x| = x, \text{ falls } x \geq 0 \vee -x \text{ falls } x < 0,$$

oder

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Allerdings die geometrische Beschreibung ist oft nützlicher.

Definition 4.0.2. *Der n-dimensionaler Euklidische Raum ist*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R},$$

wobei das Produkt n-mal wiederholt wird.

Definition 4.0.3. *Ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine Menge der Form*

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

wobei $a \leq b$ reelle Zahlen sind. Ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine Menge der Form

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

4.1 Topologische Grundlagen

Satz 4.1.1. *Der Abstand hat folgende Eigenschaften.*

1. $0 \leq d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. *Dreiecksungleichung:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Beweis: Der Beweis der ersten beiden folgt aus

$$|x - x'| = |x' - x|, \quad (x - x')^2 = (x' - x)^2.$$

Die Dreiecksungleichung zeigen wir zuerst für $n = 1$: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Da es gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$, nehmen wir an, dass $x \leq y$. Falls nicht, könnte man den Namen x und y austauschen und es ist egal da es gilt

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Also gilt $x \leq y$. Es gibt zwei Möglichkeiten für den dritten Punkt z. Falls z zwischen x und y ist dann gilt

$$\begin{aligned} x \leq z \leq y \implies d(x, y) &= y - x = y - z + z - x \\ &= d(y, z) + d(z, x). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Dreiecksungleichung eine Gleichung aber das ist erlaubt da die Ungleichung nicht streng ist.

Die zweite Möglichkeit für den dritten Punkt z ist, dass z nicht zwischen x und y ist, also entweder $z < x$ oder $y < z$. Falls $z < x$ dann es gilt

$$d(x, y) = y - x < y - z = d(y, z) = d(z, y) \implies$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Falls $z > y$ dann es gilt

$$d(x, y) = y - x < z - x = d(x, z) \implies d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Die Dreiecksungleichung ist in diesem Fall bewiesen. Beweisen wir den Fall $\mathbb{R}^2$. Für den Fall $\mathbb{R}^2$ seien $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$, sowie $\mathbf{x}''$ in $\mathbb{R}^2$. Geometrisch betrachtet gibt es zwei möglichkeiten : entweder liegen die drei Punkte auf eine Gerade oder sie bilden ein Dreieck. Im ersten Fall sind die drei Punkte auf eine Gerade, die wir mit $\mathbb{R}^1$ identifizieren können also ist die Dreiecksungleichung schon bewiesen.

Für den zweiten fall, naja die Dreiecksungleichung ist so genannt, da die sagt, dass die Summe zwei Länge eines Dreiecks ist grösser oder gleich die Länge der dritten Seite. In diesem Fall sind die Länge der drei Seiten des Dreiecks genau laut Definition :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), d(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')$$

also es gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') + d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}').$$

Allgemein gilt das gleiche in jeder Dimension, da drei Punkte entweder auf einer Gerade liegen oder nicht. Falls ja, verwenden wir den Beweis des Falls $\mathbb{R}^1$ da die Gerade mit $\mathbb{R}^1$ identifiziert werden kann, und falls nein, verwenden wir die Tatsäche, dass die Summe zwei Seiten eines Dreiecks länger als die Länge der dritten Seite.

Geometrisch ist die Bedeutung, dass der Abstand zwischen zwei Punkten ist kleiner oder gleich der Abstand von dem ersten Punkt zu einem dritten Punkt, und danach von dem dritten Punkt nach dem zweiten Punkt. Einfacher gesagt : der kürzester Weg zwischen zwei Punkten x und y läuft direkt von x zum y, ohne zwischenhalt (z) (z.B. beim Kiosk-punkt (z)).

Definition 4.1.2. *Für eine Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ für irgend eine $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir*

$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Dieses nennen wir ein Ball um dem Punkt x mit dem Radius ϵ, egal ob $n = 3$ oder nicht. Im Fall $n = 1$ ist so ein Ball ein Intervall

$$]x - \epsilon, x + \epsilon[.$$

Im Fall $n = 2$ ist so ein Ball ein Randloser Kreis. Im Fall $n = 3$ ist so ein Ball tatsächlich ein drei dimensionale Ball, ohne die Schale.

Möglicherweise müssen Sie nicht mehr als drei Dimensionen betrachten. Allerdings ist es interessant zu überlegen, wie man höher-dimensionale Räume versteht? Man betrachtet die verschiedene niedrigere-dimensionale Perspektive.

Definition 4.1.3. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst offen, genau dann, wenn es gilt*

$$\forall m \in M \exists r > 0 \text{ sodass } B_r(m) \subset M.$$

Hinweis: Da die leere Menge $\emptyset$ kein Elemente hat, erfüllt sie die Definition und ist dementsprechend offen. Noch ein Beispiel ist $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4.1.4. *Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(x)$ offen.*

Beweis: Es sei denn $y \in B_r(x)$. Dementsprechend gilt

$$|x - y| =< r.$$

Definieren wir

$$\epsilon := r - |x - y|.$$

Dann es gilt

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } |z-y| < \epsilon,$$

$$|z-x| \leq |z-y| + |y-x| < \epsilon + |x-y| = +r - |x-y| + |x-y| = r.$$

Dementsprechend gilt

$$|z-x| < r \implies z \in B_r(x).$$

Wir haben gezeigt, dass für jede $z \in \mathbb{R}^n$ mit $|z-y| < \epsilon$ ist

$$z \in B_r(x).$$

Das heisst, laut Definition

$$B_\epsilon(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z-y| < \epsilon\} \subset B_r(x).$$

Korollar 4.1.5. *Jedes offenes Intervall in $\mathbb{R}^1$ ist ja offen.*

Beweis: Ein offenes Intervall ist eine der folgende

1. $\emptyset$ in dem Fall, dass das Interval (a,b) wobei $a \geq b$ ist.
2. $\mathbb{R}$ in dem Fall, dass das Interval $(-\infty, \infty)$ ist.
3. Falls $a < b$ dann ist das Intervall

$$(a,b) = \left]\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right[,$$

da der Mittelpunkt des Intervalls

$$\frac{a+b}{2}$$

ist und der Radius des Intervalls ist

$$\frac{b-a}{2}.$$

in jedem der drei Fällen ist das Intervall offen.

Definition 4.1.6. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst abgeschlossen, genau dann, wenn*

$$M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$$

offen ist.

Hinweis: Da $\emptyset$ sowie $\mathbb{R}^n$ offen sind und es gilt

$$\emptyset^c = \mathbb{R}^n, \quad (\mathbb{R}^n)^c = \emptyset,$$

sind die leere Menge sowie $\mathbb{R}^n$ geschloffen (d.h. offen und abgeschlossen, auf Englisch open sowie closed).

Menge können offen sein, abgeschlossen sein, oder keine von beiden sein. Nur die leere Menge sowie $\mathbb{R}^n$ sind geschloffen Teilmenge $\mathbb{R}^n$.

Satz 4.1.7. *Die Vereinigung beliebig viele offene Menge bleibt offen und der Durchschnitt beliebig viele abgeschlossene Menge bleibt abgeschlossen.*

Beweis: Es sein x ein Punkt in der Vereinigung beliebig viele offene Menge. Dann ist x in einer davon (oder mehrer davon). Laut Definition gibt es $r > 0$ sodass $B_r(x)$ auch in dieser Menge ist. Da die Vereinigung diese Menge enthällt ist $B_r(x)$ in der Vereinigung. Also laut Definition ist die Vereinigung offen. Die Aussage für den Durschnitt folgt daraus, dass

$$(A \cap B)^c = \mathbb{R}^n \setminus (A \cap B) = \mathbb{R}^n \setminus A \cup \mathbb{R}^n \setminus B.$$

Also das Komplement der Durschnitt ist die Vereinigung des Komplements jede Menge des Durschnitts. Diese sind laut Definition abgeschlossen jeweils offen. Wir haben bereits bewiesen, dass die Vereinigung ist offen. Da das Komplement des Durschnitts also offen ist, ist der Durschnitt abgeschlossen.

Es gibt auch Menge die weder offen noch geschlossen sind. Hier sind einige Beispiele:

1. $[0, 1[$. Die Menge ist nicht offen, da es keinen Ball um dem Punkt 0 in der Menge gibt. Ebenfalls ist das Komplement auch nicht offen, da das Komplement

   $$[0, 1[^c =] - \infty, 0[\cup [1, \infty[.$$

   Es gibt keinen Ball um dem Punkt 1, der in dieser Menge enthälten ist. Also diese Menge ist auch nicht offen.

2. Allgemeiner $[a, b[$ falls $a < b$ ist weder geschlossen noch offen. Falls $a = b$, dann ist diese Menge laut Definition

   $$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b = a\} = \emptyset,$$

   und die leere Menge ist geschloffen.

Übung 4.1.8. ** Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann die Menge $C \subset P(X)$ aller geschloffen (offen sowie abgeschlossen) ist mit der gleichen Verknüpfungen wie auf der Potenzmenge von X, $P(X)$ also $\cup, \cap,, \neg A = A^c$ eine Boolesche Algebra.*

Übung 4.1.9. ** Betrachten wir $\mathbb{Z}$ als Universum. Überlegen Sie, warum jede Teilmenge dann offen sowie abgeschlossen ist.*

4.2 Folgen und Grenzwerte

Definition 4.2.1. *Eine Folge der reellen Zahlen ist eine Abbildung von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{R}$, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Der Bild*

$$x(\mathbb{N}) = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_n := x(n).$$

Beispiele:

1. Es sei $x(n) := n$.
2. Es sei $x(n) := -n$.
3. Es sei $x(n) := \frac{1}{n}$.
4. Es sei $x(n) := -\frac{1}{n}$.
5. Es sei $x(n) := n^2$.
6. Es sei $x(n) = 2^n$.
7. Es sei $x(n) = 1 - \frac{1}{n}$.
8. Es sei $x(n) = \frac{1}{\log(n)+1}$.
9. Es sei $x(n) = 3^{-n}$.

Definition 4.2.2. *Eine Folge heisst von oben (bzw. von unten) beschränkt, genau dann, wenn der Bild* $x(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ *von oben (bzw. von unten) beschränkt ist. Das heisst, es gibt eine obere (bzw. untere) Schranke für die Folge.*

Was sind also die Elemente $\mathbb{R}$? Die sind entweder Elemente aus $\mathbb{Q}$ oder Suprema bzw. Infima Teilmenge $\mathbb{Q}$ die von oben bzw. von unten beschränkt sind. Eine offene Menge wie z.B. $]-1,1[$ hat das Supremum 1 und das Infimum -1. Die Menge nähert sich dran auch wenn sie nie die Werte annimmt. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ ist $\mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Diese Menge hat als Supremum $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und als Infimum $-\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Elemente der Menge werden immer näher dran aber erreichen diese Randwerte nie.

Proposition 4.2.3. *Suprema sowie Infima sind eindeutig.*

Beweis: Es sei M eine nicht leere Menge in $\mathbb{R}$ die von oben beschränkt ist. Dann sei s das Supremum von M. Es sei $y \in \mathbb{R}$. Laut der Total Ordnung $\mathbb{R}$ gilt entweder $y = s$ oder $y < s$ oder $y > s$. Falls $y > s$ dann ist y aber kein Supremum, da s Supremum von M ist und dementsprechend eine obere Schranke M ist und $s < y$ zeigt, dass y nicht die kleinste Obere Schranke ist.

Falls $y < s$, dann da s die kleinste obere Schranke ist (Supremum Definition), muss es sein, dass y keine obere Schranke ist, weil s die kleinste ist! Also gibts genau ein Supremum. Die Eindeutigkeit Infima folgt aus folgendes. Sei

$$M \neq \emptyset, M \subset \mathbb{R}.$$

Dann sei
$$-M = \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}.$$
Es gilt dann
$$- - M = M.$$
Es sei angenommen M von unten beschränkt und s eine untere Schranke. Dann gilt
$$s \leq m \forall m \in M \iff -s \geq x \forall x \in -M.$$
Also die Menge $-M$ ist von oben beschränkt und dementsprechend ein Supremum hat, das eindeutig ist. Es sei z das Supremum von $-M$. Dann gilt
$$x \leq z \forall x \in -M \iff m \geq -z \forall m \in M.$$
Ferner gilt
$$y < z \implies y \text{ ist keine obere Schranke für } -M.$$
Das heisst, falls $y < z$ dann gibt es $x \in -M$ sodass gilt
$$y < x \leq z.$$
Es sei $-z < w$ was äquivalent der Aussage $-w < z$ ist. Dann gibt es $x \in -M$ sodass gilt
$$-w < x \leq z \iff -z \leq -x < w,$$
und $-x \in - - M = M$ also für jede w sodass $-z < w$ ist, ist w keine untere Schranke für M. Dementsprechend ist $-z$ das Infimum von M. Dementsprechend besitzt jede von unten beschränkte Teilmenge $\mathbb{R}$ ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Allgemein zeigt der Beweis, dass
$$\sup(M) = -\inf(-M), \inf(-M) = -\sup(M).$$
also die Eindeutigkeit Infima folgt aus der Eindeutigkeit Suprema. Es sei M von unten beschränkt, dann ist $\inf(M) = -\sup(-M)$ und die rechte Seite haben wir schon bewiesen eindeutig ist also die linke Seite ist ebenfalls eindeutig.

Proposition 4.2.4. *Es sei $\emptyset \neq A \subset B$. Dann es gelten*
$$\inf A \geq \inf B, \quad \sup A \leq \sup B.$$

Beweis: Da $A \subset B$ ist jede US für B auch ein US für A. Falls das Infimum A $-\infty$ ist, gibts nichts zu zeigen. Falls nicht, dann ist das Infimum B auch ein US für A, also gilt laut Definition Infimum (GUS)
$$\inf(B) \leq \inf(A).$$
Ebenfalls argumentiert man für Supremum.

Definition 4.2.5. *Die negative Unendlichkeit $-\infty$ ist definiert als das Infimum $\mathbb{Z}$. Die positive Unendlichkeit ∞ ist definiert als das Supremum $\mathbb{Z}$.*

Definition 4.2.6. *Es sei M eine nicht leere Menge in $\mathbb{R}$. Falls M ein Element hat, das grösser jedes andere Element M ist, dann heisst dieses Element das Maximium von M. Falls M ein Element hat, das kleiner jedes andere Element M ist, dann heisst dieses Element das Minimum von M.*

Proposition 4.2.7. *Eine nicht leere Menge M aus $\mathbb{R}$ hat ein Maximum genau dann, wenn das Supremum der Menge in M ist. Die Menge hat ein Minimum genau dann, wenn das Infimum der Menge in M ist.*

Beweis: Es sei M die Menge und X das Maximum. Dann gilt :

$$X > m \forall m \in M.$$

Hiermit ist X eine obere Schranke für M. Es sei U eine obere Schranke M. Dann muss gelten

$$U \geq m \forall m \in M \implies U \geq X$$

da $X \in M$. Laut Definition Supremum ist X das Supremum und wir haben schon bewiesen, dass das Supremum eindeutig ist.

Es sei y das Minimum. Dann gilt

$$y < m \forall m \in M.$$

Hiermit ist y ein untere Schranke für M. Es sei $G > y$, dann ist G keine untere Schranke für M. Also laut Definition ist y das Infimum von M.

Es gibt nur einige Möglichkeiten für Folgen. Es kann sein, dass eine Folge von oben nicht beschränkt ist. Es kann sein, dass eine Folge von unten nicht beschränkt ist. Es kann sein, dass eine Folge von oben sowie von unten beschränkt ist aber keine Müster oder ,,Trend" hat als n gröss wird. Im schönsten Fall hat die Folge doch einen Trend als $n \to \infty$ und dieses wird ein Grenzwert genannt.

Definition 4.2.8. *Falls es eine reelle Zahl L gibt, sodass $x(n)$ sich an L nähert als n gröss wird, dann heisst L der Grenzwert der Folge und man schreibt*

$$x(n) \to L \text{ als } n \to \infty,$$

oder kürzer

$$x(n) = x_n \to L.$$

Etwas formeller ist die Definition, dass für jede positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ es gibt eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ sodass gilt

$$\forall n > N \implies |x(n) - L| < \epsilon.$$

Man sagt, dass die Folge konvergiert gegen dem Grenzwert L.

Beispiele:

1. Es sei $x(n) := n$. Diese Folge hat keinen Grenzwert. Sie wird immer grösser und nähert sich um keine reelle Zahl.

2. Es sei $x(n) := -n$. Diese Folge hat keinen Grenzwert. Sie wird immer negativer und nähert sich um keine reelle Zahl.

3. Es sei $x(n) := \frac{1}{n}$. Diese Folge konvergiert gegen 0. Es sei $\epsilon > 0$. Dann für jede $n > \frac{1}{\epsilon}$ ist $|x(n) - 0| = |x(n)| = |1/n| < \epsilon$. Das heisst, das man kann die N einfach als Element $\mathbb{N}$ die grösser als $\frac{1}{\epsilon}$ wählen.

4. Es sei $x(n) := -\frac{1}{n}$. Diese Folge konvergiert auch gegen 0. Es sei $\epsilon > 0$. Dann für jede $n > \frac{1}{\epsilon}$ ist $|x(n) - 0| = |x(n)| = |1/n| < \epsilon$. Das heisst, das man kann die N einfach als Element $\mathbb{N}$ die grösser als $\frac{1}{\epsilon}$ wählen.

5. Es sei $x(n) := n^2$. Diese Folge hat keinen Grenzwert. Sie wird immer grösser.

6. Es sei $x(n) = 2^n$. Diese Folge hat auch keinen Grenzwert. Sie wird auch immer grösser.

7. Es sei $x(n) = 1 - \frac{1}{n}$. Hier sehen wir, dass der erster Teil, die 1, ändert sich nicht. Der zweite Teil haben wir schon gesehen, konvergiert gegen 0. Insgesamt konvergiert die Folge dementsprechend gegen $1 - 0 = 1$.

8. Es sei $x(n) = \frac{2}{\log(n)+1}$. Der Nenner wird immer grösser. Dementsprechend konvergiert diese Folge gegen 0.

9. Es sei $x(n) = 3^{-n}$. Da $3^{-n} = \frac{1}{3^n}$ und der Nenner immer grösser wird, konvergiert diese Folge auch gegen 0.

Eine Folge, die gegen einen Grenzwert konvergiert, wird vielleicht nie den Grenzwert erreichen aber sie wird immer näher dran.

Satz 4.2.9. *Es seien x und y zwei Folgen. Falls beide konvergieren gegen L bzw. P, dann konvergiert die Folge*

$$x(n) + y(n) \to L + P,$$

und die Folge

$$x(n)y(n) \to LP,$$

und die Folge

$$x(n) - y(n) \to L - P,$$

und falls $P \neq 0$,

$$\frac{x(n)}{y(n)} \to \frac{L}{P}.$$

Dementsprechend funktioniert Addition, Multiplikation, Subtraktion, sowie Division mit reellen Zahlen genau wie mit der rationalen Zahlen.

4.3 Aufgabe

1. Bestimmen Sie, ob folgende Teilmenge $\mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, oder keine von den beiden sind. Bestimmen Sie das Supremum sowie Infimum und entscheiden Sie, ob die Mengen einen Maximum und/oder Minimum haben.

   (a) $\{x\}$ wobei $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\{x, y\}$ wobei $x \neq y$ zwei reelle Zahlen sind

   (c) $]-\infty, x[$ wobei $x \in \mathbb{R}$

   (d) $[x, \infty[$ wobei $x \in \mathbb{R}$

   (e) $[a, b]$

2. Bestimmen Sie ob folgende Folgen einen reellen Grenzwert in $\mathbb{R}$ haben oder nicht.

   (a) $x(n) := 5^n$.

   (b) $x(n) := 5^{-n} + 17n$.

   (c) $x(n) := (-1)^n$.

   (d) $x(n) := \frac{(-1)^n}{n}$.

3. Es sei $X \subset \mathbb{R}$. Es sei $M := \{Y \subset X : Y \text{ offen sowie geschlossen ist.}\}$. Zeigen Sie, dass mit $\cap$ sowie $\cup$ und Komplementierung M eine Boolesche-Algebra ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass dieses M erfüllt

   $$\cup(M \times M) \subset M, \quad \cap(M \times M) \subset M, \neg(M) \subset M.$$

4. * Es sei X eine Menge. Wir definieren der Abstand $d(x, y) := 1 = d(y, x)$ falls $x \neq y$ und 0 falls $x = y$. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge X offen sowie geschlossen ist. Überlegen Sie, warum es sehr einsam in so einer Menge wäre...

5. * Statt $\mathbb{R}$ betrachten Sie $\mathbb{Z}$. Die Definition offen bleibt gleich. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{Z}$ die Menge $\{z\}$ offen ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\{z\}$ auch geschlossen ist. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge $\mathbb{Z}$ (betrachtet ohne $\mathbb{R}$) geschloffen ist.

6. * Ist die Vereinigung beliebig viele abgeschlossene Menge immer abgeschlossen? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel. Ist der Durchschnitt beliebig viele offene Menge immer offen? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

4.4 Die Euklidische Ebene

Die Euklidische Ebene ist die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ also gibt es zwei unabhängige Richtungen wie Nord/Sud sowie Ost/West. Folgender Satz ist eher wie eine Definition. Der Beweis zeigt einfach, dass die Definition des Abstands stimmt überein mit ihrer geometrische Interpretation.

Satz 4.4.1. *Der Abstand zwischen zwei Punkten (x, y) und (x', y') in $\mathbb{R}^2$ ist*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Der Abstand erfüllt

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$
2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq 0$ *und* $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}')$
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') + d(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}')$

Beweis: Es seien zwei Punkte (x, y) und (x', y') in der Ebene. Vergleichen wir die zwei Dimensionen in $\mathbb{R}^2$ mit Nord/Sud und Ost West. Das heisst, x bedeutet wie weit der Punkt Ost/West ist und y bedeutet, wie weit der Punkt Nord/Sud. Für diesem Beispiel kann als Mittlepunkt $(0, 0)$ als Zentrums des Hörsaals gewählt werden und Einheiten können Meter bedeuten. Dann ist der Punkt $(1, 0)$ ein Meter Ost vom Mittelpunkt. Der Punkt $(-1, 0)$ ist ein Meter West vom Mittelpunkt. Der Punkt $(0, 1)$ ist ein Meter Nord vom Mittelpunkt und der Punkt $(0, -1)$ ist ein Meter Sud vom Mittelpunkt. In jede Dimension (vergleich mit einer Zahlenstrahl mit vorwärts und rückwarts) bedeutet positiv die eine Richtung und negativ die Gegenrichtung.

Also für unsere zwei Punkte (x, y) und (x', y') ist $|x - x'|$ der Abstand Ost/West dazwischen. Ebenfalls ist $|y - y'|$ der Abstand Nord/Sud dazwischen. Man zeichnet die Gerade vom Punkt (x, y) zum Punkt (x', y) und danach die Gerade vom Punkt (x', y) nach (x', y'). Diese machen ein 90 Grad Winkel. Laut dem Satz von Pythagorus, die Länge vom (x, y) nach (x', y') die Länge des Hypothenuses eines recht-Dreieck, und diese Länge quadriert ist die Summe, der Länge der zwei Beinen quadriert. Das heisst,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^2 = |x - x'|^2 + |y - y'|^2$$

also gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2}.$$

Aus der Definition und der Tat, dass

$$(x - x')^2 = (x' - x)^2$$

$$(x - x')^2 \geq 0 \text{ und } = 0 \iff x = x'$$

ebenfalls gilt mit y und y' folgen die erste zwei Eigenschaften. Für die Dreiecksungleichung, können wir dieses mit einem Bild beweisen. Wir haben drei Punkte in der Ebene, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, und

$\mathbf{x}''$. Falls alle auf einer Gerade liegen, dann erfüllt der Abstand die Dreiecksungleichung wie in $\mathbb{R}^1$. Falls nicht, dann bauen sie einen Dreieck. Die Länge der Seiten sind jeweils $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, $d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')$. Es gilt immer, dass die Summer der Längen zwei Seiten eines Dreiecks ist grösser als die Länge der dritten Seiten. Also gilt

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Wir haben die gleiche topologische Definitionen in $\mathbb{R}^2$ und später auch in $\mathbb{R}^3$.

Definition 4.4.2. *Ein Ball mit dem Mittelpunkt $\boldsymbol{x} = (x, y)$ mit dem Radius r ist die Menge*

$$\{\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2 : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') < r\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a - x)^2 + (b - y)^2 < r^2\}.$$

Definition 4.4.3. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ heisst offen, genau dann wenn es gilt*

$$\forall \boldsymbol{x} \in M \exists r > 0 B_r(\boldsymbol{x}) \subset M.$$

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ heisst geschlossen, genau dann wenn es gilt $M^c = \mathbb{R}^2 \setminus M$ ist offen. Geschloffen bedeutet offen sowie geschlossen.

Satz 4.4.4. *Ein Ball ist offen.*

Beweis: Es sei $\mathbf{x}' \in B_r(\mathbf{x})$. Dann es gilt

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) < r \iff a := r - d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) > 0.$$

Dann für jede $\mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^2$ sodass

$$d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') < a \implies d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) < a + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = r.$$

Also ist $\mathbf{x}'' \in B_r(\mathbf{x}')$ $\forall \mathbf{x}'' \in B_a(\mathbf{x}')$.

Wir können Elemente aus $\mathbb{R}^2$ in zwei Weisen betrachten. Einmal als Punkte und einmal als Vektoren.

1. Die Abbildung $+$ ist eine zwei stellige Verknüpfung auf $\mathbb{R}^2$.
2. Die Abbildung $-$ ist eine zwei stellige Verknüpfung auf $\mathbb{R}^2$.
3. Die Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

4. Die Abbildung $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' := xx' + yy'.$$
Diese Abbildung heißt Skalarprodukt und erfüllt
$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'',$$
$$d(\mathbf{x}, 0) = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Definition 4.4.5. *Eine Strecke in $\mathbb{R}^2$ ist die Teilmenge alle Punkte $\mathbb{R}^2$ die zwischen zwei Punkten in $\mathbb{R}^2$ auf der Gerade zwischen den Punkten liegt. Man schreibt für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$ die Strecke dazwischen $\boldsymbol{xx}'$. Die Länge ist*
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = ||\boldsymbol{xx}'||.$$

Definition 4.4.6. *Ein Vektor mit Anfangspunkt ist eine gerichtete Strecke, d.h. eine Strecke die entweder vom Punkt $\boldsymbol{x}$ nach $\boldsymbol{x}'$ führt oder anders um. Falls der Vektor von $\boldsymbol{x}$ nach $\boldsymbol{x}'$ führt, dann schreibt man*
$$\vec{v}_{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{xx}'}.$$

Eine Strecke ist wie eine normale Straße wobei ein Vektor ist wie eine Einbahnstraße.

Definition 4.4.7. *Ein Vektor (ohne Anfangspunkt) ist eine Länge zusammen mit einer Richtung. Es sei $p \in \mathbb{R}^2$, dann für ein Vektor $\vec{v}$ ist*
$$\vec{v}_p$$
genau der Vektor $\vec{v}$ mit dem Anfangspunkt p. Der Vektor $-\vec{v}$ mit Anfangspunkt 0 hat die gleiche Länge wie $\vec{v}$ und der Winkel 180 Grad minus dem Winkel von $\vec{v}$. Man definiert Vektor-addition folgendermass:
$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{\boldsymbol{xx}''}$$
wobei $\vec{v} = \vec{\boldsymbol{xx}'}, \vec{w} = \vec{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}''}$. Man definiert Vektor-subtraktion folgendermass:
$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{\boldsymbol{x}''\boldsymbol{x}'}.$$

Es gelten:

1. Der Abstand zwischen dem Punkt $\mathbf{x}$ und 0 ist die Länge des Vektors von 0 nach $\mathbf{x}$.
2. Die Länge dieses Vektors ist ebenfalls gleich $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.
3. Der Winkel dieses Vektors ist $\arctan(y/x)$.
4. Die Summe zwei Vektoren ist ebenfalls ein Vektor.
5. Der Vektor mit Anfangspunkt p nach dem Punkt q hat die gleiche Länge sowie Richtung also der Vektor mit Anfangspunkt 0 nach dem Punkt $q - p$.

6. Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ mit dem Anfangspunkt 0 kann man die Endpunkte mit den Vektoren identifizieren. Dementsprechend gilt es, dass die Länge des Vektors $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ist gleich
$$\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x})}$$

7. Der Vektor von 0 nach dem Punkt $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ hat die Länge
$$\sqrt{(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}')}$$

Satz 4.4.8. *Es seien zwei Punkte $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$ in $\mathbb{R}^2$ die jeweils nicht der Nullpunkt $0 = (0, 0)$ sind und identifizieren wir diese Punkte mit dem Endpunkten zwei Vektoren mit dem Anfangspunkt* 0. *Dann ist der Winkel zwischen den beiden genau 90 Grad, wenn es gilt*
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = 0.$$

Beweis: Wir berechnen
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$$
$$= d(0, \mathbf{x})^2 + d(0, \mathbf{x}')^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'.$$
Der Grad zwischen den Vektoren ist genau 90 wenn den Satz von Pythagorus gilt, also genau dann, wenn
$$d(0, \mathbf{x})^2 + d(0, \mathbf{x}')^2 = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^2.$$
Dieses gilt genau dann, wenn
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0.$$

Definition 4.4.9. *Eine Menge heisst beschränkt, genau dann, wenn es ein $R > 0$ gibt, sodass die Menge*
$$M \subset B_R(0) = \{\vec{x} \subset \mathbb{R}^2 : d(\vec{x}, 0) = ||\vec{x}|| < R\}.$$

Ein neuer Begriff, die für jede $\mathbb{R}^n$ gilt, ist folgende.

Definition 4.4.10. *Eine Teilmenge $\mathbb{R}^n$ heisst* kompakt *genau dann, wenn sie geschlossen sowie beschränkt ist.*

4.5 Geometrie von Graphs

Funktionen oder Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich schön darstellen als Bild in der Ebene.

Definition 4.5.1. *Der Graph einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\mathbb{R}^2$ aller Punkte*
$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Definition 4.5.2. *Es sei eine Funktion (Abbildung) $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $M \subset \mathbb{R}$, also ist f auf M definiert aber vielleicht ist $M \neq \mathbb{R}$ also die Funktion ist nicht für jede $x \in \mathbb{R}$ definiert, nur für die x aus M. Dann heisst M der Definitions-Bereich von f. Die Menge $f(M) \subset \mathbb{R}$ heisst der Bild von M bzgl. f.*

Einige Beispiele?

1. Der Definitions-Bereich der Funktionen $\log_b(x) = f(x)$ sind $x \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Für jede $b > 0$. Der Bild der Funktion $\log_b(\mathbb{R}^+)$ ist $\mathbb{R}$. Um dieses zu beweisen am einfachsten verwendet man die Stetigkeit der Funktion und der Tat, dass $\log_b(x) \to \infty$ als $x \to \infty$ sowie $\log_b(x) \to -\infty$ als $x \to 0$. Wir erklären dieses ausführlicher in einem Moment.

2. Der Definitions-Bereich der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Bild der Funktion ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Der Definitions-Bereich der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Der Bild der Funktion ist gleich.

Das heisst, dass die Höhe eines Punkts in dem Graph von f ist die Ausgabe der Abbildung bezüglich der Eingabe gegeben durch den horizontal-Koordinate. Hier sind einige Beispiele.

1. Zeichnen Sie den Graph der Funktion
$$f(x) = x.$$

2. Zeichnen Sie den Graph der Funktion
$$f(x) = 2x.$$

3. Zeichnen Sie den Graph der Funktion
$$f^{-1}(x),$$
für die Funktion f im zweiten Beispiel.

4. Zeichnen Sie den Graph der Funktion
$$f(x) = 3x + 1.$$

5. Berechnen Sie $f^{-1}(x)$ für $f(x) = 3x + 1$ und zeichnen Sie den Graph.

6. Zeichnen Sie den Graph der Funktion
$$f(x) = x^2.$$

7. Berechnen Sie f^{-1} für $f(x) = x^2$ und zeichnen Sie den Graph (Hinweis: eigentlich gibt es zwei mögliche $f^{-1}(x)$ für $f(x) = x^2$.)

Satz 4.5.3. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Spiegelung des Graphs von f durch die Gerade*

$$\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = G(I),$$

wobei I ist die Identitätsfunktion

$$I(x) = x \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann die Umkehrfunktion erfüllt

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Also der Graph von f^{-1} ist

$$G(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Der Graph von f ist

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Dementsprechend für jeden Punkt $(x, f(x))$ in dem Graph von f ist der Punkt $(f(x), x)$ in dem Graph von f^{-1}. Das heisst, dass die Punkte $(x, f(x))$ sodass $x = f(x)$ sind in dem Graph von f sowie von f^{-1}. Es sei denn $f(x) > x$. Dann ist der Abstand von dem Punkt zum Punkt $(x, x) \in G(I)$ genau

$$|f(x) - x|.$$

Ebenfalls ist der Abstand vom Punkt $(f(x), x) \in G(f^{-1})$ zum Punkt $(x, x) \in G(I)$ genau

$$|f(x) - x|.$$

Diese Punkte sind dementsprechend durch $G(I)$ gespiegelt. Ebenfalls für $f(x) < x$ ist der Abstand vom Punkt $(x, f(x)) \in G(f)$ zum Punkt $(x, x) \in G(I)$

$$|f(x) - x|,$$

sowie der Abstand vom Punkt $(f(x), x) \in G(f^{-1})$ zum Punkt $(x, x) \in G(I)$. Dementsprechend sind diese Punkte durch $G(I)$ gespiegelt.

Eine Bemerkung ist, so wie wir Funktionen/Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert haben hat eine Funktion für jeden x in dem Definitions-Bereich genau eine Ausgabe $f(x) \in \mathbb{R}$. Irgendwas wie z.B.

$$f(x) = \pm\sqrt{x}$$

ist laut unsere Definition keine Funktion/Abbildung. Allerdings können wir Funktionen/Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definieren und diese haben für ein $x \in \mathbb{R}$ dann als Ausgabe zwei Elemente $\mathbb{R}$ und wird so geschrieben

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Diese ist eine Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Der Graph wäre dann drei dimensional,

$$G(f) = \{(x, f_1(x), f_2(x)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Definition 4.5.4. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. sei f nur auf eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ definiert. Angenommen sei M offen. Dann f heisst auf $\mathbb{R}$ bzw. auf M stetig, genau dann, wenn es gilt*

$$\forall B \subset \mathbb{R} \text{ sodass } B \text{ eine offene Menge ist, ist } f^{-1}(B) \text{ auch offen.}$$

Wir können auch Stetigkeit mit Folgen betrachten. Die Definitionen sind jeweils äquivalent.

Definition 4.5.5. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : M \to \mathbb{R}$ ist stetig, genau dann wenn es gilt, $\forall$ Folgen $\{x_n\}$ aus $\mathbb{R}$ (bzw. aus M) die gegen einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in M$) konvergieren, konvergiert ebenfalls die Folge $\{f(x_n)\}$*

$$f(x_n) \to f(x).$$

Die Bedeutung ist, dass als die Eingabe x_n gegen x annähern, nähert die Ausgabe $f(x_n)$ ebenfalls gegen die Ausgabe bzg. x d.h.

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x).$$

Allgemeiner schreibt man

$$x \to x_0 \implies f(x) \to f(x_0).$$

Geometrisch betrachtet, heisst dieses, dass man den Graph der Funktion zeichnen kann, ohne den Stift oder die Kreide hoch heben zu müssen. Die meisten Funktionen, die man verwendet, sind mindestens ,,Stuckweise" stetig. Das heisst, sie sind stuckweise definiert und jeder Stuck ist stetig. Entweder hangen die Stucke zusammen (d.h. Stetige Funktion) oder gibts Platz zwischen den Stucken und dann ist die Funktion nur ,,Stuckweiseßtetig, d.h. stetig auf den Stucke aber nicht unbedingt von einem Stuck zum nächsten Stuck stetig. Beispiele an der Tafel!

4.6 Differenzierbarkeit und Steigung

Die Steigung einer linearer Funktion verstehen Sie schon:

$$f(x) = mx + b \implies \text{ die Steigung ist immer } m.$$

Es werden viele Funktionen von linearen Funktionen angenähert. Das heisst, dass man die Funktion in der Nähe ein bestimmtes $x_0 \in \mathbb{R}$ mit einer linearen Funktion annähern kann.

$$f(x) \approx mx + b.$$

Schreiben wir dieses ein wenig um:

$$f(x) \approx m(x - x_0) + f(x_0), \quad b := -mx_0 + f(x_0).$$

Eine Funktion ist dann genau differenzierbar, wenn sie sich so annähern lässt. Die Ableitung der Funktion ist die Steigung m. Gröb beschrieben darf die Funktion nicht eckig im Punkt x_0. Hier sind Beispiele sowie Gegenbeispiele.

1. Jede lineare Funktion ist überall differenzierbar, da die Steigung immer m ist.

2. Die Funktion $|x|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar, da die Steigung auf der linken Seite -1 ist aber auf der rechten Seite 1 ist. Es gibt dementsprechend keine eindeutige Steigung im Punkt 0.

So einfach ist es: gibts eine Eindeutige Steigung? Dann die Funktion ist dort differenzierbar. Es gibt eine genauere Definition mithilfe Folgen aber diese müssen Sie nicht auswendig lernen.

Definition 4.6.1. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar wenn für jede Folge $\{x_n\}$ aus $\mathbb{R}$ die gegen x konvergiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} =: f'(x) \in \mathbb{R}$$

und dieses Grenzwert ist gleich, egal was für eine Folge $\{x_n\}$ ist. $f'(x)$ ist die Ableitung der Funktion f im Punkt x.

4.7 Der Euklidischer Raum $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir Topologie in $\mathbb{R}^3$.

Satz 4.7.1. *Der Abstand zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$ aus $\mathbb{R}^3$ ist*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}.$$

Der Abstand erfüllt folgende Eigenschaften.

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$

2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$

3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') + d(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}')$

Beweis: Die erste zwei Eigenschaften folgen aus der Tat, dass

$$(a-b)^2 = (b-a)^2 \forall a, b \in \mathbb{R}$$

sowie

$$(a-b)^2 = 0 \iff a = b.$$

Jetzt haben wir ein Topologische Karte, das heisst, wir können Berge (oder Treppen) steigen, und unsere Position vom Mittelpunkt ist $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Für ein anderen Punkt $\mathbf{x} = (x', y', z')$ wissen wir schon, wie wir den Abstand zwischen (x, y, z) und (x', y', z) berechnen, da dieses zwei Punkte in einer Ebene liegen. Die haben dieselbe Höhe, also können wir den Abstand dazwischen genau wie in $\mathbb{R}^2$ berechnen und der Abstand ist dadurch als

$$d((x, y, z), (x', y', z)) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Danach betrachten wir den Abstand zwischen dem Punkt (x', y', z) und (x', y', z'). In diesem Fall hat nur die Höhe ein unterschied: die Punkte liegen auf einer Gerade. Der Abstand zwischen den Punkten ist gegeben durch den Abstand zwischen zwei Punkte in $\mathbb{R}$, nämlich

$$d((x', y', z), (x', y', z')) = d(z, z') = |z - z'|.$$

Die Gerade vom Punkt (x, y, z) nach (x', y', z) ist eine Beine und die Gerade vom Punkt (x', y', z) nach (x', y', z') ist die zweite Beine eines recht-Dreiecks. Dementsprechend erfüllt die Länge des Hypothenuses laut Pythagorus, geometrisch der Abstand von (x, y, z) direkt nach (x', y', z')

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^2 = d((x, y, z), (x', y', z))^2 + d((x', y', z), (x', y', z'))^2$$

$$= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \implies d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Für die Dreiecksungleichung, können wir dieses mit einem Bild beweisen. Wir haben drei Punkte in dem Raum, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, und $\mathbf{x}''$. Falls alle auf einer Gerade liegen, dann erfüllt der Abstand die Dreiecksungleichung wie in $\mathbb{R}^1$. Falls nicht, dann bauen sie einen Dreieck. Die Länge der Seiten sind jeweils $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, $d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')$. Es gilt immer, dass die Summer der Längen zwei Seiten eines Dreiecks ist grösser als die Länge der dritten Seiten. Also gilt

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Wir haben die gleiche topologische Definitionen in $\mathbb{R}^2$ und später auch in $\mathbb{R}^3$.

Definition 4.7.2. *Ein Ball mit dem Mittelpunkt $\boldsymbol{x}$ mit dem Radius r ist die Menge*

$$\{\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3 : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') < r\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 < r^2\}.$$

Definition 4.7.3. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heisst offen, genau dann wenn es gilt*

$$\forall \boldsymbol{x} \in M \exists r > 0 B_r(\boldsymbol{x}) \subset M.$$

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heisst geschlossen, genau dann wenn es gilt $M^c = \mathbb{R}^3 \setminus M$ ist offen. Geschloffen bedeutet offen sowie geschlossen.

Satz 4.7.4. *Ein Ball ist offen.*

Beweis: Es sei $\mathbf{x}' \in B_r(\mathbf{x})$. Dann es gilt

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) < r \iff a := r - d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) > 0.$$

Dann für jede $\mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^3$ sodass

$$d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') < a \implies d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) < a + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = r.$$

Also ist $\mathbf{x}'' \in B_r(\mathbf{x}')$ $\forall \mathbf{x}'' \in B_a(\mathbf{x}')$.

Teil II

Grundlagen der linearen Algebra

Kapitel 5

Systeme linearer Gleichungen I : Was ist die Matrix?

Wir haben zur Zeit lineare Gleichungen mit einem oder mit zwei Variabeln untersucht. Wir haben folgendes betrachtet :

1. Jede lineare Gleichung in einer Variabel x kann in der Form
$$ax = b$$
ersetzt werden, wobei $a \neq 0$. Die eindeutige Lösung der Gleichung ist
$$x = \frac{b}{a}.$$
2. Jede lineare Gleichung in zwei Variabeln x und y kann in der Form
$$y = mx + b$$
ersetzt werden, wobei $m \neq 0$. Der Graph der Funktion
$$f(x) = mx + b$$
darstellt alle Lösungen der linearen Gleichung.

Was passiert wenn wir mehr als eine Gleichung lösen müssen?

5.1 Linearegleichungssysteme

Fangen wir an mit einem Beispiel. Sie wollen den perfekten ,,Black Russian" mischen. Er soll genau 35 % Alkohol enthalten und Sie möchten genau 250 ml haben. Ein Black Russian ist eine Mischung von Wodka und Kahlua die auf Eis serviert wird. Wodka soll immer 40% Alkohol enthalten (Wodka ,mit 37,5 % ist technisch gesehen kein Wodka). Kahlua hat 20 % Alkohol. Wie viel von jedem sollen Sie hineinmischen? Um dies herauszufinden brauchen wir zwei lineare Gleichungen. Am einfachsten ist die Menge, da wir 250 mL haben wollen. Definieren wir also :

1. x ist die Menge in mL von Wodka ;
2. y ist die Menge in mL von Kahlua.

Da wir insgesamt 250 ml haben wollen, ist die erste Gleichung :

$$x + y = 250.$$

Jetzt zum Alkohol. Wir wollen 35 % Alkohol. Die ganze Menge des Getränks soll 250 ml sein, das heisst 35 % davon soll Alkohol sein. Was bedeutet 35 % ? Nicht zu vergessen :

$$35\% = \frac{35}{100}.$$

Dementsprechend betrachten wir :

$$35\% \text{ von } 250mL = \frac{35}{100} \times 250mL = 87,5mL.$$

Da Wodka 40 % Alkohol hat und Kahlua 20 %, haben wir die Gleichung :

$$40\% \text{ von } x + 20\% \text{ von } y = 87,5.$$

Da

$$40\% = \frac{40}{100}, \quad \text{und} \quad 20\% = \frac{20}{100},$$

können wir die zweite Gleichung so schreiben :

$$\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}y = 87,5.$$

Jetzt haben wir zwei Gleichungen :

$$x + y = 250,$$
$$\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}y = 87,5.$$

Was genau bedeutet eine Lösung mehrer Gleichungen?

Definition 5.1.1. *Mehr als eine (d.h. zwei oder mehr) lineare Gleichungen nennt man ein System linearer Gleichungen. Für ein System linearer Gleichungen in n Variabeln, die wir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nennen, ist eine Lösung eine Tabelle von n (reele) Zahlen, sodass wenn wir diese Zahlen beziehungsweise für die Variablen in den Gleichungen einsetzen, alle Gleichungen gelten.*

In unserem Beispiel haben wir nur zwei Variabeln und statt x_1 und x_2 haben wir die x und y genannt. Sie haben immer die Wahl Ihre Variabeln wie Sie möchten zu nennen. Wenn wir unser Beispiel in die Definition einsetzen, was ist “n?” Wir haben zwei Variabeln, das heisst “n” in der Definition in diesem Fall 2 ist. Eine Lösung ist denn eine Tabelle von zwei Zahlen die beide Gleichungen erfüllt.

In unserem Beispiel ist das schon klar, da wir zwei Zahlen finden wollen und die sind :

1. Die Menge Wodka in mL $= x$;
2. Die Menge Kahlua in mL $= y$.

Um die Gleichungen zu lösen, können wir folgendes tun :

1. Erst schreiben wir eine Gleichung um, damit eine Variabel ganz allein auf einer Seite steht. In dem Beispiel mussen wir dies mit der ersten Gleichung tun :

   $$x + y = 250.$$

   Wir können x von beiden Seiten subtrahieren, und dann haben wir :

   $$x + y - x = 250 - x,$$

   und da $x + y - x = y$ ist, haben wir

   $$y = 250 - x.$$

2. Danach setzen wir in der anderen Gleichung statt y was auf der andere Seite steht : $250 - x$ ein. Schreiben wir also die andere Gleichung :

   $$\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}(250 - x) = 87,5.$$

   Jetzt haben wir eine Gleichung in einer Variabel. Wir wissen schon wie man eine Gleichung in einer Variabel löst! Gefallen Ihnen die beiden Brüche? Mir nicht. Ich will die wegschaffen. Um das zu tun, können wir die ganze Gleichung mit 100 multiplizieren :

   $$100\left(\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}(250 - x)\right) = 87,5 \times 100.$$

   Diese können wir vereinfachen :

   $$40x + 20(250 - x) = 8750.$$

   Wir können diese 20 durch multiplizieren :

   $$40x + 20 \times 250 - 20 \times x = 8750.$$

   Wir können noch weiter vereinfachen :

   $$40x - 20x + 5000 = 8750.$$

   Da $40x - 20x = 20x$ haben wir

   $$20x + 5000 = 8750.$$

Jetzt können wir 5000 von beiden Seiten subtrahieren :

$$20x + 5000 - 5000 = 8750 - 5000,$$

und wir können wieder vereinfachen :

$$20x = 3750.$$

Jetzt müssen wir nur beide Seiten durch 20 teilen :

$$20x \div 20 = 3750 \div 20.$$

Mit $20x \div 20 = x$, und $3750 \div 20 = 187,5$, haben wir herausgefunden :

$$x = 187,5.$$

Wir wollen also $187,5$ ml Vodka in unseren Black Russian.

3. Nach Sie den Wert einer Variabel gefunden haben, setzen Sie diesen Wert in die Gleichung, die Sie im Schritt 1 gefunden haben. In unserem Beispiel heisst das :

$$y = 250 - x \textbf{ setzen wir in dieser Gleichung } x = 187,5 \textbf{ also } y = 250 - 187,5.$$

Da

$$250 - 187,5 = 62,5,$$

haben wir

$$y = 62,5.$$

Sie haben also gefunden, dass um 250 ml Black Russian mit 35 % Alkohol zu mischen, brauchen Sie

1. 187,5 ml Wodka und
2. 62,5 ml Kahlua.

Hier sind noch zwei Beispiele.
Beispiel: Lösen wir das System :

$$x + y = 10$$

$$4x + 4y = 20.$$

Wie beim letzten Beispiel können wir zuerst die erste Gleichung für y lösen :

$$x + y = 10 \implies y = 10 - x.$$

Jetzt setzen wir statt y $10 - x$ in die zweite Gleichung :

$$4x + 4(10 - x) = 20.$$

Wir können diese vereinfachen :

$$4x + 40 - 4x = 20.$$

Bemerken Sie irgendwas komisches? Wir haben auf der linken Seite $4x + 40 - 4x$ und diese ist gleich 40. Dementsprechend kommen wir zu der Gleichung :

$$40 = 20.$$

Das kann nicht sein! Was bedeutet dies?

> *In diesem Beispiel gibt es keine Lösungen.*

Hier ist ein anderes Beispiel.
Beispiel: Lösen wir das System :

$$x + y = 10$$

$$4x + 4y = 40.$$

Wie eben können wir zuerst die erste Gleichung für y lösen :

$$x + y = 10 \implies y = 10 - x.$$

Jetzt setzen wir statt y $10 - x$ in die zweite Gleichung :

$$4x + 4(10 - x) = 40.$$

Wir können diese vereinfachen :

$$4x + 40 - 4x = 40.$$

Dementsprechend kommen wir zu der Gleichung :

$$40 = 40.$$

Diese Gleichung gilt immer! Was bedeutet dieses Phänomen?

> *In diesem Beispiel ist jedes Paar (x, y) wobei $y = 10 - x$ eine Lösung des Gleichungssystems.*

ist. In diesem Beispiel können wir wie im letzten Kapitel alle Lösungen zeichnen. Die Lösungen sind die Paare (x, y) wobei

$$y = 10 - x.$$

Wir haben also folgendes erfahren :

1. Für eine Gleichung in einer Variabel gibt es eine eindeutige Lösung der Gleichung.

2. Für eine Gleichung in zwei Variabeln gibt es viele Lösungen (das heisst unendlich viele!)

3. Für zwei Gleichungen in zwei Variabeln folgendes passieren können :

   (a) Es gibt eine eindeutige Lösung.

   (b) Es gibt keine Lösung.

   (c) Es gibt unendlich viele Lösungen (eine ganze Leine Lösungen wie im letzten Beispiel).

Man kann für jedes System von linearen Gleichungen in mehreren Variabeln entscheiden ob es eine Lösung gibt und falls ja, ob es nur eine gibt, oder ob es mehrere gibt und wie man alle Lösungen darstellen kann (wie mit einer Gleichung in zwei Variabeln im letzten Kapitel). Bitte erschrecken Sie nicht, wenn es mehr als zwei Variabeln gibt. Das Prinzip ist immer dasselbe : für eine Variabel, für zwei Variabeln, sowie für drei und mehr Variabeln. Nur wenn es unendlich viele Variabeln gibt, können Sie sich erschrecken. Man kann die Lösungen am besten mithilfe einer Matrix darstellen.

5.2 Was ist die Matrix?

Fangen wir nochmal mit einem Beispiel an. Sie sind Sportler und Sie brauchen für Ihr Training den perfekten Eiweiss-Shake. Der Shake soll 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker, und insgesamt 500 Gramm sein. Die Zutaten, die Sie zusammen mischen werden sind : Milch, Eiweisspulver, frische Bananen und Erdbeeren. Diese Zutaten haben folgend Nährwerte :

1. Milch hat 3 g Eiweiss pro 100 Gramm, 5 g Zucker, und 42 kCal.

2. Frische Bananen haben 89 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 12 g Zucker.

3. Eiweisspulver hat 401 kCal pro 100 Gramm, 31 g Eiweiss, und 0 g Zucker.

4. Erdbeeren haben 32 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 5 g Zucker.

Wie viel Gramm sollen Sie von jeder Zutat zusammenmischen?

Der erste Schritt ist immer : das Problem zu analysieren und das Gleichungssystem erfinden. Sie können genau dasselbe mit 3, 4, 5, oder Tausenden von Variabeln tun. Das Prinzip ist immer dasselbe.

Erst definieren wir die Variabel : m ist die Menge Milch in Gramm, b ist die Menge Bananen in Gramm, p ist die Menge Eiweisspulver in Grams, und s ist die Menge Erdbeeren in Gramm. Zuerst berechnen wir die kCal :

$$42 * \frac{m}{100} + 89 * \frac{b}{100} + 401 * \frac{p}{100} + 32 * \frac{s}{100} = 400.$$

Vielleicht fragen Sie sich warum wir immer durch 100 geteilt haben? Der Grund dafür ist : Milch hat 42 kCal pro 100 Grams, was heisst m Gramm Milch hat

$$42 * \frac{m}{100}$$

kCal. Jetzt berechnen wir den Eiweiss :

$$3 * \frac{m}{100} + 1 * \frac{b}{100} + 31 * \frac{p}{100} + 1 * \frac{s}{100} = 25.$$

Jetzt berechnen wir den Zucker :

$$5 * \frac{m}{100} + 12 * \frac{b}{100} + 5 * \frac{s}{100} = 20.$$

Als letztes berechnen wir die ganze Menge :

$$m + b + p + s = 500.$$

Das Gleichungssystem ist dementsprechend :

$$\begin{gathered} 42 * \frac{m}{100} + 89 * \frac{b}{100} + 401 * \frac{p}{100} + 32 * \frac{s}{100} = 400. \\ 3 * \frac{m}{100} + 1 * \frac{b}{100} + 31 * \frac{p}{100} + 1 * \frac{s}{100} = 25. \\ 5 * \frac{m}{100} + 12 * \frac{b}{100} + 5 * \frac{s}{100} = 20. \\ m + b + p + s = 500. \end{gathered}$$

Wir können dieses Gleichungssystem am besten mithilfe einer Matrix verstehen . Mit einer Matrix können wir das Gleichungssystem ähnlich wie eine Gleichung in einer Variabel schreiben :

$$MX = B.$$

In diesem Beispiel ist M die Matrix

X ist die Tabelle Variabeln :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

B ist die Tabelle der rechten Seiten (Zahlen):

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Wie multipliziert man M mit X? Dafür brauchen wir einige Definitionen.

Definition 5.2.1. *Eine Matrix ist eine bestimmte Tabelle von Zahlen oder Variabeln. Eine $n \times m$ Matrix hat genau n Zeilen und m Spalten. Eine $n \times m$ Matrix M kann nur mit einer Matrix mit m Zeilen auf der rechten Seite multipliziert werden. Falls N eine $m \times k$ Matrix ist, dann ist das Ergebnis $M \times N$ eine $n \times k$ Matrix. Eine $n \times m$ Matrix M kann nur mit einer Matrix mit n Spalten auf der rechten Seiten multipliziert werden und falls K eine $j \times n$ Matrix ist, dann ist das Ergebnis $K \times M$ eine $j \times m$ Matrix.*

Sehr wichtig zu merken ist : Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ. Um Matrix-Multiplikation kennen zu lernen, führen wir einige Beispiele durch. Fangen wir an mit einem Sonderfall. Matrizen mit nur einer Spalte nennt man ein Spalten-Vektor und Matrizen mit nur einer Zeile nennt man ein Zeilen-Vektor. Nach der Definition können wir nur :

> *Ein $1 \times n$ Zeilen-Vektor mit einem $n \times 1$ Spalten-Vektor auf der rechten Seite multiplizieren.*

Was wird das Ergebnis? Nach der Definition ist das Ergebnis eine 1×1 Matrix. Machen wir einige Beispiele.

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
Matrix-Multiplikation folgt derselben Regel wie einige asiatische Schriften : links-rechts und oben-unten. Ich stelle mir vor, dass die Matrix auf der linken Seite die Matrix auf der rechten Seite mit einer Waffe beschiesst : erst schiesst die 1 auf 1 aber es klappt nicht. Daneben! Dann versucht sie nochmal : die 2 schiesst auf die 2. Es klappt leider auch nicht. Letzter Versuch : die 3 schiesst auf die 3. Das Ergebnis ist :
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 1 + 2 * 2 + 3 * 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

2. Noch ein Beispiel
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$
Wie eben schiessen wir mit der linken Matrix auf die rechte Matrix. Das heisst erst schiesst die 1 auf die 5 und danach schiesst die -1 auf die 7 und das Ergebnis ist also :
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 5 + (-1) * 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

Jetzt machen wir einige Beispiele in denen die Matrix auf der linken Seite mehr als eine Spalte hat.

1. In diesem Fall ist M die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat 2 Zeilen sowie 2 Spalten. Wir können diese Matrix mit Matrizen mit 2 Zeilen multiplizieren. Mit welchen der folgenden können wir M auf der rechten Seite multiplizieren?

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Sie müssen nur die Spalten zählen. Die erste Matrix hat 3, die zweite hat auch 3, und die letzte zwei Matrizen haben jeweils zwei Spalten. Dementsprechend können wir nur die letzten zwei Matrizen mit M auf der rechten Seite multiplizieren. Wie funktioniert Matrix-Multiplikation? Machen wir das Beispiel $M \times C$. Matrix-Multiplikation ist genau Zeile-Vektor mit Spalte-Vektor Multiplikation wie eben, nur mehrmals. Zuerst multipliziert man die oberste Zeile von M mit der Spalte ganz links von C:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 1 + 2 * 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}.$$

Jetzt bleiben wir bei der ersten Zeile von M und multiplizieren diese mit der nächsten Spalte links von C :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 3 + 2 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$

Diese setzen wir neben dem 9 also ist die erste Zeile des Ergebnisses :

$$\begin{bmatrix} 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Jetzt machen wir das gleiche mit der zweiten Zeile von M :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 1 + 4 * 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}.$$

Und jetzt mit der zweiten Spalte von C :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 3 + 4 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}.$$

Diese erzeugt die zweite Zeile des Ergebnisses und wir haben :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 19 & 17 \end{bmatrix}$$

2. Jetzt multiplizieren wir M mit C auf der linken Seite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Wie eben geht es von links nach rechts und von oben nach unten. Erst multiplizieren wir die erste Zeile von M mit der ersten Spalte von D:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 2 + 2 * 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$$

Jetzt multiplizieren wir die erste Zeile von M mit der zweiten Spalte von D :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 3 + 2 * 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}.$$

Multiplizieren wir jetzt die erste Zeile von M mit der letzten Spalte von D :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 4 + 2 * 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix}.$$

Wir sind jetzt mit der ersten Zeile von M fertig und wir haben die erste Zeile des Ergebnisses :

$$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Jetzt machen wir das gleiche mit der zweiten Zeile von M :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 2 + 4 * 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 3 + 4 * 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 4 + 4 * 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \end{bmatrix}$$

Wir haben dann die zweite Zeile des Ergebnisses :

$$\begin{bmatrix} 26 & 33 & 40 \end{bmatrix}$$

Dementsprechend ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 26 & 33 & 40 \end{bmatrix}$$

Allgemeiner können wir Matrix-Multiplikation so verstehen : wir schreiben R_1, R_2, ... R_m um die m Zeilen von einer Matrix M zu bezeichnen. Jede Zeile ist eine $1 \times n$ Zeile-Vektor. Wenn wir M mit einer $n \times k$ Matrix X auf der rechten Seite multiplizieren, schreiben wir die Spalte von X als $n \times 1$ Spalte-Vektoren : S_1, S_2,... S_k. Das Ergebnis

$$M \times X = \begin{bmatrix} R_1 \times S_1 & R_1 \times S_2 & \dots & R_1 \times S_k \\ R_2 \times S_1 & R_2 \times S_2 & \dots & R_2 \times S_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_m \times S_1 & R_m \times S_2 & \dots & R_m \times S_k \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis ist dementsprechend eine Matrix mit m Zeilen und k Spalten. Beschreiben wir Matrix-Multiplikation etwas genauer . Schreiben wir eine Matrix M mit n Zeilen und m Spalten so :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wir können noch kürzer schreiben :

$$M = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

Die Bedeutung von a_{ij} ist was in der i Zeile und j Spalte steht.

5.3 Aufgabe

1. Sie haben Lust einen „Black Russian" zu probieren. Sie finden aber, dass die Menge 250 ml zuviel für Sie wäre, und Sie wollen die Mischung etwas schwächer haben. Wie viel Wodka und wie viel Kahlua sollen Sie anwenden, um einen 100 mL Black Russian mit 25 % Alkohol zu machen?

2. Was sind die Lösungen des Gleichungssystems :

$$x - 2y = 3$$

$$6y - 3x = -9$$

?

3. Was sind die Lösungen des Gleichungssystems :

$$x - 2y = 7$$

$$6y - 3x = 14$$

?

4. Was sind die Lösungen des Gleichungssystems :

$$x - 2y = 3$$

$$6x - 3y = 14$$

?

5. Berechnen Sie das Produkt :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Berechnen Sie das Produkt :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Berechnen Sie das Produkt :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

8. Ihr Freund ist Sportler und er mag keine Bananen. Er will ein Eiweiss-Shake mit 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker, und insgesamt 500 Gramm nur aus Milch, Eiweisspulver, und Erdbeeren. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem dafür und danach schreiben Sie das System als das Produkt einer Matrix mit einem Spalten-Vektor der Variabeln.

   (a) Milch hat 3 g Eiweiss pro 100 Gramm, 5g Zucker, und 42 kCal.

   (b) Eiweisspulver hat 401 kCal pro 100 Gramm, 31 g Eiweiss, und 0 g Zucker.

   (c) Erdbeeren haben 32 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 5 g Zucker.

9. Sie haben gerade “The Big Lebowski” gesehen und Sie haben Lust auf einen ,,White Russian” (wie “The Dude”). In einen White Russian kommt auch Milch. Sie möchten einen 200ml White Russian machen der 25 % Alkohol hat. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem dafür und danach schreiben Sie das System als das Produkt einer Matrix mit einem Spalten-Vektor der Variabeln.

10. Sie haben gerade “Sex and the City” gesehen und Sie haben Lust auf einen ,,Cosmopolitan.” Ein Cosmo enthält Cranberrysaft, Wodka, und Triple Sec. Sie möchten genau 200 mL haben und Sie möchten dass es weder zu stark, noch zu süß ist. Dementsprechend wollen Sie 25% Alkohol und 20 % Zucker haben. Triple Sec enthält 40 % Alkohol und 25 % Zucker; Cranberrysaft enthält 20 % Zucker. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem dafür und danach schreiben Sie das System als das Produkt einer Matrix mit einem Spalten-Vektor der Variabeln.

Kapitel 6

Systeme linearer Gleichungen II : Die Matrix gelöst

Sie haben bereits den Teil eines wichtiges Prinzips gesehen:

> **Prinzip:** *Es kann nur eine eindeutige Lösung geben wenn die Anzahl Gleichungen grösser oder gleich der Anzahl Variablen ist. Wenn man mehr Variablen als Gleichungen hat, dann gibt es auch unendlich viele andere Lösungen, wenn es eine Lösung gibt.*

Um das **Prinzip** zu verstehen, können Sie sich vorstellen, dass jede Variable ein verspielter Hund ist. Jede Variable kann in eine Richtung entweder vorwärts oder ruckwärts (wie auf seinem eigenem Zahlenstrahl) rennen. Nur mit einer Gleichung können Sie genau eine Variable einschränken. Entweder tut die Gleichung nichts oder die Gleichung ist wie eine Einschränkung in zwei Richtungen, wie eine Leine. Das heisst, dass wenn Sie alle Variablen einschränken wollen, damit sie nicht weg rennen können, brauchen Sie mindestens genauso viele Gleichungen, wie Variablen. Eine eindeutige Lösung ist, wenn alle Variablen eingeschränkt sind. Dementsprechend braucht man mindestens so viele Gleichungen wie Variablen, damit es eine eindeutige Lösung der Gleichungen gibt.

6.1 Die Identiätsmatrix : Das neutrale Element für Matrix-Multiplikation

Was passiert wenn Sie eine 3×3 Matrix M mit der folgenden Matrix auf der linken Seite multiplizieren :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Schreiben wir :

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Zuerst betrachten wir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = a.$$

Danach betrachten wir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} = b,$$

sowie :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = c.$$

Dementsprechend ist die erste Zeile des Produkts

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}.$$

Als nächstes betrachten wir die zweite Zeile des Produkts. Diese vergleichen wir mit der zweiten Zeile der linken Matrix :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = d.$$

Danach betrachten wir :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} = e,$$

sowie :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = f.$$

Dementsprechend ist die zweite Zeile des Produkts

$$\begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}.$$

Was denken Sie passiert wenn wir die dritte Zeile betrachten? Zuerst :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = g.$$

Danach haben wir :

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}b \\ e \\ h\end{bmatrix} = h,$$

sowie :

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}c \\ f \\ i\end{bmatrix} = i.$$

Dementsprechend ist die dritte Zeile des Produkts :

$$\begin{bmatrix}g & h & i\end{bmatrix}.$$

Wir haben betrachtet :

$$I \times M = M.$$

Dieses Phänomen gilt immer.

Aufgabe : Berechnen Sie

$$M \times I.$$

Dieses Beispiel führt uns zum folgenden Beispiel.

Definition 6.1.1. *Es sei I eine $n \times n$ Matrix sodass in der k^{te} Zeile, das k^{te} Element gleich 1 ist und alle anderen Elemente der Zeile gleich 0 sind. Dann gilt für jede Matrix M mit n Zeilen und m Spalten :*

$$I \times M = M.$$

Für jede Matrix M mit m Spalten und n Zeilen gilt :

$$M \times I = M.$$

Die Matrix I nennt man die Identitätsmatrix. Sie ist das neutrale Element für Matrix-Multiplikation.

Die Identitätsmatrix sieht so aus : auf der Diagonale ist immer 1 und alles andere ist immer 0.

Nehmen wir an, dass wir ein Gleichungssystem haben :

$$MX = B,$$

wobei

$$X = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n\end{bmatrix},$$

$$M = I,$$

und

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Was bedeutet dieses System? Da $M = I$, ist (nach der Definition I)

$$MX = X.$$

Das heisst, dass es eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems gibt und diese ist

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_1, \dots x_n = b_n,$$

was wir auch so schreiben können

$$x_k = b_k, \quad \text{für jede} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ich freue mich wenn ich so ein Gleichungssystem habe, weil es schon für mich gelöst wurde! Was ist Ihre Meinung? Wir wollen jedes Gleichungssystem als ein Gleichungssystem :

$$IX = B \implies X = B$$

schreiben. Dafür brauchen wir die Inverse-Matrix.

6.2 Die Inverse-Matrix

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass wir jedes lineare Gleichungssystem mit n Variablen und m Gleichungen so schreiben können :

$$MX = B,$$

wobei M eine $m \times n$ Matrix ist, X ein n-Spalten-Vektor ist, und B ein m-Spalten-Vektor ist.

Was wollen Sie tun, um das Gleichungssystem zu lösen?

Ich will durch M teilen. Wie können wir durch eine Matrix teilen?

Definition 6.2.1. *Es sei M eine $n \times n$ Matrix. Falls es eine $n \times n$ Matrix N gibt, sodass gilt :*

$$MN = NM = I,$$

dann ist N die Inverse-Matrix zu M und wir schreiben :

$$N = M^{-1}.$$

Falls M genau so viel Spalten wie Zeilen hat und falls es eine M^{-1} gibt, dann gilt :

$$MX = B \implies M^{-1}MX = M^{-1}B.$$

Wie immer können wir eine Gleichung umschreiben nur genau dann, wenn wir genau dasselbe auf beiden Seiten tun. In diesem Fall multiplizieren wir auf der linken Seite mit M^{-1} auf beiden Seiten der Gleichung. Nach der Definition ist :

$$M^{-1}M = I$$

und

$$IX = X.$$

Dementsprechend haben wir :

$$X = M^{-1}B.$$

Gelöst! Geschafft! Wir müssen nur verstehen, wie wir diese berechnen können. Dafür gibt es die Zeilen-Operation.

6.2.1 Die Zeilen-Operationen

Nur die folgenden Operationen sind uns erlaubt :

1. Wir können eine Zeile R mit einer anderen Zeile R' vertauschen. Zum Beispiel :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

2. Wir können eine Zeile R mit einer Zahl multiplizieren :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5a & 5b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

3. Wir können eine Zeile R mit einer anderen Zeile addieren :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Um ein Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen zu lösen schreiben wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} M & || & B \end{bmatrix}$$

Dann machen wir die erlaubten Zeilen-Operationen mit den ganzen Zeilen bis wir auf der linken Seite eine der folgenden haben :

1. Die Identität steht auf der linken Seite der Trennung $||$;

2. Eine oder mehrere Zeilen auf der linken Seite der Trennung || sind komplett null und folgendes gilt :

   (a) In jeder Zeile die nicht komplett null ist,ist das erste Element das ungleich null ist, eine 1, die wir eine führende eins nennen.

   (b) In jeder Spalte die eine führende eins enthält, sind alle anderen Elemente der Spalte null.

   (c) Die führende eins geht von links nach rechts. Das heisst : in zwei Zeilen die nebeneinander sind und die nicht komplett null sind, ist die führende eins der unteren Zeile weiter rechts als die führende eins der oberen Zeile.

   (d) Die Zeilen, die komplett null sind, sind die untersten Zeilen der Matrix.

Im Fall 1 gibt es eine eindeutige Lösung, die Sie in der Matrix nach der Trennung || lesen können. Im Fall 2 gibt es zwei Möglichkeiten : wenn auf der linken Seite der Trennung eine Zeile null ist aber auf der rechten Seite der Trennung eine Zahl die ungleich null steht, dann gibt es keine Lösungen des Systems. Wir nennen so eine Zeile eine schlechte Zeile. Falls es keine schlechte Zeile gibt, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

Am besten machen Sie viele, viele Beispiele damit Sie sich mit den Regeln und mit diesem Prozess wohl fühlen. Beispiele werden an der Tafel in der Vorlesung gemacht... Jetzt können Sie jedes lineare Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen lösen! Der letzte Schritt ist lineare Gleichungssysteme mit n Variablen und m Gleichungen zu lösen. Dann können Sie richtig stolz sein.

6.3 Die Pseudo-Inverse-Matrix : RREF

Nehmen wir an, dass Sie ein lineares Gleichungssystem lösen wollen : es gibt n Variablen und m Gleichungen. Das System sieht so aus :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sie können dieses System mit der Matrix

$$M = [a_{ij}]$$

darstellen. Die Hauptfrage ist : wann gibt es eine Lösung und wenn ja, wie viele gibt es? Falls $m \neq n$ dann gibt es keine Inverse-Matrix. Statt dessen gibt es immer eine RREF.

6.3.1 RREF hat die Matrix gelöst!

Was bedeutet RREF? Es stammt aus dem Englischen :

Reduced Row Echelon Form

Wie machen wir das RREF einer Matrix? Wir verfahren genau wie mit einer $n \times n$ Matrix : die Zeilen-Operationen. Wir „reduzieren" immer von links nach rechts. Wir machen die Zeile Operationen bis zum folgenden Ziel :

1. In jeder Zeile die nicht komplett null ist, ist das erste Element das ungleich null ist, eine 1, die wir eine führende eins nennen.

2. In jeder Spalte die eine führende eins enthält, sind alle andere Elemente der Spalte null.

3. Die führende eins geht von links nach rechts. Das heisst : in zwei Zeilen die nebeneinander sind und die nicht komplett null sind ist die führende eins der unteren Zeile weiter nach rechts als der führende eins der oberen Zeile.

4. Die Zeilen die komplett null sind die untersten Zeilen der Matrix.

Satz 6.3.1. *Es sei M eine Matrix. Mit den Zeilen-Operationen gibt es genau eine Matrix, die die oberen 4 Bedingungen erfüllt. Diese nennen wir das RREF von M.*

Wir brauchen jetzt nur noch eine Definition damit das RREF uns die Lösungen gibt.

Definition 6.3.2. *Die Anzahl Zeilen des RREF, die ungleich null sind, sind der Rang der Matrix M. Jede Spalte mit einer führenden eins nennen wir eine geführte Spalte. Jede Spalte ohne eine führende eins nennen wir eine freie Spalte.*

Jetzt kommen wir zum Ziel.

Satz 6.3.3. *Es sei M die Matrix für das lineare Gleichungssystem und B der Spalten-Vektor auf der rechten Seite des Systems. (Das heisst, dass B ein Spalten-Vektor nur Zahlen und keine Variablen enthält.) Wenn Sie die Zeilen-Operationen mit der folgenden Matrix durchführen :*

$$\begin{bmatrix} M & || & B \end{bmatrix}$$

bis das RREF-M auf der linken Seite steht, dann gilt :

1. *Falls es eine schlechte Zeile gibt, dann gibt es keine Lösung.*

2. *Falls es keine schlechte Zeile gibt, dann gibt es eine eindeutige Lösung genau dann, wenn der Rang des RREF gleich der Anzahl Variablen ist. Das heisst, dass es eine eindeutige Lösung gibt, genau dann wenn es keine schlechte Zeile gibt, und jede Spalte geführt ist.*

3. *Falls es keine schlechte Zeile gibt und der Rang der RREF kleiner als die Anzahl Variablen ist, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Das heisst, dass es unendlich viele Lösungen gibt genau dann wenn es keine schlechte Zeile gibt und es einige freie Spalten gibt.*

Machen wir einige Beispiele an der Tafel :

1. Welche der folgenden sind RREF?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Berechnen Sie das RREF der folgenden Matrizen :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Für das Gleichungssystem berechnen Sie das RREF der Matrix M mit B getrennt auf der rechten Seite :

$$\begin{bmatrix} M & || & B \end{bmatrix}$$

und entscheiden Sie ob folgende Systeme eine eindeutige Lösung haben (was ist sie?), keine Lösungen haben, oder unendlich viele Lösungen haben (was sind sie?)

(a)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da jede Spalte entweder frei oder geführt ist, gilt immer :

Die Anzahl freier Spalten plus die Anzahl geführter Spalten ist gleich der Anzahl Spalten n.

Wir können jetzt zwischen zwei Fällen unterscheiden : ist die Matrix gross und dünn oder ist sie kurz und dick? Beim ersten Fall gibt es mehre Gleichungen als Variable, also ist es möglich, dass alle Variablen von den Gleichungen eingeschränkt werden können. Sie können sich in diesem Fall vorstellen, dass die Matrix wie eine grosse, dünne, strenge Frau ist, die mit n Hunden an m Leinen spaziert. Das ist aber nur der erste Augenblick : es kann sein, dass die Frau nur streng aussieht und dass einige Gleichungen nichts tun, (wie diese Leinen, die nicht fest sind) und in diesem Fall kann es sein, dass die Variable, noch spielen können und es unendlich viele Lösungen gibt. Es ist auch möglich, dass die Variable zu eng eingeschränkt sind und deswegen sterben und dies bedeutet, dass es keine Lösung gibt. Um diese herauszufinden brauchen wir das RREF. Das RREF erzählt die Persönlichkeit der Matrix.

Beim zweiten Fall gibt es mehr Variablen als Gleichungen, also ist es unmöglich dass sie alle eingeschränkt werden können. In diesem Fall gibt es nur zwei Möglichkeiten : entweder gibt es unendlich viele Lösungen, oder es gibt keine. In diesem Fall haben die Variablen-Hunde einen kurzen dicken Führer der entweder alles erlaubt oder gar nichts erlaubt. Um dies herauszufinden brauchen wir auch das RREF.

Nach den Regeln der Matrix-Multiplikation passt jede Spalte zu genau einer Variable. Eine freie Spalte bedeutet, dass die Variable frei ist und eine geführte Spalte bedeutet, dass die Variable geführt ist. Wenn wir ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und m Gleichungen gelöst haben, dann kann die Menge aller Lösungen als Graph einer linearen Funktion dargestellt werden, mit Eingabe der Elemente $\mathbb{R}^k$, wobei k die Anzahl freie Spalte ist, mit Ausgabe der Elemente von $\mathbb{R}^{n-k}$. Dieses können Sie am besten mit Beispielen lernen. Diese werden an der Tafel durchgeführt!

Bemerkung 6.3.4. *In der Zukunft können Sie einen Computer anwenden um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Sie müssen aber wissen wie Sie die Information eingeben, das heisst, was ist M sowie B? Danach kann der Computer die Zeilen-Operationen durchführen. Am Ende müssen Sie verstehen was die Ausgabe des Computers bedeutet. Dementsprechend ist das Material dieses Kapitels nützlich für Sie. Der Computer kann Ihnen leider nicht erklären wie Sie ein lineares Gleichungssystem eingeben, damit er es lösen kann und er kann auch nicht erklären, was seine Ausgabe bedeutet. Nur Sie, ein kluger Mensch, konnen das.*

6.4 Aufgabe

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem :

$$x - z = 3$$

$$x + 2y = 4$$

$$2y + 3z = 8.$$

2. Ihr Assistent hat das folgende lineare Gleichungssystem gelöst :

$$x - y = 10$$

$$2x - 2y = 200.$$

Er erzählt Ihnen, dass es eine eindeutige Lösung gibt. Hat er recht? Warum oder warum nicht?

3. Berechnen Sie das RREF folgender Matrix :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Berechnen Sie das RREF folgender Matrix :

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Wie viele Lösungen hat folgende Gleichungssystem? Berechnen Sie alle Lösungen.

$$x - 3y + z = 10$$

$$3x - y + z = -1$$

6. * Sie sind Sportler und Sie brauchen für Ihr Training den perfekten Eiweiss-Shake. Der Shake soll 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker enthalten und insgesamt 500 Gramm wiegen. Die Zutaten die Sie zusammenmischen werden sind : Milch, Eiweisspulver, frische Bananen und Erdbeeren. Diese Zutaten haben folgende Nährwerte :

   (a) Milch hat 3 g Eiweiss pro 100 Gramm, 5g Zucker, und 42 kCal.
   (b) Frische Bananen haben 89 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 12 g Zucker.
   (c) Eiweisspulver hat 401 kCal pro 100 Gramm, 31 g Eiweiss, und 0 g Zucker.
   (d) Erdbeeren haben 32 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 5 g Zucker.

   Wie viel Gramm sollten Sie von jeder Zutat zusammenmischen? Berechnen Sie alle Lösungen.

7. * Wie können Sie ein Eiweiss-Shake mit 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker, und insgesamt 500 Gramm nur aus Milch, Eiweiss Pulver, und Erdbeeren für Ihren Freund machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

8. * Sie haben gerade "The Big Lebowski" gesehen und Sie haben Lust auf einen ,,White Russian" (wie "The Dude"). In einen White Russian kommt auch Milch. Sie möchten ein 200ml White Russian machen der 25 % Alkohol hat. Wie können Sie das machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

9. Sie haben gerade "Sex and the City" gesehen und Sie haben Lust auf einen ,,Cosmopolitan." Ein Cosmo enthält Cranberrysaft, Wodka, und Triple Sec. Sie möchten genau 200 mL haben und Sie möchten dass es weder zu stark, noch zu süß ist. Dementsprechend wollen Sie 25% Alkohol und 20 % Zucker haben. Triple Sec enthält 40 % Alkohol und 20 % Zucker; Cranberry Saft enthält 15 % Zucker. Wie können Sie den perfekten ,,Cosmo" machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

10. Ich habe auch Lust auf einen ,,Cosmopolitan,” aber ich will meinen noch ein bisschen grösser und stärker haben. Ich möchte genau 250 mL mit 30% Alkohol und 20 % Zucker haben. Triple Sec enthält 40 % Alkohol und 20 % Zucker; Cranberry Saft enthält 15 % Zucker. Wie soll ich meinen perfekten ,,Cosmo” machen? Berechnen Sie alle Lösungen.