Die Sprache der Mathematik

Mathematische Grundlagen für Studenten der Naturwissenschaften

Dr. Julie Rowlett

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Warum und wie?

Stellen Sie sich die Frage,

> *Warum muss ich Mathematik lernen?*

1.1 Warum?

Die Mathematik ist eine universelle Sprache. In der Naturwissenschaft werden viele wichtige Ideen in der mathematischen Sprache ausgedrückt. Dementsprechend ist es wichtig für Sie, diese Sprache zu beherrschen. Zum Beispiel, wie schnell eine Population (von Menschen, Bakterien oder Tieren) wächst kann man am Besten mit einer mathematischen Gleichung beschreiben. Es gibt auch Gleichungen die beispielsweise Erosion besser als Wörter beschreiben können. Es gibt hunderte Beispiele in den Naturwissenschaften von Ideen und natürlichen Prozessen, die am besten in der Sprache der Mathematik ausgedrückt werden können. Der erste Grund, warum Sie Mathematik lernen müssen, ist damit Sie die "universelle" Sprache der Mathematik sprechen und verstehen können.

Vielleicht denken Sie, dass Mathematik die Sie irgendwann brauchen werden, mit einem Taschenrechner oder Computer gemacht werden kann, und dass Sie dementsprechend keine Mathematik lernen müssen. Das stimmt nicht. Sie können etwas sehr wichtiges tun, was kein Taschenrechner oder Computer tun kann: Sie können denken. Sie besitzen noch irgendwas, was kein Taschenrechner oder Computer hat: Sie haben Gefühle. Durch dieses Buch werden Sie Ihre mathematisches Gefühl entwickeln. Sie werden lernen mathematisch zu denken und dadurch schaffen Sie mathematische Grundlagen die für Ihre Zukunft als Naturwissenschaftler. Die Mathematik in diesem Buch ist genau für Sie ausgewählt.

1.2 Wie? Der Gehirnsport

Vielleicht denken Sie, "Ja, ja, ich interessiere mich immer noch überhaupt nicht für die Mathematik. Ich werde bis zur letzten Woche vor der Klausur warten und dann nur so viel lernen damit ich die Klausur bestehen kann."Das wäre eine Möglichkeit. Aber mit dieser

Methode sind die Chancen sehr schlecht, dass Sie die Klausur bestehen werden. In der Regel muss man Mathematik wie Kampfkunst (oder Sport) lernen. Wenn man durch ein Holzbrett schlagen will, muss man vorher viel üben. Sie können es ohne Übungen ausprobieren und höchstwahrscheinlich werden Sie Ihre Hand entweder zerbrechen oder zumindest sehr weh tun.

Um durch das Holz zu schlagen, braucht man Kampfkunsttechnik. Um eine mathematische Aufgabe zu lösen, braucht man Mathematiktechnik. Wie bekommt man diese Technik? Durch Übungen!

Wenn Sie also sicher sind, dass Sie Ihre mathematische Veranstaltung bestehen wollen, dann können wir zusammen arbeiten. Sie werden sehen, dass Mathematik sogar Spaß machen kann. (Sie glauben mir jetzt möglicherweise nicht, aber meiner Erfahrungen nach werden Sie Ihre Meinung ändern...)

Erfolg macht jedem Spaß. Am Anfang, sieht neue Mathematik erschreckend aus.[1] Wenn Sie aber geduldig sind und versuchen diese zu verstehen, und gut üben, kann ich Ihnen versprechen, dass Sie irgendwann alles verstehen werden. Ganz leicht. Und Sie werden erfahren, was für ein tolles Gefühl das ist! Ja, Sie haben was erschreckendes gemeistert! Der Prozess: (1) neues Material - Verwirrung, (2) Arbeit und Übungen, stur sein, dran bleiben, (3) Die Glühbirne! Und noch ein bisschen mehr üben, (4) Geschafft! Nach diesem Prozess werden Sie ein ganz tolles Erfolgsgefühl haben.

1.3 Die Stärke der reinen Mathematik

Die Mathematik ist eine Sprache, die auf fundamentalen Ideen begründet ist. Wie jede Sprache hat sie Wörter.

Definition 1.3.1. *Ein mathematischer Wort ist eine mathematische Idee mit einer ganz genauen technischen Definition.*

Alles was wir in der Mathematik diskutieren hat eine Definition. Der erste Schritt wenn man Mathematik lernt, ist die Definitionen auswendig zu lernen. Wie bei jeder Sprache müssen Sie zuerst den Wortschatz auswendig lernen! Es reicht nicht wenn Sie eine Definition vage lernen. Sie brauchen ihre ganz genaue Bedeutung. Die Mathematik ist aber eine Sprache der Ideen, und Sie können diese Ideen in ihren eigenen Wörtern ausdrücken. Am besten können Sie die Bedeutung eine mathematische Definition in ihrer Muttersprache verstehen. Wichtig sind nicht die Sprache in der Sie eine mathematische Definition ausdrücken, auch nicht Ihre Wortwahl, sondern nur die richtige Bedeutung.

Nachdem Sie einige mathematische Definitionen gelernt haben, können Sie mathematische Sätze lernen.

Definition 1.3.2. *Ein Satz in der Sprache der Mathematik ist ein (oder mehre) Sätze in der grammatikalischen Definition eines Satzes, der immer wahr ist.*

[1] Als Mathematikerin muss ich ständig neue Mathematik lernen, und ich denke oft am anfang, WAS?? Was soll dies darstellen?

Der Grund weshalb einen Satz immer stimmt, ist sein Beweis. Die reine Mathematik ist rein: ein Satz ist unfehlbar, er ist rein.

Jeder Satz hat Hypothese, die erfüllt werden müssen, um den Satz anwenden zu können. Kennen Sie einige mathematische Formeln? Der Grund weshalb solche Formel immer gelten ist, weil sie auf mathematischen Sätze begründen. Zum Beispiel : die Lösungen der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bei einer Gleichung die ähnlich aussieht, wie

$$ax^3 + bx + c = 0,$$

gilt die Formel nicht mehr. Die Formel gilt nur genau für Gleichungen in genau dieser Form $ax^2+bx+c = 0$. Jedes mal wenn Sie irgendeinen Satz oder mathematische Formel anwenden, sollte die Hypothese übereinstimmen. Wenn Sie eine Formel mit einem Taschenrechner oder mit einem Computer berechnen, hat der Taschenrechner oder der Computer keine Ahnung, ob die Hypothese für die Formel übereinstimmen. Nur Sie, ein Mensch mit einem Gehirn, können das tun.

1.3.1 Die Logik

In der reine Mathematik beweisen wir Sätze. Ein Satz ist eine mathematische Wahrheit. Er gilt immer und ewig. Was haben Sätze mit Ihnen zu tun, die Naturwissenschaften studieren? Sie brauchen keine Sätze beweisen zu können, aber Sie werden die anwenden müssen. Dementsprechend sind einige logische Grundlagen für Sie wichtig.

A impliziert B

Es ist gut zu wissen wann irgendwas wichtiges passieren wird. Zum Beispiel : wenn das rote Licht auf dem Monitor blinkt, wird es ein Erdbeben in 2 Stunden statt finden. Wir können dies kürzer ausdrücken : rote Licht auf dem Monitor impliziert Erdbeben in 2 Stunden. Es gibt eine Generalisierung zu diesem Prinzip: “A impliziert B.̈In diesem Fall ist “A” das rote Licht auf dem Monitor und “B” das Erdbeben in 2 Stunden.

Definition 1.3.3. *In einer Äußerung wie “A impliziert B” ist A die Hypothese und B die Folgerung. A impliziert B bedeutet genau :*

Jedes mal wenn A gilt dann muss auch B gelten.

In der Mathematik und der Logik wenden wir häufig den Pfeil der Implikation $\Longrightarrow$ an. Dieser Pfeil bedeutet : was am Ende des Pfeils steht, impliziert das, was an der Spitze des Pfeils steht. Dementsprechend hat

$$A \implies B$$

genau dieselbe Bedeutung wie “A impliziert B.”

Verbunden mit einer Äußerung wie “A impliziert B” ist ihre Umkehrung und ihre Negation.

Definition 1.3.4. *Die Umkehrung der Äußerung “A impliziert B” ist die Äußerung B impliziert A.*

Wenn wir den Pfeil anwenden, ist es leichter sich an die Definition der Umkehrung zu errinnern : die Umkehrung von $A \implies B$ ist genau

$$B \implies A.$$

Die Richtung des Pfeils wurde also umgekehrt.

Wir führen einige Beispiele an. An diesem Punkt ist es unwichtig ob die folgende Äußerungen stimmen oder nicht. Wir möchten nur ein bisschen üben, damit wir die Definitionen lernen.

1. Äußerung: falls $2+2=4$, dann ist $x=5$. Erst sollen wir diese in die Form “A impliziert B” setzen. Was ist A? In diesem Fall ist “A” die Äußerung $2+2=4$, und “B” die Äußerung $x=5$. Mit dem Pfeil können wir diese wie folgt darstellen :

$$2+2=4 \implies x=5.$$

   Um die Umkehrung zu machen, müssen wir den Pfeil einfach umkehren :

$$x=5 \implies 2+2=4.$$

   Die Umkehrung ist also in Wörter : falls $x=5$, dann ist $2+2=4$.

2. Äußerung : falls es regnet, dann wachsen die Blumen. Diese ist zwar keine mathematische Äußerung aber sie hat ebenso eine Umkehrung. Erst sollen wir A und B identifizieren. In diesem Fall ist A “es regnet” und ist B “die Blumen wachsen.”Wir können also schreiben :

$$\text{es regnet} \implies \text{die Blumen wachsen.}$$

   Die Umkehrung ist also

$$\text{die Blumen wachsen} \implies \text{es regnet.}$$

   Bei diesem Beispiel haben die Ursprungliche Äußerung und ihre Umkehrung verschiedene Bedeutungen. Allgemeiner gilt :

   > Normaleweise hat eine Äußerung und ihre Umkehrung sehr verschiedene Bedeutungen.

Die ursprungliche Äußerung ist realistisch, da Blumen Regen brauchen um zu wachsen. Die Umkehrung würde bedeuten, dass Blumen das Regnen voraussagen können, und das wäre erstaunlich! [2]

Es kann manchmal sein dass eine Äußerung und ihre Umkehrung beide gelten. Zum Beispiel :

3. Äußerung falls $2x + 3 = 1$, dann ist $x = -1$. In diesem Fall ist A $2x + 3 = 1$ und ist B $x = -1$. Mit dem Pfeil :
$$2x + 3 = 1 \implies x = -1.$$
Die Umkehrung ist also
$$x = -1 \implies 2x + 3 = 1,$$
und die Bedeutung ist: falls $x = -1$, dann ist $2x + 3 = 1$.

In dem Beispiel sind beide Äußerungen äquivalent. Dies bedeutet dass beide
$$2x + 3 = 1 \implies x = -1$$
und
$$x = -1 \implies 2x + 3 = 1,$$
was wir so schreiben können
$$2x + 3 = 1 \iff x = -1,$$
da die Implikation in beiden Richtungen gilt!

Definition 1.3.5. *Die Äußerungen A und B sind äquivalent genau dann wenn $A \implies B$ und $B \implies A$. In diesem Fall schreiben wir*
$$A \iff B.$$

Einfach ausgedrückt sind zwei Äußerungen äquivalent wenn sie dieselbe Bedeutung haben.

Manchmal ist es nicht so anschaulich ob zwei Äußerungen dieselbe Bedeutung haben. An folgenden Beispiel zu sehen
$$2x + 3 = 1 \iff x = -1,$$
sollen wir zuerst beide Richtungen bestätigen :

1. $2x + 3 = 1$ impliziert $x = -1$, und
2. $x = -1$ impliziert $2x + 3 = 1$.

Wenn eine Äußerung falsch ist, dann stimmt ihre Negation.

Definition 1.3.6. *Die Negation einer Äußerung ist die Äußerung die genau das Gegenteil bedeutet. Die Negation einer Äußerung der Form "A impliziert B" ist die Äußerung "A impliziert nicht unbedingt B."*

[2] Es gibt einige Arten von Pflanzen scheinen Regen voraussagen zu können. Erforschen Sie "the Texas Sage" und andere Pflanzen die vielleicht doch voraussagen können. Es gibt viel hoch-interessante Forschung wenn Naturwissenschaftler zusammen mit Mathematiker arbeiten.

Übungen

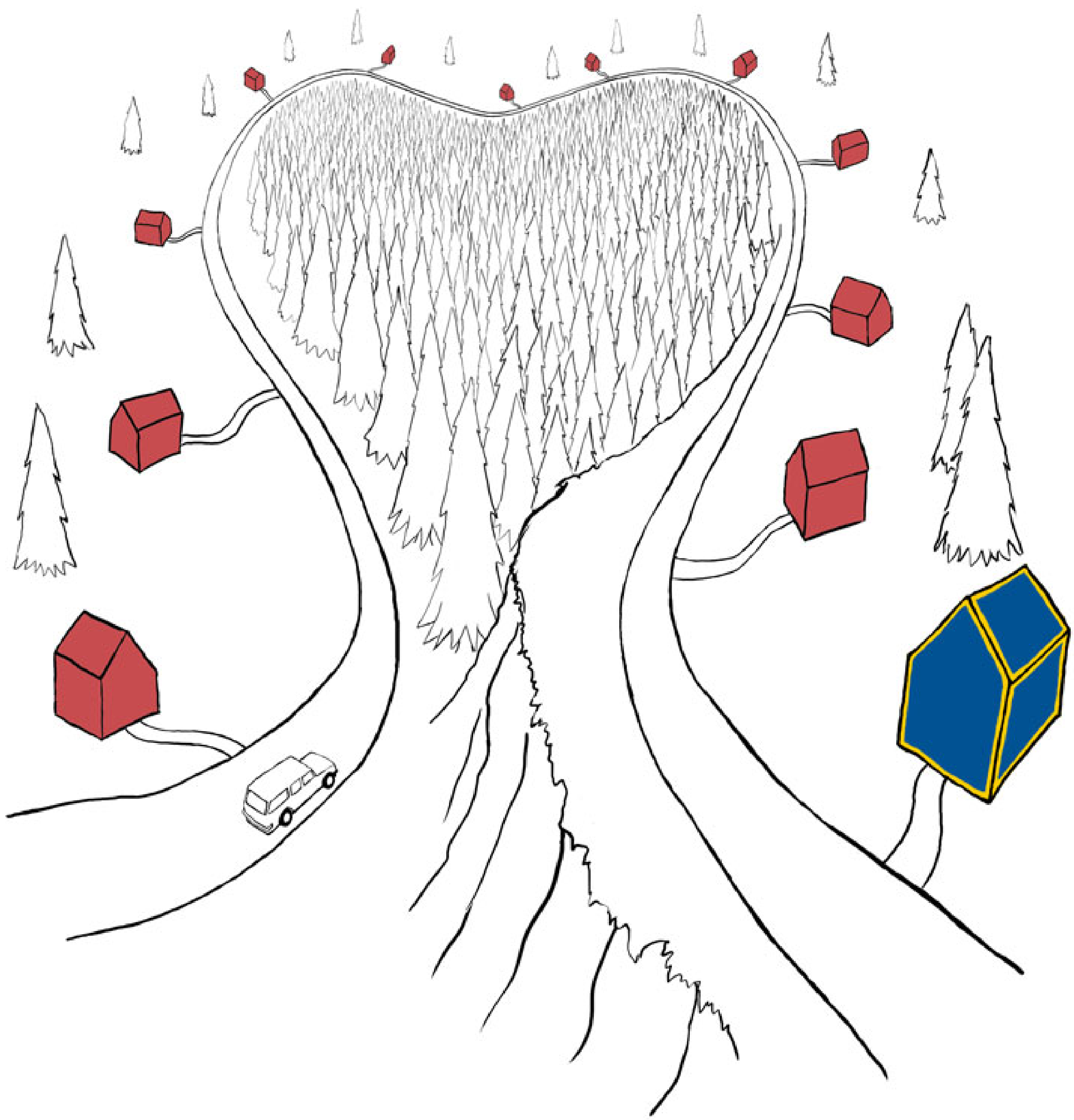
1. Äußerung : jede Zahl ist ungerade. Die Bedeutung dieser Äußerung ist dass jede Zahl ungerade sein muss. Wenn diese falsch ist, bedeutet das, dass es einige Zahlen geben kann, die nicht ungerade sind. Die Negation ist also : nicht jede Zahl ist ungerade. In diesem Fall ist die ursprungliche Äußerung falsch und die Negation richtig.

2. Äußerung : es gibt einige gerade Zahlen. Die Gegenbedeutung ist : es gibt keine gerade Zahlen. In diesem Fall ist die ursprungliche Äußerung richtig und die Negation falsch.

3. Äußerung: Jeder Deutsche isst gern Fleisch. Die Negation ist also : Nicht jeder Deutsche isst gern Fleisch. Was wichtig ist, ist die Bedeutung. Wir können dieselbe Bedeutung auch so ausdrücken : nicht unbedingt jeder Deutsche isst gern Fleisch. Dieselbe Bedeutung ist : Es kann sein, dass einige Deutsche nicht gern Fleisch essen.

Eine typische mathematische Äußerung ist : zu jede-oder für jede A gilt B. Was ist die Negation? Die Negation ist : es gibt ein A sodass B nicht gilt.

Hier ist ein Beispiel. Waren Sie mal in Schweden? Auf dem Schwedischen Land ist jedes Haus rot. Man könnte also denken, dass jedes Haus in Schweden rot ist. Wenn dies als einen mathematischer Satz bewiesen werden soll, dann muss man jedes einzelne Haus in Schweden besuchen, und wir können dies mathematisch vergleichen : wir müssen jeden Fall (Haus) übereinstimmen! Um aber zu beweisen dass die Äußerung falsch ist, und die Negation richtig ist, brauchen wir nur ein Haus das nicht rot ist!



Ein andere typische mathematische Äußerung ist : es gibt ein A sodass B gilt. Was ist die Negation? Die Negation ist : für jedes A gilt B nicht.

Die letzte logische Definition die gut zu wissen ist die Kontraposition.

Definition 1.3.7. *Die Kontraposition von einer Äußerung der Form : A impliziert B ist die Äußerung :*

nicht B impliziert nicht A.

Was bedeutet die Kontraposition? Lassen Sie sich ein bisschen Zeit um zu üblergen, und danach können Sie umblättern.

Satz 1.3.8. *“A impliziert B” gilt genau dann wenn die Kontraposition “nicht B impliziert nicht A” gilt.*

Auch Sie können den Satz beweisen!

1.4 Übungen

Sie können die Mathematik nur durch mathematische Erfahrungen lernen. Was sind “mathematische Erfahrungen?” Mathematische Übungen oder Probleme zu lösen! In der reinen Mathematik lösen wir mathematische Probleme die noch nie gelöst worden sind. Es ist nicht immer so leicht. Wir arbeiten Stunden, Tage, Wochen, Monate und sogar Jahre an einem Problem. Jeden Tag versuchen wir verschiedene Idee, lösen Gleichungen, betrachten Beispiele, und die meiste Zeit wird das ganze in den Mulleimer geworfen. Es kann vielleicht zwecklos erscheinen, ist es aber nicht. Die Zeit wenn wir das Problem nicht lösen können aber dran bleiben genau die Zeit und die Erfahrung, die wir brauchen um unser Ziel zu erreichen. Wenn man lange daran arbeitet, kämpft und endlich die Lösung findet, ist das Gefühl unbeschreiblich. Jeder mag Erfolg, aber Erfolg nach einem langen Kampf ist noch besser. Wenn Sie versuchen die Übungsaufgabe zu lösen und es scheint, dass alles einfach in den Mülleimer geht - dran bleiben! Geben Sie nicht auf! Sie können das, und Sie sind auch nicht allein. Es gibt Mathematiker auf der ganzen Welt die denselben Kampf durchmachen, Sie sind in guter Begleitung.

1. Was ist die Umkehrung : falls das Produkt von zwei ganzen Zahlen positiv ist, dann sind beide Zahlen positiv.
2. Was ist die Kontraposition?
3. Was ist die Negation?
4. Was stimmt : die Äußerung, ihre Umkehrung, die Kontraposition, oder die Negation?
5. Was ist die Negation : jede ungerade ganze Zahl kann durch 2 geteilt werden.
6. Was ist die Negation : Düsseldorf ist immer wolkig.
7. Was ist die Umkehrung : falls die Summe von zwei ganze Zahlen ungerade ist, dann ist eine von den beiden ungerade.
8. Was ist die Kontraposition : falls es regnet, dann regnet es wie Wasser aus einem Eimer.
9. Forschen Sie in der Logik : was bedeuten $\forall$, $\exists$ und $\exists!$?
10. Beweisen Sie den Kontrapositionssatz.
11. Sie haben eine Berechnung mit einem Computer durchgeführt, um die Konzentration einer Salzwasserlösung zu berechnen. Das Ergebnis ist 117 Prozent Salz. Kann dass sein? Warum oder warum nicht?

12. Man nennt eine Zahl die grösser als 0 ist positiv, und eine Zahl die kleiner als 0 ist wird negativ genannt. Was ist der Unterschied zwischen einer positiven Zahl und einer nicht-negativen Zahl?

13. * Sie haben zwölf Proben Erde genommen. Sie wissen, dass eine davon ein sehr kleines Bisschen schwerer oder leichter ist. Sie brauchen diese Probe, denn wenn sie schwerer ist, wissen sie dass sie eine höhere Konzentration Blei hat, und wenn sie leichter ist, wissen sie, dass sie eine niedrigere Konzentration Blei hat. Sie haben vier Apothekerwaagen die perfekt kalibriert sind, aber sobald Sie sie einmal anwenden, nicht mehr kalibriert werden können, ohne in das Labor gehen zu müssen, und Sie sind unter Zeitdruck. Wie können Sie herausfinden, welche Probe die schwerere oder leichtere ist?

14. * Sie untersuchen ein Bakterium das zwischen zwei Typen, Typ A und Typ B, mutieren kann. Wenn Sie die Bakterien in eine bestimmte Lösung tun, werden alle die Typ A sind sich in Typ B verändern, und alle die Typ B sind sich in Typ A verändern. Sie brauchen für Ihre Experiment zwei Proben mit demselben Anteil von Typ A in jeder Probe (egal genau welcher Anteil). Leider hat Ihr Assistent die Aufgabe vermasselt. Der Assistent sagt Ihnen, dass es insgesamt 100 Bakterien gibt, und dass insgesamt 50 davon Typ A sind. Der Assistent gibt Ihnen zwei Proben mit jeweils 50 Bakterien aber die Bakterien sind alle vermischt, und Sie haben keine Möglichkeit mehr zwischen Typ A und Typ B zu unterscheiden. Die Bakterien sind sehr teuer, und deswegen möchten Sie sie nicht wegwerfen, sondern Ihr Experiment durchführen. Wie können Sie zwei Proben mit demselben Prozentanteil von Typ A machen?

15. * Sie sind Biologe oder Geologe und Sie arbeiten bei der Polizei, wie im Fernsehen (CSI, Rizzoli und Isles, Bones...). Die Polizei hat zwei mögliche Täter festgenommen, die Zwillinge sind. Einer davon ist ein ehrlicher Mensch, und der andere davon ist ein Lügner und ein Dieb. Ein Kind wurde entführt, und die beiden Zwillinge wissen wo das Kind zu finden ist. Die Polizei hat schon herausgefunden, dass das Kind entweder im Novotel oder im Ibis festgehalten wird. Sie können sicher sein, dass der ehrliche Zwillinge immer die Wahrheit sagt, und der Lügner immer lügt. Wie können Sie mit nur eine Frage, deren Antwort entweder ja oder nein ist, herausfinden wo das Kind ist?

1.5 Hinweise und Beispiele

Sie haben vielleicht nicht so viel Interesse an Mathematik, aber Sie wollen möglicherweise eine gute Note in der Klausur. Da Sie die Klausur allein schreiben werden, sollten Sie immer zuerst die Aufgaben allein versuchen, um dafür bereit zu sein. Es kann sein, dass Sie irgendwann einfach nicht weiter kommen können, und dass Sie einen Hinweis verdient haben. Wie können Sie wissen, ob Sie einen Hinweis verdient haben?

1.5.1 Die Hinweisregel

Sie haben einen Hinweis verdient wenn :

> *Sie lang genug an der Aufgabe gearbeitet haben, damit Sie die Aufgabe und jede mathematische Definition die für die Aufgabe relevant ist auswendig können.*

Wenn Sie einen Hinweis verdient haben, soll Ihrer Lehrer oder Professor Ihnen helfen, bis Sie die Aufgabe lösen können. Sie haben es doch verdient!

- Für eine Äußerung der Form "falls A dann B," können wir diese so schreiben

  $$A \implies B.$$

  Die Umkehrung kehrt die Richtung des Pfeils um. Um die Kontraposition zu machen, machen wir zuerst die Negation von A sowie B. Dann lautet die Kontraposition : nicht B impliziert nicht A.

- Was bedeutet 100 Prozent?

  Bemerkung 1.5.1. Sie sind ein Mensch und Sie können denken. Wenn Sie einen Taschenrechner anwenden um eine Rechnung durchzuführen können nur Sie merken, ob die Antwort überhaupt möglich ist. Nennen wir diesen Gedankprozess, "Der Bullshit Detektor.Taschenrechner haben keinen Bullshit-Detektor, aber Sie schon! Falls Sie einen Tippfehler gemacht haben, als Sie die Rechnung eingaben, können Sie nachher den Fehler bemerken und korrigieren, wenn Sie sich nur ein bisschen Zeit nehmen, um mathematisch zu denken, und Ihren Bullshit-Detector anzuwenden.

- Was unterscheidet positiv und negativ? Welche Zahl ist nicht positiv und nicht negativ?

- Sie haben zwölf Proben und vier Waagen. Anstatt mit 6 auf jeder Seite, probieren Sie erst mit vier und vier.

- Sie können die Lösung anwenden, damit alle in einer Probe die Typ A sind, zu Typ B werden und umgekehrt.

- Sie brauchen eine Frage die mit beiden Brüdern zu tun hat. Diese Aufgabe ist fast dieselbe wie im Film „Labyrinth" als Jennifer Connelley vor zwei Türen steht. . .

Kapitel 2

Wann macht man was?

Man sagt, dass die Mathematik eine universelle Sprache ist. Was sind die Wörter dieser Sprache? Die Wörter der mathematischen Sprache sind mathematische Konzepte, die durch mathematische Definitionen festgelegt wurden. Wenn Sie Mathematik lernen, ist es extrem wichtig, dass Sie neue mathematische Konzepte auswendig lernen. Genau wie wenn man eine Sprache lernt: man muss die neuen Wörter auswendig lernen, damit man Sie sie anwenden kann.

2.0.2 Zahlen

Die natürlichen Zahlen wenden wir an, um Dinge zu zählen. Es kann 1 Ding geben, oder 2, oder 3, und so weiter. Das führt uns zu einer Definition:

Definition 2.0.1. *Die erste natürliche Zahl ist* 1. *Für jede natürliche Zahl, gibt es eine folgende natürliche Zahl, die genau* 1 *grösser ist.*

Die zweite natürliche Zahl ist $1 + 1 = 2$, und die dritte natürliche Zahl ist 3, und so weiter. Die Definition besagtt: es gibt keine grösste natürliche Zahl. Es gibt immer noch eine grössere.

Was passiert, wenn man irgendeine natürliche Zahl mit 1 multipliziert? Nichts! Zum Beispiel,

$$5 \times 1 = 5,$$

$$3 \times 1 = 3,$$

$$1000000000000000033333 \times 1 = 1000000000000000033333.$$

Wir können dieses Phänomen genau ausdrücken:

> Es sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt: $n \times 1 = n$.

Was bedeutet dieses "n?" Die Mathematik behandelt Ideen. Dieses n bedeutet irgendeine natürliche Zahl. Welche natürliche Zahl ist unwichtig, aber um die Meinung auszudrucken, brauchen wir einen Namen für sie. Wir können sie Nancy nennen, wenn dass für Sie angenehmer ist. Die Bedeutung ist:

Wenn wir Nancy mit 1 multiplizieren, ist das Ergebnis wieder Nancy.

Definition 2.0.2. *Wenn wir einen Buchstaben anwenden, um irgendeine Zahl zu kennzeichnen, heisst diese Buchstabe einen Variabel.*

Das Multiplizieren mit 1 hat also die natürliche Zahl Nancy nich geänderet. Die Eins ist deswegen besonders, da sie das neutrale Element für Multiplikation ist.

Definition 2.0.3. *Die erste natürliche Zahl* 1 *ist das neutrale Element für Multiplikation. Das bedeutet, dass für jede natürliche Zahl n gilt:*

$$n \times 1 = n.$$

Was können wir noch mit natürlichen Zahlen tun? Wir können sie auch addieren. Wissen Sie schon, was das neutrale Element für Addition ist?

Definition 2.0.4. *Wir definieren* 0 *als das neutrale Element für Addition. Das bedeutet, dass für jede natürliche Zahl n, gilt:*

$$n + 0 = n.$$

Das neutrale Element für Addition ist also keine natürliche Zahl. Wenn man nichts hat, kann man nichts zählen.

Die natürliche Zahlen werden erst definiert um Dinge zu zählen. Man kann aber nicht nur Dinge zählen, sondern auch Schritte. Man kann einen Schritt vorwärts machen, aber man kann auch einen Schritt ruckwärts machen. Wenn man drei Schritte nach vorne macht, muss man drei Schritte nach hinten machen um wieder dorthin zu kommen, wo man war. Dadurch definieren wir die negative natürliche Zahlen.

Definition 2.0.5. *Es sei n eine natürliche Zahl. Die negative natürliche Zahl $-n$ ist die additive Umkehrung von n, das heißt gilt :*

$$n + -n = 0.$$

Wir können die natürliche Zahlen ordnen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.$$

Links fangen die Zahlen an und die nächste natürliche Zahl nach rechts ist 1 grösser.

Definition 2.0.6. *Eine ganze Zahl ist entweder :*

1. *Eine natürliche Zahl ;*
2. *Das neutrale Element für Addition ;*

3. *Die additive Umkehrung einer natürlichen Zahl. Diese nennen wir negative Zahlen.*

Kennen Sie schon den Zahlenstrahl? Der Zahlenstrahl ist eine super Art um reele Zahlen zu verstehen.

*******Illustration : The number line**********

Wenn man eine positive Zahl addiert, können wir uns vorstellen, dass irgendjemand den Zahlenstrahl nach rechts zieht.

*****Illustration : Hand pulling the number line to the right, +3**

Wenn man eine negative Zahl addiert, ist das dasselbe wie wenn man dieselbe positive Zahl subtrahiert, und wir können uns vorstellen, dass irgendjemand den Zahlenstrahl nach links zieht.

*****Illustration : Hand pulling the number line to the left, + -3**

Wir können uns vorstellen, dass die additive Umkehrung einer Zahl genau das tut, was man braucht, um den Zahlenstrahl zurück zu bringen.

Wir können auch Zahlen multiplizieren, und das Ergebnis wird immer noch eine Zahl sein. Wenn wir zum Beispiel mit 2 multiplizieren, können wir uns vorstellen, dass den Zahlenstrahl ausgezogen wird, damit alles 2 mal so gross ist.

*****Illustration : Hand stretching the number line out to be twice as big, *2**

Aufgabe : Was passiert den Zahlenstrahl wenn wir mit 1 multiplizieren? Was passiert den Zahlenstrahl wenn wir mit 0 addieren?

Wenn wir mit -1 multiplizieren, können wir uns vorstellen, dass den Zahlenstrahl gespiegelt wurde.

*****Illustration : reflecting the number line, *-1**

Wenn wir mit -2 multiplizieren, können wir uns vorstellen, dass wir erst den Zahlenstrahl ausziehen, und danach den Zahlenstrahl spiegeln.

*****Illustration : Stretching the number line and then reflecting it : *-2**

Nach diesen Beispielen, definieren wir die Regeln für Multiplikation, Addition, und Subtraktion mit Zahlen.

1. Eine positive Zahl mal eine positive Zahl ist eine positive Zahl.
2. Eine positive Zahl mal eine negative Zahl ist eine negative Zahl.
3. Jede Zahl mal 0 ergibt 0.
4. Eine negative Zahl mal eine negative Zahl ist eine positive Zahl.
5. Eine positive Zahl m minus eine positive Zahl, n ist gleich m plus die additive Umkehrung von n.
6. Wenn man eine negative Zahl subtrahiert, ist das dasselbe wie die additive Umkehrung dieser Zahl zu addieren.

Wie können wir danach den Zahlenstrahl wieder zurück bringen, nach wir en mit einer Zahl multiplizieren? Um dies zu tun, brauchen wir multiplikative Umkehrungen.

Definition 2.0.7. *Die multiplikative Umkehrung einer positiven Zahl (einer natürlichen Zahl) n wird als*

$$\frac{1}{n}$$

geschrieben und gilt :

$$n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Die multiplikative Umkehrung einer negativen Zahl (die additive Umkehrung einer natürlichen Zahl) $-n$, wobei n eine natürliche Zahl ist, ist

$$-\frac{1}{n},$$

und gilt :

$$-n \times -\frac{1}{n} = 1.$$

Wir können so denken : nachdem wir alles n mal so gross gemacht haben, müssen wir danachalles durch n teilen, damit diese wieder dieselbe Grösse sind. Diese ist die Bedeutung von Multiplikation mit

$$\frac{1}{n}.$$

Definition 2.0.8. *Es sei n eine ganze Zahl. Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ bedeutet : durch n teilen.*

Definition 2.0.9. *Eine rationale Zahl ist eine der folgenden :*

1. *Eine ganze Zahl;*
2. *Die multiplikative Umkehrung einer ganzen Zahl ;*
3. *Das Produkt einer ganzen Zahl und der multiplikativen Umkehrung einer ganzen Zahl.*

2.0.3 Bruchrechnungen, reele Zahlen, und freundliche rationale Zahlen

Die rationale Zahlen der Arten 1 und 2 wurden bereits erklärt. Wie sehen die der Art 3 aus? Zum Beispiel nehmen wir die Zahl 5 und multiplizieren wir diese mit der multiplikativen Umkehrung von 6. Dann schreiben wir :

$$5 \times \frac{1}{6}.$$

Was passiert mit dem Zahlenstrahl? Der wird entweder erst ausgezogen, damit alles 5 mal so gross ist, und danach wieder zusammengezogen, damit alles durch 6 geteilt ist. Oder wir können das umgekehrt tun, das Ergebnis ist dasselbe :

$$5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 5.$$

Wie schreiben wir das Ergebnis? Wir schreiben

$$5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Allgemeiner für zwei natürliche Zahlen, n und m, ist

$$n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m},$$

und diese bedeutet genau : n mal so gross ausziehen und durch m teilen. Allgemeiner gilt folgendes.

Definition 2.0.10. *Für jede rationale Zahl die ungleich* 0 *ist gibt es eine natürliche Zahl* n *und eine Zahl* m *sodass die rationale Zahl gleich*

$$\frac{m}{n}$$

ist. Wir nennen m *Zähler und* n *Nenner.*

Was ist die multiplikative Umkehrung von einer beliebigen rationalen Zahl? Nehmen wir das Beispiel

$$\frac{5}{6}.$$

Was passiert mit dem Zahlenstrahl wenn wir mit $\frac{5}{6}$ multiplizieren? Er wird erst 5 mal so weit ausgezogen und danach durch 6 geteilt. *****Illustration *** stretch out number line by 5, shrink up by 1/6**

Wie können wir das Ganze zurückbringen? Erst ziehen wir den Zahlenstrahl wieder 6 mal so weit, und danach teilen wir durch 5. *****Illustration *** stretch out number line by 6, shrink up by 1/5**

Das heisst : wir multiplizieren mit 6 und teilen durch 5. Dementsprechend ist die multiplikative Umkehrung von $\frac{5}{6}$ gleich $\frac{6}{5}$ und gilt

$$\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} = 1.$$

Allgemeiner haben wir folgende Definition.

Definition 2.0.11. *Es sei eine rationale Zahl*

$$\frac{p}{q},$$

wobei p *eine ganze Zahl ist, und* q *eine natürliche Zahl ist. Falls* $p \neq 0$*, dann ist die multiplikative Umkehrung von* $\frac{p}{q}$ *gleich*

$$\frac{q}{p}.$$

Jetzt können wir durch rationale Zahlen teilen.

Definition 2.0.12. *Es sei x eine rationale Zahl. Falls $x \neq 0$, teilen durch x ist gleich multiplizieren mit der multiplikative Umkehrung von x. Wir nennen auch teilen durch x dividieren durch x.*

Sie haben vielleicht bemerkt, dass das teilen durch 0 nicht definiert ist. Wir haben ja in der Definition angenommen, dass $x \neq 0$. Warum?

Das neutrale Element für Addition hat keine multiplikative Umkehrung.

Wir wissen, dass 0 mal jede Zahl 0 ergibt. Das heisst, dass es keine Zahl gibt, mit der 0 mal diese Zahl 1 ergibt. Dementsprechend, hat 0 keine multiplikative Umkehrung.

Lassen Sie uns diese Definition anwenden.

Definition 2.0.13. *Es seien m, n natürliche Zahlen und p, q Zahlen. Dann gilt :*

$$\frac{p}{m} \times \frac{q}{n} = \frac{pq}{mn},$$

und

$$\frac{p}{m} \div \frac{q}{n} = \frac{p}{m} \times \frac{n}{q} = \frac{pn}{mq}.$$

Wir können also rationale Zahlen multiplizieren und dividieren. Wir können ebenfalls die ganzen Zahlen addieren und subtrahieren. Was passiert wenn wir $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ addieren? Wir haben $\frac{2}{4}$ nicht wahr? Allgemeiner gilt folgende.

Definition 2.0.14. *Es seien m und n ganze Zahlen und q eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{q} = \frac{m+n}{q}.$$

Wir können nur rationale Zahlen mit demselben Nenner addieren oder subtrahieren.

Wie können wir beliebige rationale Zahlen addieren? Um beliebige rationale Zahlen zu addieren, brauchen wir Hilfe von dem neutralen Element für Multiplikation. Das neutrale Element für Multiplikation kann man als spielerische Zahl sehen, die sich gern verkleidet. Für $x \neq 0$, gilt

$$\frac{x}{x} = x \times \frac{1}{x} = 1.$$

*******Illustration of 1 in costume***********

Ein Beispiel ist : was ist

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{7} = ?$$

Die Regel ist :

Wir können nur rationale Zahlen mit demselben Nenner addieren.

Diese rationalen Zahlen haben jedoch nicht denselben Nenner. Was können wir dann machen? Mit eins multiplizieren! Für jede natürliche Zahl x und y gilt :

$$\frac{5}{6} = 1 \times \frac{5}{6} = \frac{x}{x} \times \frac{5}{6} = \frac{x \times 5}{x \times 6}$$

und gilt

$$\frac{2}{7} = 1 \times \frac{2}{7} = \frac{y}{y} \times \frac{2}{7} = \frac{y \times 2}{y \times 7}.$$

Um beide Nenner gleich zu machen brauchen wir also natürliche Zahlen x und y sodass

$$x \times 6 = y \times 7.$$

Dann setzen wir

$$x = 7, \quad y = 6.$$

Dementsprechend machen wir

$$\frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{7 \times 6}, \quad \frac{2}{7} = \frac{6 \times 2}{6 \times 7}.$$

Dann betrachten wir

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{7} = \frac{35}{42} + \frac{12}{42} = \frac{47}{42}.$$

Jetzt können wir beliebige rationale Zahlen addieren und Subtrahieren funktionniert auch.

Definition 2.0.15. *Es seien m und p ganze Zahlen und n und q natürliche Zahlen. Dann gilt :*

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm}{qn} + \frac{np}{nq} = \frac{qm + np}{nq},$$
$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{qm}{qn} - \frac{np}{nq} = \frac{qm - np}{nq}.$$

Aufgabe : Zeit zu Üben :

1. Was ist $5 \times \frac{2}{5}$?
2. Was ist $5 \div \frac{2}{5}$?
3. Was ist $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$?
4. Was ist $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$?
5. Was ist $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$?

Es gibt noch Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl sind aber nicht rational sind. Diese nennt man die reelen Zahlen,[1] aber Sie mussen sich keine Sorgen machen. Die rationale Zahlen sind wie gute Freunde : Sie sind immer für Sie da! Die reelen Zahlen sind alle Punkte auf dem Zahlenstrahl. Der folgende Satz bedeutet, dass Sie alles mit reelen Zahlen tun können, genau wie mit rationalen Zahlen.

Satz 2.0.16. *Es sei x und y reele Zahlen, mit $x < y$. Dann gibt es eine rationale Zahl z sodass gilt :*

$$x < z < y.$$

Da Sie kein Mathematiker oder Mathematikerin sind, ist der Beweis dieses Satzes nicht so wichtig. Wichtig ist die Bedeutung :

Zwischen jeden zwei reelen Zahlen gibt es eine rationale Zahl.

Egal wie nah die zwei Zahlen auf der Zahlenstrahl sind, es gibt immer eine rationale Zahl dazwischen. Das heisst, dass Sie alles mit reelenn Zahlen tun können, genau wie mit rationalen Zahlen. Man sagt:

Die rationale Zahlen liegen dicht in der reelen Zahlen. Dicht wie gute Freunde.

2.1 Wann macht man was?

Hier ist ein Beispiel :

$$5 \times 2^{1+2} - 12 \div (3 \times 4) =?$$

Es gibt viel zu tun, also was macht man zuerst? Die Reihenfolge der Rechnenoperationen ist :

1. Klammern
2. Potenz
3. Multiplikation
4. Division
5. Addition
6. Subtrahieren

Um die Reihenfolge zu erinnern, ist einen Satz :

Können Personen mit Demenz Asbach schlürfen?

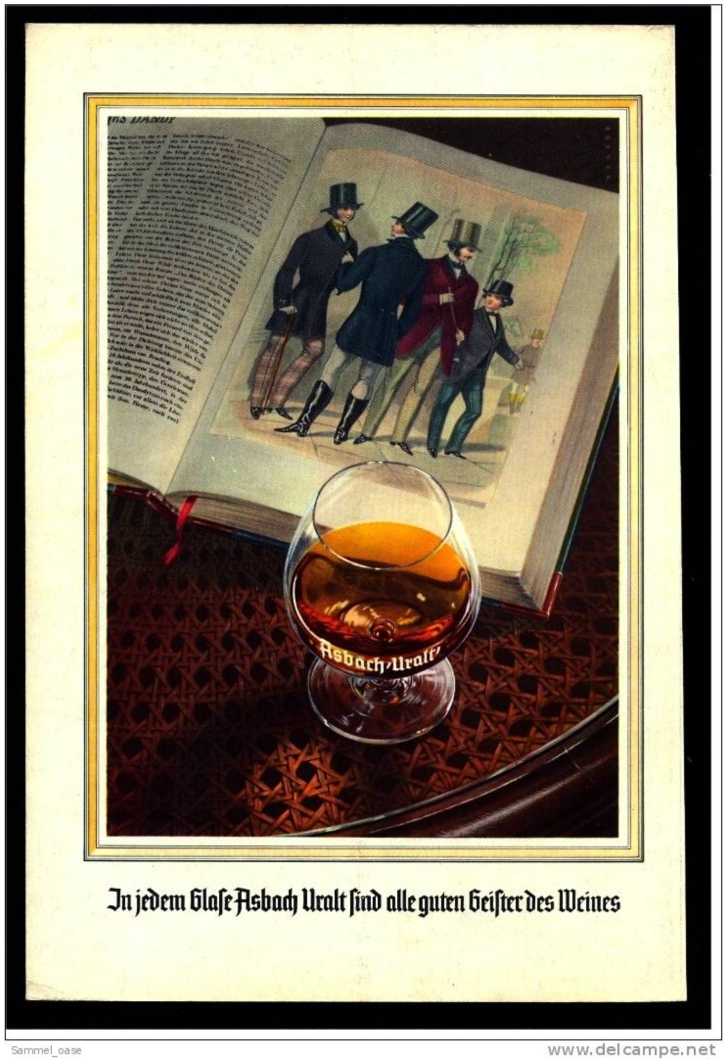


Abbildung 2.1: Können Personen mit Demenz Asbach schlürfen?

Nach der Reihenfolge sollen wir bei $5 + 3 \times 2^{3+4} - 12 \div (3 \times 4)$ erst den Klammern betrachten :

$$3 \times 4 = 12.$$

Dann schreiben wir

$$5 + 3 \times 2^{1+2} - 12 \div 12.$$

Danach sollen wir die Potenz betrachten :

$$1 + 2 = 3,$$

also ist

$$2^{1+2} = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Dann schreiben wir

$$5 + 3 \times 8 - 12 \div 12.$$

Das nächste ist Multiplikation :

$$3 \times 8 = 24,$$

also schreiben wir

$$5 + 24 - 12 \div 12.$$

Nach Multiplikation kommt Demenz, ich meine Division :

$$12 \div 12 = 1.$$

Also schreiben wir

$$5 + 24 - 1.$$

Das nächste ist das Asbach, ich meine Addition :

$$5 + 24 = 29,$$

also schreiben wir

$$29 - 1.$$

Und das letzte ist das schlürfen, ich meine Subtraktion :

$$29 - 1 = 28.$$

Also die Antwort ist 28.

Noch einige wichtige Regeln sind die Potenz Regeln.

Definition 2.1.1 (Potenz Regeln). *1. Es seien n und m natürliche Zahlen. Dann n^m bedeutet $n \times n \times \ldots n$, wobei n ist mit sich selbst m mal multipliziert.*

[1] Es gibt auch die komplexe Zahlen. Die sind nicht mehr in der Zahlenstrahl!

2. *n^{-m} bedeutet :*
$$\frac{1}{n^m}.$$
3. *$n^1 = n$.*
4. *$n^0 = 1$.*
5. *Man nennt n die Basis und m die Potenz.*

Nach diesen Regeln, kann man folgendes beweisen : Es seien n, m, und k natürliche Zahlen. Dann gilt :

1. $(n^m)^k = n^{mk}$.
2. $n^{m+k} = n^m n^k$.
3. $n^{m-k} = \frac{n^m}{n^k}$.

Noch eine wichtige Regel ist, wie man Klammern multipliziert. Machen wir ein Beispiel :

$$(1+2)(1+2).$$

Nach der “Können Personen mit Demenz Asbach schlürfen?Regel, sollen wir zuerst

$$1+2=3$$

betrachten. Dann haben wir

$$(1+2)(1+2) = 3 \times 3 = 9.$$

Der folgende Fehler ist oft gemacht:

$$(a+b)(a+b) \quad -” \quad a^2+b^2.$$

Wenn wir mit $a=1$ und $b=2$ betrachten haben wir

$$(1+2)(1+2) \quad -” \quad 1^2+2^2=5.$$

Das stimmt nicht! Sie haben gesehen, dass

$$(1+2)(1+2) = 9,$$

und 9 ist vier mehr als 5.

Wenn Sie mit Zahlen arbeiten, werden Sie möglicherweise diesen Fehler nicht machen. Aber wenn Sie mit Variabeln arbeiten, ist der Fehler leicht zu machen. Dementsprechend, haben wir noch einen Merksatz :

1. Zuerst

2. Aussen
3. Innen
4. Letzte

Zum Beispiel :

$$(a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Lassen wir diese mit dem Beispiel $a = 1$, $b = 2$ übereinstimmen :

$$(1+2)(1+2) = 1^2 + 2 \times 1 \times 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9.$$

Ja!

Der Merksatz läutet :

Zu allem immer lieb. ♡♡♡♡

2.2 Gleichungen : Das ganze Ruckwärts

Es sei x eine rationale Zahl sodass gilt :

$$3 \times x - 4 = 5.$$

Was ist x? Merken Sie, dass $\times$ und x etwas ähnlich aussehen? Aus diesem Grund, können wir $*$ statt $\times$ benutzen, um Multiplikation zu bezeichnen. Wir können auch Klammern anwenden, und wir können auch manchmal alles weglassen. Dann habe die folgende dieselbe Bedeutung :

$$3 \times x, \quad 3 * x, \quad (3)(x), \quad 3x.$$

Unser Ziel um die Gleichung $3x - 4 = 5$ zu lösen, ist irgendwas mathematisches zu machen, damit x allein steht und wir haben

$$x = ...$$

Auf der linken Seite haben wir $3x + 4$. Wir wollen also die 3 und die 4 weg haben! Gilt immer

$$4 - 4 = 0.$$

Die Umkehrung von -4 ist $+4$. Also um ein -4 weg zu schaffen, addiert man 4. Wir haben auch auf der linken Seite 3 mal x. Die Umkehrung von mal 3 ist durch 3 teilen, da

$$3 \div 3 = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Was sollen wir zuerst machen? Wem sollen wir zuerst weg schaffen? Sie können sich vorstellen, dass x in der Gleichung gefangen ist. Um zu wissen, wie Sie x befreien können, lassen Sie uns überlegen, was würde x passieren und in welcher Reihenfolge?

Wir kennen die Reihenfolge : KPMDAS. Das heisst dass zuerst x mit 3 multipliziert wird und danach wird 4 subtrahiert. Wir brauchen die Umkehrung, und das heisst wir machen KPMDAS ruckwärts um die Gleichung zu lösen.

Wir mussen 4 addieren und durch 3 teilen, um x zu befreien. Ruckwärts kommt A vor M in KPMDAS. Das heisst, zuerst sollten wir 4 addieren.

> Damit die Gleichung eine Gleichung bleibt müssen wir immer dasselbe auf beiden Seiten tun.

Dementsprechend addieren wir 4 auf beider Seiten.

$$3x - 4 + 4 = 5 + 4.$$

Die linke Seite ist also :

$$3x,$$

und die rechte Seite ist

$$5 + 4 = 9.$$

Dementsprechend haben wir

$$3x = 9.$$

Super. Jetzt müssen wir nur diese drei wegschaffen. Wir wissen schon : durch 3 teilen :

$$3x \div 3 = 9 \div 3.$$

Durch die Regeln wissen wir

$$3x \div 3 = 3x \times \frac{1}{3} = \frac{3x * 1}{3} = x, \quad 9 \div 3 = 3.$$

Demenstprechend haben wir x befreit und sehen wir dass

$$x = 3.$$

So eine Gleichung nennt man eine lineare Gleichung. Ein sehr wichtiges Prinzip in der Mathematik ist :

> Linear ist der beste Fall.

Linear ist immer einfacher als nicht linear. Hier ist noch ein Beispiel wie man eine Gleichung zu lösen hat :

$$5 \times 2^{1+x} - 12 \div (3 \times 4) = 29.$$

Diese Gleichung ist etwas kompliziert. Zuerst lassen wir die Gleichung so vereinfachen :

$$5 \times 2^{1+x} - 12 \div 12 = 29,$$

$$5 \times 2^{1+x} - 1 = 29.$$

Wir wissen, dass wir zuerst subtrahieren und danach addieren. Wir können also diese -1 wegschaffen wenn wir $+1$ auf beiden Seiten machen :

$$5 \times 2^{1+x} - 1 + 1 = 29 + 1,$$

dann haben wir

$$5 \times 2^{1+x} = 30.$$

Danach kommt dividieren und danach multiplizieren. Um die Multiplikation mit 5 wegzuschaffen, können wir durch 5 auf beiden Seiten teilen :

$$5 \times 2^{1+x} \div 5 = 30 \div 5,$$

dann haben wir

$$2^{x+1} = 6.$$

Jetzt haben wir eine Potenz.

Wie können wir eine Potenz umkehren?

Um diese zu tun definieren wir den Logarithmus. Die Basis ist 2.

Definition 2.2.1. *Es sei n und m zwei positive reele Zahl. Dann gibt es eine eindeutig reele Zahl y sodass*

$$n^y = m.$$

Wir nennen diese y das Logarithmus von m bezüglich der Basis n, und wir schreiben die

$$y = \log_n(m).$$

Lassen Sie uns die Definition anwenden. Wir haben

$$2^{x+1}.$$

Die Basis ist 2. Das heisst dass in der Definition des Logarithmus 2 die Rolle von n spielt. Jetzt überlegen Sie wer m ist. Wir haben die Gleichung

$$2^{x+1} = 6.$$

Dann gilt für

$$m = 6,$$

$$x + 1 = \log_2(6).$$

Wir haben die Potenz befreit! Der letzte Schritt ist diese $+1$ weg zu schaffen. Um dies zu tun, subtrahieren wir 1 von beiden Seiten :

$$x + 1 - 1 = \log_2(6) - 1,$$

und endlich haben wir

$$x = \log_2(6) - 1.$$

2.3 Funktionen

Der Logarithmus ist ein Beispiel einer Funktion.

Definition 2.3.1. *Eine Funktion nimmt eine Eingabe von und ergibt eine eindeutige Ausgabe. Für die Eingabe x schreibt man $f(x)$ um die Ausgabe bezüglich x zu bezeichnen.*

Bitte seien Sie nicht erschreckt. Die Buchstaben x und f sind nur da um die Idee zu beschreiben. Eine Funktion ist aktiv : sie tut etwas. Sie können sich vorstellen, dass die Funktion, nennen wir sie Frank, die Eingabe x vornimmt innerhalb der Klammern tut Frank irgendwas zu x und das Ergebnis schreiben wir als $f(x)$. Die Bedeutung ist :

> Frank die Funktion nimmt eine Eingabe x von und innerhalb seiner Klammern tut er irgendwas zu x und die Ausgabe ist dann $f(x)$.

Wenn Sie noch kreativer denken möchten, können Sie denken dass eine Funktion wie ein Mathematiker der Wurst macht. Die Eingabe ist wie das Fleisch und die Funktion ist Frank der Mathematik-Metzger. Frank nimmt die Eingabe vor und ein Würstchen entsteht als Ausgabe. Was genau für ein Würstchen die Ausgabe ist hängt von :

- der Eingabe (was für eine Art Fleisch zum Beispiel)
- wer genau Frank ist (was für eine Funktion es ist)

ab. Wenn wir mit zwei Funktionen arbeiten, dann nennen wir oft die zweite Funktion g, und schreiben $g(x)$ um die Ausgabe bezüglich der Eingabe x zu bezeichnen. Dann haben wir Frank und Georg, die Mathematik-Metzger.

Warum sind Funktionen nützlich? Weil man mit Funktionen fast alles in der Natur beschreiben kann. Eine Funktion beschreibt Wärmeausbreitung, eine Funktion beschreibt Wellenausbreitung, eine Funktion beschreibt Licht, eine Funktion beschreibt Anziehungskraft, eine Funktion beschreibt Populationen, eine Funktion beschreibt wie bestimmte Pflanzen wachsen - man kann mit einer bestimmten Funktion fast jeden natürlichen Prozess beschreiben.

2.3.1 Sonderfunktionen

Sie werden bald sehen, dass Ihre Lieblingsfunktionen möglicherweise die linearen Funktionen sind. Warum? Weil sie die einfachsten Funktionen sind.

Definition 2.3.2. *Eine lineare Funktion nimmt eine Eingabe x, multiplizert x mit irgendeiner festen Zahl m, und danach wird das Ergebnis mit irgendeiner festen Zahl b addiert. Die Ausgabe ist also :*

$$mx + b.$$

Falls Frank, die Funktion, eine lineare Funktion ist, dann gibt es Zahlen m und b sodass für jede x gilt :

$$f(x) = mx + b.$$

Hier sind noch einige wichtige Beispiele :

1. Eine sehr schöne lineare Funktion ist die Identität : für die Eingabe x ist die Ausgabe wieder x.

2. Ziemliche langweilige Funktionen sind die konstanten Funktionen. Für eine reelle Zahl z ergibt die konstante Funktion z zu jeder Eingabe dieselbe Ausgabe : z. Zum Beispiel die konstante Funktion 5. Sie geben diese Funktion eine Eingabe, und die Ausgabe ist immer einfach 5. Diese Funktionen sind wichtig aber etwas langweilig.

3. Polynomfunktionen. Eine Polynomfunktion des Grades n, wobei n eine natürliche Zahl ist, sieht so aus
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
wobei a_n, a_{n-1}, bis zu a_0 reelle Zahlen sind.

4. Rationale Funktionen. Wenn wir zwei Polynomfunktionen durch einander teilen ist das Ergebnis eine rationale Funktion. Diese Idee ist etwas wie rationale Zahlen, da jede rationale Zahl als
$$\frac{p}{q}, \quad \text{wobei } p \text{ eine ganze Zahl ist und } q \text{ eine natürliche Zahl ist}$$
geschrieben werden kann. Für jede rationale Funktion $r(x)$ es gibt Polynomfunktionen $p(x)$ und $q(x)$ sodass
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

5. Exponentielle Funktionen: Es sei b eine reelle Zahl. Dann ist für eine reelle Zahl x
$$b^x$$
eine exponentielle Funktion mit der Basis b. Es gibt eine sehr besondere reelle Zahl die e heißt, und die Funktion
$$e^x$$
ist extrem wichtig in der Naturwissenschaften.

6. Die Logarithmusfunktion, die
$$\log_b(x)$$
geschrieben wird, wobei b die Basis ist und gilt $b > 0$. Für eine $x > 0$ ist
$$\log_b(x)$$
die eindeutige Zahl sodass gilt :
$$b^{\log_b(x)} = x.$$
Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentiellenfunktion.

7. Die Trigonometrischen Funktionen,

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x).$$

Diese Funktionen haben Sie möglicherweise durch Dreiecke gelernt, aber sie haben mehr mit der Natur zu tun als mit einfachen Dreiecken! Die Sinus und Cosinus Funktionen sind der Schlüssel wenn Sie Wellen, Klang, und Licht verstehen wollen.

Wir können auch noch viel, viel mehr Funktionen definieren.

Definition 2.3.3. *Es seien f und g Funktionen. Die Komposition $f \circ g$ ist auch eine Funktion, und wir schreiben*

$$f(g(x))$$

um zu bezeichnen, dass die Ausgabe von der Funktion f für die Eingabe $g(x)$.

Die Komposition bedeutet : erst nimmt g die Eingabe vor und ergibt seine Ausgabe $g(x)$, dann nimmt f diese als Eingabe und ergibt $f(g(x))$. Sie können mit einer Analogie denken, dass die Komposition funktioniert als ob die zwei Funktionen in Team arbeiten. Erst macht Georg seine Arbeit, zum Beispiel, erst würzt Georg das Fleisch, und danach wendet Frank das gewürzte Fleisch an, um das Würstchen zu machen.

Manchmal haben Studenten Probleme um sich zu erinnern welche Funktion in der Komposition $f \circ g$ passiert. Wenn Sie das lesen würden, würden Sie zuerst f lesen. Aber Sie sollen mathematisch denken. Schreiben wir also eine Eingabe x,

$$f(g(x)).$$

Stellen Sie sich vor, dass Sie die Eingabe x sind. Welche Funktion ist am nächsten zu Ihnen? Die Funktion g nicht wahr? Dementsprechend passiert Ihnen, dass die Eingabe x zuerst g vornimmt und danach f kommt. So können Sie sich erinnern welche Funktion in der Komposition zuerst kommt.

Wenn man eine Gleichung lösen will, muss man Umkehren können. Dafür gibt es Umkehrfunktionen.

Definition 2.3.4. *Es sei f eine Funktion. Wenn es eine Funktion g gibt sodass*

$$g(f(x)) = x$$

sowie

$$f(g(x)) = x$$

gilt für jede x, dann ist g die Umkehrfunktion von f und ist f die Umkehrfunktion von g.

Die Bedeutung ist : Die Umkehrfunktion kehrt die Ausgabe wieder zu der Eingabe um. Wir können die Identitätfunktion als das neutrale Element für Komposition definieren. Wenn Sie eine Zahl mit ihrer additiven Umkehrung addierenr ist das Ergebnis das neutrale Element für Addition. Wenn Sie eine Zahl mit ihrer multiplikativen Umkehrung multiplizieren ist das

Ergebnis das neutrale Element für Multiplikation. Und wenn Sie eine Funktion mit ihrer Umkehrfunktion komponieren ist das Ergebnis die Identität, die Sie als das neutrale Element für Komposition vorstellen können. Genau wie das neutrale Element für Addition : wenn man mit 0 addiert, passiert nichts. Das Ergebnis bleibt das gleiche :

$$x + 0 = x.$$

Ferner gilt

$$0 + x = x.$$

Wenn man mit das neutrale Element für Multiplikation mulitpliziert, passiert auch nichts :

$$x \times 1 = x.$$

Ferner gilt

$$1 \times x = 1.$$

Lassen Sie uns jetzt schreiben

$$i(x) = x,$$

also ist i (Inga) die Identitätfunktion. Sie ist das neutrale Element für Komposition, weil wenn wir irgendeine Funktion f mit i (Inga) komponieren :

$$f(i(x)) = f(x),$$

gilt für jede x. Es gilt auch :

$$i(f(x)) = f(x)$$

für jede f. Dementsprechend wenn man mit dem neutralen Element für Komposition komponiert, passiert nichts :

$$f \circ i = i \circ f = f.$$

Wenn Sie ein bisschen kreativer denken möchten, können Sie sich die Umkehrfunktion so vorstellen : erst nimmt die Funktion f, nennen wir ihn Frank, die Eingabe x vor. Er tut was mit x, zum Beispiel er würzt x. Aber dann kommt die Funktion g, nennen wir ihn Georg, und Georg nimmt die Würze raus (ich weiss nicht wie man das wirklich machen kann). Danach ist die Eingabe x wieder wie sie war - sie bleibt unverändert.

2.4 Übungen

1. Was passiert auf dem Zahlenstrahl wenn man durch 1 teilt? Was soll das neutrale Element für Division sein? Was soll das neutrale Element für Subtraktion sein?

2. Prozentrechnungen : 5% bedeutet
$$\frac{5}{100}.$$

Allgemeiner gilt : es sei n eine nicht negative ganze Zahl. Dann ist $n\%$ genau

$$\frac{n}{100}.$$

Für eine reelle Zahl x ist $n\%$ von x genau

$$x \times \frac{n}{100} = \frac{nx}{100}.$$

Was ist 5% von 100?

3. Was ist 20% von 80?

4. Was ist 0.1% von
$$4(2+3)^2?$$

5. Sie haben eine Lösung von 500 mL mit 0.2% Salz und eine Lösung von 200 mL mit 0.5% Salz, und Sie brauchen eine Lösung von 100 mL mit 0.2% Salz. Wie können Sie diese machen?

6. Sie sind beim Einkaufen und Sie brauchen Ethanol für Ihr Labor. Bei Firma Brauer kostet Ethanol 30 Euro pro Liter aber Sie bekommen einen Rabatt von 20% auf dem gesamten Preis wenn Sie jeweils mehr als einen Liter kaufen. Bei Firma Rother kostet Ethanol 25 Euro pro Liter. Falls Sie einen Liter brauchen, wo können Sie am günstigsten das Ethanol kaufen? Falls Sie 100 Liter brauchen, wo können Sie das Ethanol kaufen? Wie viel Ethanol muss man kaufen sodass man genau dasselbe bei Firma Brauer wie bei Firma Rother bezahlt?

7. Machen Sie Ihre eigenen Merksätze um sich an die Reihenfolge der Rechnenoperationen und Klammern ausmultiplizieren erinnern zu können.

8. Was ist
$$3 \times 4^{5-3} \div 9 + \log_2(8) \div \frac{2}{3}^{3-2}?$$

9. Lösen Sie die Gleichung :
$$3x - 42 = 5.$$

10. Lösen Sie die Gleichung :
$$3x^2 - 42 = 5x^2.$$

11. Was ist die Umkehrfunktion der Funktion
$$f(x) = 2x + 3?$$

12. * Sie sind Direktor eines Zoos. Viele Tiere haben Gurken in Ihrer Diät, und Sie haben gesehen, dass bei einem Bauer Gurken im Angebot sind. Dementsprechend kaufen Sie 100 Kilo Gurken. Jede Gurke besteht zu 99% aus Wasser. Nach einigen Tage sind die Gurken etwas ausgetrocknet, sodass jede zu 98% aus Wasser besteht. Wie viel wiegen die Gurken jetzt?

13. * Zeigen Sie, dass es keine kleinste positive rationale Zahl gibt.

14. * Ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl? Warum oder warum nicht?

Kapitel 3

Lineare Gleichungen : Der Modellfall

Ein wichtiges allgemeines Prinzip, das oft wiederholt wird, ist : linear ist der beste Fall.

3.1 Lineare Gleichungen in einer Variabel

Eine lineare Gleichung in einer Variabel kann so aussehen:

$$5x + 3 = 7.$$

Eine lineare Gleichung in einer Variabel kann auch so aussehen:

$$5x = 4.$$

Eine lineare Gleichung in einer Variabel kann auch so aussehen:

$$x = \frac{5}{4}.$$

Allgemeiner gilt:

Definition 3.1.1. *Eine* lineare Gleichung in einem Variabel *ist eine Gleichung die gleich eine Gleichung in der auf einer Seite der Variabel mit einer Zahl die ungleich Null multipliziert ist und auf der andere Seite eine Zahl ist.*

Aufgabe 1: Ist

$$x - 3 = -2$$

eine lineare Gleichung? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 2: Ist

$$\frac{x}{3} = 1$$

eine lineare Gleichung? Warum oder warum nicht?

Aufgabe 3: Ist

$$2x + 1$$

eine lineare Gleichung? Warum oder warum nicht?

Nachdem Sie an diesen drei Aufgaben gearbeitet haben, bitte blättern Sie um.

1. Bei der ersten Aufgabe hei?t es $x-3$. Wird die Variabel x mit einer Zahl multipliziert? Was ist eine Zahl mit der x multipliziert werden kann? Diese Zahl ist eine besondere Zahl...

   $$1 \times x = x,$$

   also wird x mit der Zahl 1 multipliziert. Danach haben wir $x - 3$. Wir können die Gleichung umschreiben, da wir 3 auf beiden Seiten addieren dürfen. Wir können immer dasselbe zu beiden Seiten tun. Das heisst, dass die Gleichung

   $$x - 3 + 3 = -2 + 3$$

   gleich die ursprüngliche Gleichung ist und diese können wir so schreiben, da $-3+3 = 0$ und $-2 + 3 = 1$,

   $$x = 1.$$

2. In dieser Aufgabe ist die Variabel x durch 3 geteilt, anstatt multipliziert. Was haben wir gerade gesehen? Subtrahieren ist dasselbe wie mit der additiven Umkehrung addieren. In der Gleichung gibt es auf der rechten Seite

   $$\frac{x}{3}.$$

   Wir können also die rechte Seite so schreiben

   $$x \times \frac{1}{3}.$$

   Es wird also die Variabel x mit der Zahl $\frac{1}{3}$ multipliziert.

3. Was bedeutet eine Gleichung?

Eine allgemeine lineare Gleichung in einer Variabel kann so aussehen :

$$ax + b = c,$$

wobei x die Variabel ist und a, b, sowie c Zahlen sind. Eine wichtige Frage ist :

Wann gibt es eine Lösung?

Definition 3.1.2. *Eine Lösung einer Gleichung in einer Variabel x ist eine Zahl, die die Gleichung erfüllt. Das heisst, wenn man die Lösung in die Gleichung statt x einsetzt, ist die Gleichung wahr.*

Für eine allgemeine lineare Gleichung in einer Variabel :

$$ax + b = c,$$

können wir die Gleichung so lösen. Erst subtrahieren wir b von beiden Seiten :

$$ax + b - b = c - b.$$

Dann $b - b = 0$, haben wir

$$ax = c - b.$$

Jetzt können wir durch a teilen :

$$ax \div a = (c - b) \div a.$$

Können wir das wirklich tun? Kann man durch jede Zahl teilen? Bitte nehmen Sie sich einen Moment um daruber nachzudenken. Danach können Sie umblättern.

Wir können nicht durch 0 teilen. Nach der Definition kann aber a nicht Null sein. Der Grund dafür ist dass $0x = 0$, wenn also die Variabel mit 0 multipliziert werden würde, dann wurde die Variabel einfach wegfallen und nicht in der Gleichung stehen. Das heisst, dass für jede lineare Gleichung die Form

$$ax + b = c,$$

gibt es genau eine Lösung und die Lösung ist

$$x = \frac{c - b}{a}.$$

3.2 Lineare Gleichungen in zwei Variabeln

Eine lineare Gleichung in zwei Variabeln kann so aussehen :

$$2x + 3y = 5,$$

oder so aussehen :

$$2x = 5 - 3y,$$

oder so aussehen :

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x,$$

oder so aussehen :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

In den Beispielen sind x und y die Variabel. Für das Beispiel

$$2x + 3y = 5,$$

gibt es eine Lösung?

Definition 3.2.1. *Eine Lösung einer Gleichung in zwei Variabeln ist ein Paar von zwei Zahlen, die die Gleichung erfüllen. Das heisst, wenn man die zwei Zahlen statt der zwei Variabeln in die Gleichung einsetzt, dann gilt die Gleichung.*

Gibt es also zwei Zahlen die diese Gleichung erfüllen?

$$2x + 3y = 5?$$

Warum oder warum nicht? Wenn Sie eine Antwort haben, dann blättern Sie bitte um.

Eine Lösung der Gleichung ist das Paar $x = 1$, $y = 1$, da gilt :

$$2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5.$$

Gibt es andere Lösungen? Wir haben eine Gleichung :

$$2x + 3y = 5.$$

Meine Lösung der Gleichung war $x = 1$ und $y = 1$. Jetzt können wir ein bisschen Halloween-Spaß machen ... Wir können mithilfe des neutralen Elements Addition die Gleichung verkleiden.

$$2(x) + 3(y) = 5, \quad \text{sowie} \quad 2(x) + 3(y) + 0 = 5, \text{ für } x = 1, y = 1.$$

Jetzt addieren wir 1 zu x, dann haben wir

$$2(x + 1) = 2x + 2.$$

Was müssen wir zu y tun, um die 2 zu vernichten? Das y wird mit 3 multipliziert, wenn wir $\frac{3}{2}$ von y subtrahieren :

$$3\left(y - \frac{3}{2}\right) = 3y - 2.$$

Dementsprechend gilt :

$$2(x + 1) + 3\left(y - \frac{3}{2}\right) = 2x + 2 + 3y - 2 = 2x + 3y.$$

Das heisst, wenn wir eine Lösung haben, die die Gleichung erfüllt (wie $x = 1$, $y = 1$), können wir x mit 1 addieren und $\frac{3}{2}$ von y subtrahieren und das Ergebnis ist wieder eine Lösung der Gleichung. Versuchen Sie also $x = 1 + 1 = 2$ und $y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ in der Gleichung. Es funktioniert, oder?

Wie viele Lösungen gibt es zu der Gleichung?

Sie werden Sehen, dass lineare Gleichungen wunderbar sind, weil wir alle Lösungen finden können!

Definition 3.2.2. *Eine lineare Gleichung in zwei Variabeln x und y ist eine Gleichung, die gleich eine Gleichung der Form*

$$ax + by = c$$

ist, wobei a und b Zahlen die ungleich Null sind und c eine Zahl ist.

Beispiele :

1. Ist

$$2x + 3y$$

eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

2. Ist
$$2xy = 5$$
eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

3. Ist
$$y = 3x - 5$$
eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

4. Ist
$$2x^2 + 3y = 5$$
eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

5. Ist
$$\log_2(y) + e^x = 1$$
eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

6. Ist
$$2x - 3y = 5x + 9y$$
eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

7. Ist
$$3(y \log_2(8) + ex) = \frac{5}{3}$$
eine lineare Gleichung in zwei Variabeln?

Hinweise:

1. Ist die eine Gleichung?
2. Was ist los mit den Variabeln?
3. Ist y doch mit einer Zahl multipliziert? Ist subtrahieren erlaubt?
4. Schauen Sie x an.
5. Was ist mit den Variabeln passiert?
6. Schauen Sie die Definition an und überprüfen Sie ob die Bedingungen erfüllt sind.
7. Was ist $\log_2(8)$? Was ist e?

Es ist sehr wichtig, dass Sie lineare Gleichungen erkennen können.

Proposition 3.2.3. *Jede lineare Gleichung in zwei Variabeln x und y kann so geschrieben werden :*
$$y = mx + b,$$
wobei m und b Zahlen sind und $m \neq 0$.

Beweis. Jede lineare Gleichung in zwei Variabeln kann nach der Definition so geschrieben werden :

$$ax + \beta y = c,$$

wobei x und y die Variabeln sind und a, β, und c Zahlen sind. Wir können die Gleichung umschreiben, da wir ax von beiden Seiten subtrahieren können :

$$ax + \beta y - ax = c - ax.$$

Da $ax + \beta y - ax = \beta y$ ist, haben wir

$$\beta y = c - ax.$$

Jetzt können wir beide Seiten durch β teilen, da nach der Definition $\beta \neq 0$. Das heisst, dass die Gleichung gleich die Gleichung

$$\beta y \div \beta = (c - ax) \div \beta$$

ist. Da $\beta y \div \beta = y$, können wir dies umschreiben

$$y = \frac{c - ax}{\beta}.$$

Jetzt können wir die Gleichung noch umschreiben

$$y = \frac{c}{\beta} - \frac{a}{\beta}x,$$

und nochmal umschreiben

$$y = -\frac{a}{\beta}x + \frac{c}{\beta}.$$

Das heisst, dass für "m" $= -\frac{a}{\beta}$ und "b" $= \frac{c}{\beta}$ ist die Gleichung gleich die Gleichung

$$y = mx + b.$$

□

Für das Beispiel

$$2x + 3y = 5,$$

möchten wir y allein auf einer Seite haben und der Rest auf der andere Seite. Dementsprechend subtrahieren wir $2x$ von beiden Seiten :

$$2x + 3y - 2x = 5 - 2x.$$

Da $2x - 2x = 0$ (Happy Halloween!) haben wir

$$3y = 5 - 2x.$$

Jetzt ist y fast allein. Wir müssen nur noch durch 3 teilen (natürlich auf beiden Seiten) :

$$3y \div 3 = (5 - 2x) \div 3,$$

und wir können dies umschreiben da $3 \div 3 = 1$,

$$y = \frac{5 - 2x}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

In diesem Fall ist

$$m = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{5}{3}.$$

Definition 3.2.4. *In einer linearen Gleichung mit zwei Variabeln x und y und der Form*

$$y = mx + b,$$

ist m der Anstieg und b die Höhe.

Jetzt können wir leicht sehen, dass für jede Zahl x ist also

$$mx + b$$

eine Zahl die wir y nennen können und das Paar $(x, mx + b)$ erfüllt die lineare Gleichung

$$y = mx + b.$$

Wir können alle Lösungen mit einer linearen Funktion beschreiben. Diese Funktion nimmt eine Eingabe x vor und ergibt die y die mit der eingegebenen x die Gleichung erfüllt :

$$f(x) = mx + b.$$

Wir können die Lösungen einer linearen Gleichung von zwei Variabeln als der Graph einer linearen Funktion darstellen.

Definition 3.2.5. *Bei einem Graphen einer Funktion, die eine Zahl als Eingabe vornimmt und eine Zahl als Ausgabe ergibt, sind die Punkte der Ebene so angeordnet, dass die Horizontal-Komponente die Eingabe ist und die Vertikal-Komponente die passende Ausgabe ist.*

Für eine lineare Funktion

$$f(x) = mx + b,$$

ist also b die Höhe für die Eingabe $x = 0$. Wie sieht der Graph aus?

Um einen Graphen zu zeichnen:

1. Wählen Sie einige bestimmte Eingabe aus und betrachten Sie die Ausgabe. Merken Sie sich diese Punkte.

2. Überlegen Sie was zwischen den Punkten passiert. Wenn Sie das verstanden haben, connect the dots.

Aufgabe: Es gab ein amerikanisches Fernsehprogramm namens “Pee Wee’s Playhouse.” Pee Wee hat ein Spiel “Connect The Dots.” Finden Sie ein Video online in dem Pee Wee dieses Spiel spielt und hören Sie sein kleines Lied “Connect the dots”

3.3 Aufgabe

1. Welche von den folgenden sind lineare Gleichungen?

$$\pi(ex - \sqrt{2}y)$$

$$e^{\sqrt{-1}\pi}x + y = 0$$

$$e^x - 3y = x$$

$$5x = 2y - 3x$$

$$2y - 3x$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

2. Was ist die Komposition $f \circ g$ der Funktionen :

$$f(x) = x - 3, \quad g(x) = 2x^2?$$

3. Was ist die Komposition $f \circ g$ der Funktionen :

$$f(x) = 3x - 4, \quad g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}?$$

4. Was ist die Umkehrfunktion der Funktion :

$$f(x) = 3\log_{10}(5x)?$$

5. Lösen Sie die Gleichung und zeichnen Sie alle Lösungen :

$$3x + 2y = 5.$$

6. Lösen Sie die Gleichung und zeichnen Sie alle Lösungen :

$$4(x - y) = 3x + 5.$$

7. Was ist die Umkehrfunktion für die Funktion

$$f(x) = 0.5x - 0.13?$$

8. Was ist die Umkehrfunktion für die Funktion

$$f(x) = 0.13x - 0.5?$$

9. * Der pH-Wert ist ein Maß für den sauren oder basischen Charakter einer wässrigen Lösung.

$$pH := -\log_{10}(a),$$

wobei

$$a = \frac{[H_3O^+]}{mol/L}.$$

Was ist die Umkehrfunktion für die Funktion $pH(a)$? Wenn Sie eine Lösung mit pH 1 (Batteriesäure z.B.) haben und eine Lösung mit pH 2 (Kola z.B.) haben, was ist die Beziehung zwischen $\frac{[H_3O^+]}{mol/L}$ in der ersten Lösung und $\frac{[H_3O^+]}{mol/L}$ in der zweiten Lösung?

10. Die Richterskala ist eine der gebräuchlichsten Magnitudenskalen, die in der Seismologie zum Vergleich der Stärke (Energiefreisetzung) von Erdbeben angewendet wird. Die Richterskala ist definiert durch :

$$R(A) = \log_{10}(A/A_0(\delta)),$$

wobei A das Maximum des Wood-Andersons Seismographs ist und $A_0(\delta)$ eine Funktion des Epizentrum-Abstands δ ist. Um wieviel grösser ist

$$\frac{A}{A_0(\delta)}$$

für ein Erdbeben mit

$$R(A) = 8$$

als

$$\frac{A}{A_0(\delta)}$$

für ein Erdbeben mit

$$R(A) = 6?$$

Kapitel 4

Systeme linearer Gleichungen I : Was ist die Matrix?

Wir haben zur Zeit lineare Gleichungen mit einem oder mit zwei Variabeln untersucht. Wir haben folgendes betrachtet :

1. Jede lineare Gleichung in einer Variabel x kann in der Form
$$ax = b$$
ersetzt werden, wobei $a \neq 0$. Die eindeutige Lösung der Gleichung ist
$$x = \frac{b}{a}.$$
2. Jede lineare Gleichung in zwei Variabeln x und y kann in der Form
$$y = mx + b$$
ersetzt werden, wobei $m \neq 0$. Der Graph der Funktion
$$f(x) = mx + b$$
darstellt alle Lösungen der linearen Gleichung.

Was passiert wenn wir mehr als eine Gleichung lösen müssen?

4.1 Linearegleichungssysteme

Fangen wir an mit einem Beispiel. Sie wollen den perfekten ,,Black Russian" mischen. Er soll genau 35 % Alkohol enthalten und Sie möchten genau 250 ml haben. Ein Black Russian ist eine Mischung von Wodka und Kahlua die auf Eis serviert wird. Wodka soll immer 40% Alkohol enthalten (Wodka ,mit 37,5 % ist technisch gesehen kein Wodka). Kahlua hat 20 % Alkohol. Wie viel von jedem sollen Sie hineinmischen? Um dies herauszufinden brauchen wir zwei lineare Gleichungen. Am einfachsten ist die Menge, da wir 250 mL haben wollen. Definieren wir also :

1. x ist die Menge in mL von Wodka ;
2. y ist die Menge in mL von Kahlua.

Da wir insgesamt 250 ml haben wollen, ist die erste Gleichung :

$$x + y = 250.$$

Jetzt zum Alkohol. Wir wollen 35 % Alkohol. Die ganze Menge des Getränks soll 250 ml sein, das heisst 35 % davon soll Alkohol sein. Was bedeutet 35 % ? Nicht zu vergessen :

$$35\% = \frac{35}{100}.$$

Dementsprechend betrachten wir :

$$35\% \text{ von } 250mL = \frac{35}{100} \times 250mL = 87,5mL.$$

Da Wodka 40 % Alkohol hat und Kahlua 20 %, haben wir die Gleichung :

$$40\% \text{ von } x + 20\% \text{ von } y = 87,5.$$

Da

$$40\% = \frac{40}{100}, \quad \text{und} \quad 20\% = \frac{20}{100},$$

können wir die zweite Gleichung so schreiben :

$$\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}y = 87,5.$$

Jetzt haben wir zwei Gleichungen :

$$x + y = 250,$$
$$\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}y = 87,5.$$

Was genau bedeutet eine Lösung mehrer Gleichungen?

Definition 4.1.1. *Mehr als eine (d.h. zwei oder mehr) lineare Gleichungen nennt man ein System linearer Gleichungen. Für ein System linearer Gleichungen in n Variabeln, die wir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nennen, ist eine Lösung eine Tabelle von n (reele) Zahlen, sodass wenn wir diese Zahlen beziehungsweise für die Variablen in den Gleichungen einsetzen, alle Gleichungen gelten.*

In unserem Beispiel haben wir nur zwei Variabeln und statt x_1 und x_2 haben wir die x und y genannt. Sie haben immer die Wahl Ihre Variabeln wie Sie möchten zu nennen. Wenn wir unser Beispiel in die Definition einsetzen, was ist "n?" Wir haben zwei Variabeln, das heisst "n" in der Definition in diesem Fall 2 ist. Eine Lösung ist denn eine Tabelle von zwei Zahlen die beide Gleichungen erfüllt.

In unserem Beispiel ist das schon klar, da wir zwei Zahlen finden wollen und die sind :

1. Die Menge Wodka in mL $= x$;
2. Die Menge Kahlua in mL $= y$.

Um die Gleichungen zu lösen, können wir folgendes tun :

1. Erst schreiben wir eine Gleichung um, damit eine Variabel ganz allein auf einer Seite steht. In dem Beispiel mussen wir dies mit der ersten Gleichung tun :

$$x + y = 250.$$

Wir können x von beiden Seiten subtrahieren, und dann haben wir :

$$x + y - x = 250 - x,$$

und da $x + y - x = y$ ist, haben wir

$$y = 250 - x.$$

2. Danach setzen wir in der anderen Gleichung statt y was auf der andere Seite steht : $250 - x$ ein. Schreiben wir also die andere Gleichung :

$$\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}(250 - x) = 87,5.$$

Jetzt haben wir eine Gleichung in einer Variabel. Wir wissen schon wie man eine Gleichung in einer Variabel löst! Gefallen Ihnen die beiden Brüche? Mir nicht. Ich will die wegschaffen. Um das zu tun, können wir die ganze Gleichung mit 100 multiplizieren :

$$100\left(\frac{40}{100}x + \frac{20}{100}(250 - x)\right) = 87,5 \times 100.$$

Diese können wir vereinfachen :

$$40x + 20(250 - x) = 8750.$$

Wir können diese 20 durch multiplizieren :

$$40x + 20 \times 250 - 20 \times x = 8750.$$

Wir können noch weiter vereinfachen :

$$40x - 20x + 5000 = 8750.$$

Da $40x - 20x = 20x$ haben wir

$$20x + 5000 = 8750.$$

Jetzt können wir 5000 von beiden Seiten subtrahieren :

$$20x + 5000 - 5000 = 8750 - 5000,$$

und wir können wieder vereinfachen :

$$20x = 3750.$$

Jetzt müssen wir nur beide Seiten durch 20 teilen :

$$20x \div 20 = 3750 \div 20.$$

Mit $20x \div 20 = x$, und $3750 \div 20 = 187,5$, haben wir herausgefunden :

$$x = 187,5.$$

Wir wollen also $187,5$ ml Vodka in unseren Black Russian.

3. Nach Sie den Wert einer Variabel gefunden haben, setzen Sie diesen Wert in die Gleichung, die Sie im Schritt 1 gefunden haben. In unserem Beispiel heisst das :

$$y = 250 - x \textbf{ setzen wir in dieser Gleichung } x = 187,5 \textbf{ also } y = 250 - 187,5.$$

Da

$$250 - 187,5 = 62,5,$$

haben wir

$$y = 62,5.$$

Sie haben also gefunden, dass um 250 ml Black Russian mit 35 % Alkohol zu mischen, brauchen Sie

1. 187,5 ml Wodka und
2. 62,5 ml Kahlua.

Hier sind noch zwei Beispiele.
Beispiel: Lösen wir das System :

$$x + y = 10$$

$$4x + 4y = 20.$$

Wie beim letzten Beispiel können wir zuerst die erste Gleichung für y lösen :

$$x + y = 10 \implies y = 10 - x.$$

Jetzt setzen wir statt y $10 - x$ in die zweite Gleichung :

$$4x + 4(10 - x) = 20.$$

Wir können diese vereinfachen :

$$4x + 40 - 4x = 20.$$

Bemerken Sie irgendwas komisches? Wir haben auf der linken Seite $4x + 40 - 4x$ und diese ist gleich 40. Dementsprechend kommen wir zu der Gleichung :

$$40 = 20.$$

Das kann nicht sein! Was bedeutet dies?

> *In diesem Beispiel gibt es keine Lösungen.*

Hier ist ein anderes Beispiel.
Beispiel: Lösen wir das System :

$$x + y = 10$$

$$4x + 4y = 40.$$

Wie eben können wir zuerst die erste Gleichung für y lösen :

$$x + y = 10 \implies y = 10 - x.$$

Jetzt setzen wir statt y $10 - x$ in die zweite Gleichung :

$$4x + 4(10 - x) = 40.$$

Wir können diese vereinfachen :

$$4x + 40 - 4x = 40.$$

Dementsprechend kommen wir zu der Gleichung :

$$40 = 40.$$

Diese Gleichung gilt immer! Was bedeutet dieses Phänomen?

> *In diesem Beispiel ist jedes Paar (x, y) wobei $y = 10 - x$ eine Lösung des Gleichungssystems.*

ist. In diesem Beispiel können wir wie im letzten Kapitel alle Lösungen zeichnen. Die Lösungen sind die Paare (x, y) wobei

$$y = 10 - x.$$

Wir haben also folgendes erfahren :

1. Für eine Gleichung in einer Variabel gibt es eine eindeutige Lösung der Gleichung.

2. Für eine Gleichung in zwei Variabeln gibt es viele Lösungen (das heisst unendlich viele!)

3. Für zwei Gleichungen in zwei Variabeln folgendes passieren können :

   (a) Es gibt eine eindeutige Lösung.

   (b) Es gibt keine Lösung.

   (c) Es gibt unendlich viele Lösungen (eine ganze Leine Lösungen wie im letzten Beispiel).

Man kann für jedes System von linearen Gleichungen in mehreren Variabeln entscheiden ob es eine Lösung gibt und falls ja, ob es nur eine gibt, oder ob es mehrere gibt und wie man alle Lösungen darstellen kann (wie mit einer Gleichung in zwei Variabeln im letzten Kapitel). Bitte erschrecken Sie nicht, wenn es mehr als zwei Variabeln gibt. Das Prinzip ist immer dasselbe : für eine Variabel, für zwei Variabeln, sowie für drei und mehr Variabeln. Nur wenn es unendlich viele Variabeln gibt, können Sie sich erschrecken. Man kann die Lösungen am besten mithilfe einer Matrix darstellen.

4.2 Was ist die Matrix?

Fangen wir nochmal mit einem Beispiel an. Sie sind Sportler und Sie brauchen für Ihr Training den perfekten Eiweiss-Shake. Der Shake soll 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker, und insgesamt 500 Gramm sein. Die Zutaten, die Sie zusammen mischen werden sind : Milch, Eiweisspulver, frische Bananen und Erdbeeren. Diese Zutaten haben folgend Nährwerte :

1. Milch hat 3 g Eiweiss pro 100 Gramm, 5 g Zucker, und 42 kCal.

2. Frische Bananen haben 89 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 12 g Zucker.

3. Eiweisspulver hat 401 kCal pro 100 Gramm, 31 g Eiweiss, und 0 g Zucker.

4. Erdbeeren haben 32 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 5 g Zucker.

Wie viel Gramm sollen Sie von jeder Zutat zusammenmischen?

Der erste Schritt ist immer : das Problem zu analysieren und das Gleichungssystem erfinden. Sie können genau dasselbe mit 3, 4, 5, oder Tausenden von Variabeln tun. Das Prinzip ist immer dasselbe.

Erst definieren wir die Variabel : m ist die Menge Milch in Gramm, b ist die Menge Bananen in Gramm, p ist die Menge Eiweisspulver in Grams, und s ist die Menge Erdbeeren in Gramm. Zuerst berechnen wir die kCal :

$$42 * \frac{m}{100} + 89 * \frac{b}{100} + 401 * \frac{p}{100} + 32 * \frac{s}{100} = 400.$$

Vielleicht fragen Sie sich warum wir immer durch 100 geteilt haben? Der Grund dafür ist : Milch hat 42 kCal pro 100 Grams, was heisst m Gramm Milch hat

$$42 * \frac{m}{100}$$

kCal. Jetzt berechnen wir den Eiweiss :

$$3 * \frac{m}{100} + 1 * \frac{b}{100} + 31 * \frac{p}{100} + 1 * \frac{s}{100} = 25.$$

Jetzt berechnen wir den Zucker :

$$5 * \frac{m}{100} + 12 * \frac{b}{100} + 5 * \frac{s}{100} = 20.$$

Als letztes berechnen wir die ganze Menge :

$$m + b + p + s = 500.$$

Das Gleichungssystem ist dementsprechend :

$$\begin{gathered} 42 * \frac{m}{100} + 89 * \frac{b}{100} + 401 * \frac{p}{100} + 32 * \frac{s}{100} = 400. \\ 3 * \frac{m}{100} + 1 * \frac{b}{100} + 31 * \frac{p}{100} + 1 * \frac{s}{100} = 25. \\ 5 * \frac{m}{100} + 12 * \frac{b}{100} + 5 * \frac{s}{100} = 20. \\ m + b + p + s = 500. \end{gathered}$$

Wir können dieses Gleichungssystem am besten mithilfe einer Matrix verstehen . Mit einer Matrix können wir das Gleichungssystem ähnlich wie eine Gleichung in einer Variabel schreiben :

$$MX = B.$$

In diesem Beispiel ist M die Matrix

X ist die Tabelle Variabeln :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

B ist die Tabelle der rechten Seiten (Zahlen):

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Wie multipliziert man M mit X? Dafür brauchen wir einige Definitionen.

Definition 4.2.1. *Eine Matrix ist eine bestimmte Tabelle von Zahlen oder Variabeln. Eine $n \times m$ Matrix hat genau n Zeilen und m Spalten. Eine $n \times m$ Matrix M kann nur mit einer Matrix mit m Zeilen auf der rechten Seite multipliziert werden. Falls N eine $m \times k$ Matrix ist, dann ist das Ergebnis $M \times N$ eine $n \times k$ Matrix. Eine $n \times m$ Matrix M kann nur mit einer Matrix mit n Spalten auf der rechten Seiten multipliziert werden und falls K eine $j \times n$ Matrix ist, dann ist das Ergebnis $K \times M$ eine $j \times m$ Matrix.*

Sehr wichtig zu merken ist : Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ. Um Matrix-Multiplikation kennen zu lernen, führen wir einige Beispiele durch. Fangen wir an mit einem Sonderfall. Matrizen mit nur einer Spalte nennt man ein Spalten-Vektor und Matrizen mit nur einer Zeile nennt man ein Zeilen-Vektor. Nach der Definition können wir nur :

> *Ein $1 \times n$ Zeilen-Vektor mit einem $n \times 1$ Spalten-Vektor auf der rechten Seite multiplizieren.*

Was wird das Ergebnis? Nach der Definition ist das Ergebnis eine 1×1 Matrix. Machen wir einige Beispiele.

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Matrix-Multiplikation folgt derselben Regel wie einige asiatische Schriften : links-rechts und oben-unten. Ich stelle mir vor, dass die Matrix auf der linken Seite die Matrix auf der rechten Seite mit einer Waffe beschiesst : erst schiesst die 1 auf 1 aber es klappt nicht. Daneben! Dann versucht sie nochmal : die 2 schiesst auf die 2. Es klappt leider auch nicht. Letzter Versuch : die 3 schiesst auf die 3. Das Ergebnis ist :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 1 + 2 * 2 + 3 * 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

2. Noch ein Beispiel
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   Wie eben schiessen wir mit der linken Matrix auf die rechte Matrix. Das heisst erst schiesst die 1 auf die 5 und danach schiesst die -1 auf die 7 und das Ergebnis ist also :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 5 + (-1) * 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

Jetzt machen wir einige Beispiele in denen die Matrix auf der linken Seite mehr als eine Spalte hat.

1. In diesem Fall ist M die Matrix
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
Diese Matrix hat 2 Zeilen sowie 2 Spalten. Wir können diese Matrix mit Matrizen mit 2 Zeilen multiplizieren. Mit welchen der folgenden können wir M auf der rechten Seite multiplizieren?
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$
Sie müssen nur die Spalten zählen. Die erste Matrix hat 3, die zweite hat auch 3, und die letzte zwei Matrizen haben jeweils zwei Spalten. Dementsprechend können wir nur die letzten zwei Matrizen mit M auf der rechten Seite multiplizieren. Wie funktioniert Matrix-Multiplikation? Machen wir das Beispiel $M \times C$. Matrix-Multiplikation ist genau Zeile-Vektor mit Spalte-Vektor Multiplikation wie eben, nur mehrmals. Zuerst multipliziert man die oberste Zeile von M mit der Spalte ganz links von C:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 1 + 2 * 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}.$$
Jetzt bleiben wir bei der ersten Zeile von M und multiplizieren diese mit der nächsten Spalte links von C :
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 3 + 2 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$
Diese setzen wir neben dem 9 also ist die erste Zeile des Ergebnisses :
$$\begin{bmatrix} 9 & 7 \end{bmatrix}$$
Jetzt machen wir das gleiche mit der zweiten Zeile von M :
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 1 + 4 * 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}.$$
Und jetzt mit der zweiten Spalte von C :
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 3 + 4 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}.$$

Diese erzeugt die zweite Zeile des Ergebnisses und wir haben :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 19 & 17 \end{bmatrix}$$

2. Jetzt multiplizieren wir M mit C auf der linken Seite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Wie eben geht es von links nach rechts und von oben nach unten. Erst multiplizieren wir die erste Zeile von M mit der ersten Spalte von D:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 2 + 2 * 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$$

Jetzt multiplizieren wir die erste Zeile von M mit der zweiten Spalte von D :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 3 + 2 * 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}.$$

Multiplizieren wir jetzt die erste Zeile von M mit der letzten Spalte von D :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 4 + 2 * 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix}.$$

Wir sind jetzt mit der ersten Zeile von M fertig und wir haben die erste Zeile des Ergebnisses :

$$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Jetzt machen wir das gleiche mit der zweiten Zeile von M :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 2 + 4 * 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 3 + 4 * 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 4 + 4 * 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \end{bmatrix}$$

Wir haben dann die zweite Zeile des Ergebnisses :

$$\begin{bmatrix} 26 & 33 & 40 \end{bmatrix}$$

Dementsprechend ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 26 & 33 & 40 \end{bmatrix}$$

Allgemeiner können wir Matrix-Multiplikation so verstehen : wir schreiben R_1, R_2, ... R_m um die m Zeilen von einer Matrix M zu bezeichnen. Jede Zeile ist eine $1 \times n$ Zeile-Vektor. Wenn wir M mit einer $n \times k$ Matrix X auf der rechten Seite multiplizieren, schreiben wir die Spalte von X als $n \times 1$ Spalte-Vektoren : S_1, S_2,... S_k. Das Ergebnis

$$M \times X = \begin{bmatrix} R_1 \times S_1 & R_1 \times S_2 & \dots & R_1 \times S_k \\ R_2 \times S_1 & R_2 \times S_2 & \dots & R_2 \times S_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_m \times S_1 & R_m \times S_2 & \dots & R_m \times S_k \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis ist dementsprechend eine Matrix mit m Zeilen und k Spalten. Beschreiben wir Matrix-Multiplikation etwas genauer . Schreiben wir eine Matrix M mit n Zeilen und m Spalten so :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wir können noch kürzer schreiben :

$$M = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

Die Bedeutung von a_{ij} ist was in der i Zeile und j Spalte steht.

4.3 Aufgabe

1. Sie haben Lust einen ,,Black Russian" zu probieren. Sie finden aber, dass die Menge 250 ml zuviel für Sie wäre, und Sie wollen die Mischung etwas schwächer haben. Wie viel Wodka und wie viel Kahlua sollen Sie anwenden, um einen 100 mL Black Russian mit 25 % Alkohol zu machen?

2. Was sind die Lösungen des Gleichungssystems :

$$x - 2y = 3$$

$$6y - 3x = -9$$

?

3. Was sind die Lösungen des Gleichungssystems :

$$x - 2y = 7$$

$$6y - 3x = 14$$

?

4. Was sind die Lösungen des Gleichungssystems :

$$x - 2y = 3$$

$$6x - 3y = 14$$

?

5. Berechnen Sie das Produkt :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Berechnen Sie das Produkt :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Berechnen Sie das Produkt :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

8. Ihr Freund ist Sportler und er mag keine Bananen. Er will ein Eiweiss-Shake mit 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker, und insgesamt 500 Gramm nur aus Milch, Eiweisspulver, und Erdbeeren. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem dafür und danach schreiben Sie das System als das Produkt einer Matrix mit einem Spalten-Vektor der Variabeln.

   (a) Milch hat 3 g Eiweiss pro 100 Gramm, 5g Zucker, und 42 kCal.

   (b) Eiweisspulver hat 401 kCal pro 100 Gramm, 31 g Eiweiss, und 0 g Zucker.

   (c) Erdbeeren haben 32 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 5 g Zucker.

9. Sie haben gerade "The Big Lebowski" gesehen und Sie haben Lust auf einen „White Russian" (wie "The Dude"). In einen White Russian kommt auch Milch. Sie möchten einen 200ml White Russian machen der 25 % Alkohol hat. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem dafür und danach schreiben Sie das System als das Produkt einer Matrix mit einem Spalten-Vektor der Variabeln.

10. Sie haben gerade "Sex and the City" gesehen und Sie haben Lust auf einen „Cosmopolitan." Ein Cosmo enthält Cranberrysaft, Wodka, und Triple Sec. Sie möchten genau 200 mL haben und Sie möchten dass es weder zu stark, noch zu süß ist. Dementsprechend wollen Sie 25% Alkohol und 20 % Zucker haben. Triple Sec enthält 40 % Alkohol und 25 % Zucker; Cranberrysaft enthält 20 % Zucker. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem dafür und danach schreiben Sie das System als das Produkt einer Matrix mit einem Spalten-Vektor der Variabeln.

Kapitel 5

Systeme linearer Gleichungen II : Die Matrix gelöst

Sie haben bereits den Teil eines wichtiges Prinzips gesehen:

> **Prinzip:** *Es kann nur eine eindeutige Lösung geben wenn die Anzahl Gleichungen grösser oder gleich der Anzahl Variablen ist. Wenn man mehr Variablen als Gleichungen hat, dann gibt es auch unendlich viele andere Lösungen, wenn es eine Lösung gibt.*

Um das **Prinzip** zu verstehen, können Sie sich vorstellen, dass jede Variable ein verspielter Hund ist. Jede Variable kann in eine Richtung entweder vorwärts oder ruckwärts (wie auf seinem eigenem Zahlenstrahl) rennen. Nur mit einer Gleichung können Sie genau eine Variable einschränken. Entweder tut die Gleichung nichts oder die Gleichung ist wie eine Einschränkung in zwei Richtungen, wie eine Leine. Das heisst, dass wenn Sie alle Variablen einschränken wollen, damit sie nicht weg rennen können, brauchen Sie mindestens genauso viele Gleichungen, wie Variablen. Eine eindeutige Lösung ist, wenn alle Variablen eingeschränkt sind. Dementsprechend braucht man mindestens so viele Gleichungen wie Variablen, damit es eine eindeutige Lösung der Gleichungen gibt.

5.1 Die Identiätsmatrix : Das neutrale Element für Matrix-Multiplikation

Was passiert wenn Sie eine 3×3 Matrix M mit der folgenden Matrix auf der linken Seite multiplizieren :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Schreiben wir :

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Zuerst betrachten wir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = a.$$

Danach betrachten wir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} = b,$$

sowie :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = c.$$

Dementsprechend ist die erste Zeile des Produkts

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}.$$

Als nächstes betrachten wir die zweite Zeile des Produkts. Diese vergleichen wir mit der zweiten Zeile der linken Matrix :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = d.$$

Danach betrachten wir :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} = e,$$

sowie :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = f.$$

Dementsprechend ist die zweite Zeile des Produkts

$$\begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}.$$

Was denken Sie passiert wenn wir die dritte Zeile betrachten? Zuerst :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = g.$$

Danach haben wir :

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}b\\e\\h\end{bmatrix} = h,$$

sowie :

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}c\\f\\i\end{bmatrix} = i.$$

Dementsprechend ist die dritte Zeile des Produkts :

$$\begin{bmatrix}g & h & i\end{bmatrix}.$$

Wir haben betrachtet :

$$I \times M = M.$$

Dieses Phänomen gilt immer.

Aufgabe : Berechnen Sie

$$M \times I.$$

Dieses Beispiel führt uns zum folgenden Beispiel.

Definition 5.1.1. *Es sei I eine $n \times n$ Matrix sodass in der k^{te} Zeile, das k^{te} Element gleich 1 ist und alle anderen Elemente der Zeile gleich 0 sind. Dann gilt für jede Matrix M mit n Zeilen und m Spalten :*

$$I \times M = M.$$

Für jede Matrix M mit m Spalten und n Zeilen gilt :

$$M \times I = M.$$

Die Matrix I nennt man die Identitätsmatrix. Sie ist das neutrale Element für Matrix-Multiplikation.

Die Identitätsmatrix sieht so aus : auf der Diagonale ist immer 1 und alles andere ist immer 0.

Nehmen wir an, dass wir ein Gleichungssystem haben :

$$MX = B,$$

wobei

$$X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix},$$

$$M = I,$$

und

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Was bedeutet dieses System? Da $M = I$, ist (nach der Definition I)

$$MX = X.$$

Das heisst, dass es eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems gibt und diese ist

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_1, \dots x_n = b_n,$$

was wir auch so schreiben können

$$x_k = b_k, \quad \text{für jede} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ich freue mich wenn ich so ein Gleichungssystem habe, weil es schon für mich gelöst wurde! Was ist Ihre Meinung? Wir wollen jedes Gleichungssystem als ein Gleichungssystem :

$$IX = B \implies X = B$$

schreiben. Dafür brauchen wir die Inverse-Matrix.

5.2 Die Inverse-Matrix

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass wir jedes lineare Gleichungssystem mit n Variablen und m Gleichungen so schreiben können :

$$MX = B,$$

wobei M eine $m \times n$ Matrix ist, X ein n-Spalten-Vektor ist, und B ein m-Spalten-Vektor ist.

Was wollen Sie tun, um das Gleichungssystem zu lösen?

Ich will durch M teilen. Wie können wir durch eine Matrix teilen?

Definition 5.2.1. *Es sei M eine $n \times n$ Matrix. Falls es eine $n \times n$ Matrix N gibt, sodass gilt :*

$$MN = NM = I,$$

dann ist N die Inverse-Matrix zu M und wir schreiben :

$$N = M^{-1}.$$

Falls M genau so viel Spalten wie Zeilen hat und falls es eine M^{-1} gibt, dann gilt :

$$MX = B \implies M^{-1}MX = M^{-1}B.$$

Wie immer können wir eine Gleichung umschreiben nur genau dann, wenn wir genau dasselbe auf beiden Seiten tun. In diesem Fall multiplizieren wir auf der linken Seite mit M^{-1} auf beiden Seiten der Gleichung. Nach der Definition ist :

$$M^{-1}M = I$$

und

$$IX = X.$$

Dementsprechend haben wir :

$$X = M^{-1}B.$$

Gelöst! Geschafft! Wir müssen nur verstehen, wie wir diese berechnen können. Dafür gibt es die Zeilen-Operation.

5.2.1 Die Zeilen-Operationen

Nur die folgenden Operationen sind uns erlaubt :

1. Wir können eine Zeile R mit einer anderen Zeile R' vertauschen. Zum Beispiel :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

2. Wir können eine Zeile R mit einer Zahl multiplizieren :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5a & 5b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

3. Wir können eine Zeile R mit einer anderen Zeile addieren :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Um ein Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen zu lösen schreiben wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} M & || & B \end{bmatrix}$$

Dann machen wir die erlaubten Zeilen-Operationen mit den ganzen Zeilen bis wir auf der linken Seite eine der folgenden haben :

1. Die Identität steht auf der linken Seite der Trennung $||$;

2. Eine oder mehrere Zeilen auf der linken Seite der Trennung || sind komplett null und folgendes gilt :
   (a) In jeder Zeile die nicht komplett null ist,ist das erste Element das ungleich null ist, eine 1, die wir eine führende eins nennen.
   (b) In jeder Spalte die eine führende eins enthält, sind alle anderen Elemente der Spalte null.
   (c) Die führende eins geht von links nach rechts. Das heisst : in zwei Zeilen die nebeneinander sind und die nicht komplett null sind, ist die führende eins der unteren Zeile weiter rechts als die führende eins der oberen Zeile.
   (d) Die Zeilen, die komplett null sind, sind die untersten Zeilen der Matrix.

Im Fall 1 gibt es eine eindeutige Lösung, die Sie in der Matrix nach der Trennung || lesen können. Im Fall 2 gibt es zwei Möglichkeiten : wenn auf der linken Seite der Trennung eine Zeile null ist aber auf der rechten Seite der Trennung eine Zahl die ungleich null steht, dann gibt es keine Lösungen des Systems. Wir nennen so eine Zeile eine schlechte Zeile. Falls es keine schlechte Zeile gibt, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

Am besten machen Sie viele, viele Beispiele damit Sie sich mit den Regeln und mit diesem Prozess wohl fühlen. Beispiele werden an der Tafel in der Vorlesung gemacht... Jetzt können Sie jedes lineare Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen lösen! Der letzte Schritt ist lineare Gleichungssysteme mit n Variablen und m Gleichungen zu lösen. Dann können Sie richtig stolz sein.

5.3 Die Pseudo-Inverse-Matrix : RREF

Nehmen wir an, dass Sie ein lineares Gleichungssystem lösen wollen : es gibt n Variablen und m Gleichungen. Das System sieht so aus :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sie können dieses System mit der Matrix

$$M = [a_{ij}]$$

darstellen. Die Hauptfrage ist : wann gibt es eine Lösung und wenn ja, wie viele gibt es? Falls $m \neq n$ dann gibt es keine Inverse-Matrix. Statt dessen gibt es immer eine RREF.

5.3.1 RREF hat die Matrix gelöst!

Was bedeutet RREF? Es stammt aus dem Englischen :

Reduced Row Echelon Form

Wie machen wir das RREF einer Matrix? Wir verfahren genau wie mit einer $n \times n$ Matrix : die Zeilen-Operationen. Wir „reduzieren" immer von links nach rechts. Wir machen die Zeile Operationen bis zum folgenden Ziel :

1. In jeder Zeile die nicht komplett null ist, ist das erste Element das ungleich null ist, eine 1, die wir eine führende eins nennen.

2. In jeder Spalte die eine führende eins enthält, sind alle andere Elemente der Spalte null.

3. Die führende eins geht von links nach rechts. Das heisst : in zwei Zeilen die nebeneinander sind und die nicht komplett null sind ist die führende eins der unteren Zeile weiter nach rechts als der führende eins der oberen Zeile.

4. Die Zeilen die komplett null sind die untersten Zeilen der Matrix.

Satz 5.3.1. *Es sei M eine Matrix. Mit den Zeilen-Operationen gibt es genau eine Matrix, die die oberen 4 Bedingungen erfüllt. Diese nennen wir das RREF von M.*

Wir brauchen jetzt nur noch eine Definition damit das RREF uns die Lösungen gibt.

Definition 5.3.2. *Die Anzahl Zeilen des RREF, die ungleich null sind, sind der Rang der Matrix M. Jede Spalte mit einer führenden eins nennen wir eine geführte Spalte. Jede Spalte ohne eine führende eins nennen wir eine freie Spalte.*

Jetzt kommen wir zum Ziel.

Satz 5.3.3. *Es sei M die Matrix für das lineare Gleichungssystem und B der Spalten-Vektor auf der rechten Seite des Systems. (Das heisst, dass B ein Spalten-Vektor nur Zahlen und keine Variablen enthält.) Wenn Sie die Zeilen-Operationen mit der folgenden Matrix durchführen :*

$$\begin{bmatrix} M & || & B \end{bmatrix}$$

bis das RREF-M auf der linken Seite steht, dann gilt :

1. *Falls es eine schlechte Zeile gibt, dann gibt es keine Lösung.*

2. *Falls es keine schlechte Zeile gibt, dann gibt es eine eindeutige Lösung genau dann, wenn der Rang des RREF gleich der Anzahl Variablen ist. Das heisst, dass es eine eindeutige Lösung gibt, genau dann wenn es keine schlechte Zeile gibt, und jede Spalte geführt ist.*

3. *Falls es keine schlechte Zeile gibt und der Rang der RREF kleiner als die Anzahl Variablen ist, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Das heisst, dass es unendlich viele Lösungen gibt genau dann wenn es keine schlechte Zeile gibt und es einige freie Spalten gibt.*

Machen wir einige Beispiele an der Tafel :

1. Welche der folgenden sind RREF?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Berechnen Sie das RREF der folgenden Matrizen :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Für das Gleichungssystem berechnen Sie das RREF der Matrix M mit B getrennt auf der rechten Seite :

$$\begin{bmatrix} M & || & B \end{bmatrix}$$

und entscheiden Sie ob folgende Systeme eine eindeutige Lösung haben (was ist sie?), keine Lösungen haben, oder unendlich viele Lösungen haben (was sind sie?)

(a)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da jede Spalte entweder frei oder geführt ist, gilt immer :

> *Die Anzahl freier Spalten plus die Anzahl geführter Spalten ist gleich der Anzahl Spalten n.*

Wir können jetzt zwischen zwei Fällen unterscheiden : ist die Matrix gross und dünn oder ist sie kurz und dick? Beim ersten Fall gibt es mehre Gleichungen als Variable, also ist es möglich, dass alle Variablen von den Gleichungen eingeschränkt werden können. Sie können sich in diesem Fall vorstellen, dass die Matrix wie eine grosse, dünne, strenge Frau ist, die mit n Hunden an m Leinen spaziert. Das ist aber nur der erste Augenblick : es kann sein, dass die Frau nur streng aussieht und dass einige Gleichungen nichts tun, (wie diese Leinen, die nicht fest sind) und in diesem Fall kann es sein, dass die Variable, noch spielen können und es unendlich viele Lösungen gibt. Es ist auch möglich, dass die Variable zu eng eingeschränkt sind und deswegen sterben und dies bedeutet, dass es keine Lösung gibt. Um diese herauszufinden brauchen wir das RREF. Das RREF erzählt die Persönlichkeit der Matrix.

Beim zweiten Fall gibt es mehr Variablen als Gleichungen, also ist es unmöglich dass sie alle eingeschränkt werden können. In diesem Fall gibt es nur zwei Möglichkeiten : entweder gibt es unendlich viele Lösungen, oder es gibt keine. In diesem Fall haben die Variablen-Hunde einen kurzen dicken Führer der entweder alles erlaubt oder gar nichts erlaubt. Um dies herauszufinden brauchen wir auch das RREF.

Nach den Regeln der Matrix-Multiplikation passt jede Spalte zu genau einer Variable. Eine freie Spalte bedeutet, dass die Variable frei ist und eine geführte Spalte bedeutet, dass die Variable geführt ist. Um die Lösungen darzustellen, brauchen wir noch einige Definitionen.

Definition 5.3.4. *Eine Menge ist eine Sammlung von Elementen. Für eine Menge M schreibt man*

$$e \in M$$

um zu zeigen dass e ein Element der Menge M ist. Die Menge aller $n \times 1$ Spalten-Vektoren, deren Elemente reelle Zahlen sind, ist $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion F die als Eingabe ein Element von $\mathbb{R}^n$ vornimmt und als Ausgabe ein Element von $\mathbb{R}^m$ ergibt, sodass es eine $m \times n$ Matrix M und eine $B \in \mathbb{R}^m$ gibt und es somit gilt :

$$F(X) = MX + B$$

für jede $X \in \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Funktion.

Wenn wir ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und m Gleichungen gelöst haben, dann kann die Menge aller Lösungen als Graph einer linearen Funktion dargestellt werden, mit Eingabe der Elemente $\mathbb{R}^k$, wobei k die Anzahl freie Spalte ist, mit Ausgabe der Elemente von $\mathbb{R}^{n-k}$. Dieses können Sie am besten mit Beispielen lernen. Diese werden an der Tafel durchgeführt!

Bemerkung 5.3.5. In der Zukunft können Sie einen Computer anwenden um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Sie müssen aber wissen wie Sie die Information eingeben, das heisst, was ist M sowie B? Danach kann der Computer die Zeilen-Operationen durchführen. Am Ende müssen Sie verstehen was die Ausgabe des Computers bedeutet. Dementsprechend ist das Material dieses Kapitels nützlich für Sie. Der Computer kann Ihnen leider nicht erklären wie Sie ein lineares Gleichungssystem eingeben, damit er es lösen kann und er kann auch nicht erklären, was seine Ausgabe bedeutet. Nur Sie, ein kluger Mensch, konnen das.

5.4 Aufgabe

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem :

$$x - z = 3$$

$$x + 2y = 4$$
$$2y + 3z = 8.$$

2. Ihr Assistent hat das folgende lineare Gleichungssystem gelöst :

$$x - y = 10$$
$$2x - 2y = 200.$$

   Er erzählt Ihnen, dass es eine eindeutige Lösung gibt. Hat er recht? Warum oder warum nicht?

3. Berechnen Sie das RREF folgender Matrix :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Berechnen Sie das RREF folgender Matrix :

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Wie viele Lösungen hat folgende Gleichungssystem? Berechnen Sie alle Lösungen.

$$x - 3y + z = 10$$
$$3x - y + z = -1$$

6. * Sie sind Sportler und Sie brauchen für Ihr Training den perfekten Eiweiss-Shake. Der Shake soll 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker enthalten und insgesamt 500 Gramm wiegen. Die Zutaten die Sie zusammenmischen werden sind : Milch, Eiweisspulver, frische Bananen und Erdbeeren. Diese Zutaten haben folgende Nährwerte :

   (a) Milch hat 3 g Eiweiss pro 100 Gramm, 5g Zucker, und 42 kCal.
   (b) Frische Bananen haben 89 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 12 g Zucker.
   (c) Eiweisspulver hat 401 kCal pro 100 Gramm, 31 g Eiweiss, und 0 g Zucker.
   (d) Erdbeeren haben 32 kCal pro 100 Gramm, 1 g Eiweiss, und 5 g Zucker.

   Wie viel Gramm sollten Sie von jeder Zutat zusammenmischen? Berechnen Sie alle Lösungen.

7. * Wie können Sie ein Eiweiss-Shake mit 400 Kcal, 25 Gramm Eiweiss, 20 Gramm Zucker, und insgesamt 500 Gramm nur aus Milch, Eiweiss Pulver, und Erdbeeren für Ihren Freund machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

8. * Sie haben gerade “The Big Lebowski” gesehen und Sie haben Lust auf einen ,,White Russian” (wie “The Dude”). In einen White Russian kommt auch Milch. Sie möchten ein 200ml White Russian machen der 25 % Alkohol hat. Wie können Sie das machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

9. Sie haben gerade “Sex and the City” gesehen und Sie haben Lust auf einen ,,Cosmopolitan.” Ein Cosmo enthält Cranberrysaft, Wodka, und Triple Sec. Sie möchten genau 200 mL haben und Sie möchten dass es weder zu stark, noch zu süß ist. Dementsprechend wollen Sie 25% Alkohol und 20 % Zucker haben. Triple Sec enthält 40 % Alkohol und 20 % Zucker; Cranberry Saft enthält 15 % Zucker. Wie können Sie den perfekten ,,Cosmo” machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

10. Ich habe auch Lust auf einen ,,Cosmopolitan,” aber ich will meinen noch ein bisschen grösser und stärker haben. Ich möchte genau 250 mL mit 30% Alkohol und 20 % Zucker haben. Triple Sec enthält 40 % Alkohol und 20 % Zucker; Cranberry Saft enthält 15 % Zucker. Wie soll ich meinen perfekten ,,Cosmo” machen? Berechnen Sie alle Lösungen.

Kapitel 6

Alles im Modellfall : Die Ableitungsfunktion

Sie haben möglicherweise schon von der Ableitungsfunktion gehört und die folgende Definition gesehen.

Definition 6.0.1. *Es sei f eine Funktion deren Eingabe und Ausgabe Elemente in $\mathbb{R}$ sind. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert, dann ist $f'(x)$ als dieser Grenzwert definiert und man nennt f ableitbar in dem Punkt x.

Warum interessiert man sich überhaupt für so einem Grenzwert?

Beispiel 1: Sie haben eine Probe deren

$$a = \frac{[H_3O^+]}{mol/L} = 0,011.$$

Ihr Instrument zeigt dass die Probe einen pH Wert von $1,900$ hat, wobei

$$pH := -\log_{10}(a).$$

Stimmt das Instrument?

Beispiel 2: Es gab gerade eine Erdbeben deren

$$(A/A_0(\delta)) = 10000001.$$

Man erinnert sich, dass

$$R(A) = \log_{10}(A/A_0(\delta)).$$

Sie wissen nicht, ob ihr Computer richtig kalibriert worden ist, da dies ihr Assistent übernommen hat. Der Computer zeigt $R(A) = 7,0200$.

Beispiel 3: Sie haben leider nicht bist kurz vor der Klausur Mathematik gelernt, sind dementsprechend durchgefallen, aus der Uni rausgeworfen und Bauarbeiter geworden. Leider sind Sie auch in diesem Beruf faul und ihr Chef ist nicht mit ihnen zufrieden. Er gibt Ihnen eine letzte Chance. Sie bauen ein Gebäude und natürlich soll die Wand mit dem Boden in einem 90 Grad Winkel stehen. Der Boden ist 10 m breit und die Wand ist 3 m hoch. Ihnen stehen nur ein Maßband und zwei Bauarbeiter, die ihnen helfen können aber kein Deutsch sprechen, zur Verfügung. Diese können unr sehr einfache Handkommunikation verstehen.

Alle diese Aufgabe können ohne Taschenrechner gelöst werden. Betrachten wir das erste Beispiel. Sie wollen

$$-\log_{10}(0.011)$$

berechnen. Es sei

$$f(x) = -\log_{10}(x).$$

Was ist

$$f(0.01)?$$

Man erinniert sich, dass

$$0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}.$$

Nach der Definition des Logarithmuses ist

$$f(0.01) = -\log_{10}(10^{-2}) = 2.$$

Die Eingabe 0.011 ist

$$0.011 = 0.01 + 0.001.$$

Diese Eingabe ist nahezu eine Eingabe die berechnet werden kann.

Um den pH Wert zu berechnen können wir die Ableitungsfunktion benutzen. Die Ableitungsfunktion kann auch so definiert werden. Diese Definition ist mathematisch gleich der ersten.

Definition 6.0.2. *Eine Funktion deren Eingabe und Ausgabe Elemente in $\mathbb{R}$ sind heißt ableitbar in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn sie in der Nähe von x_0 linear approximiert werden kann. Das heißt, dass es eine lineare Funktion $F(x) = mx + b$ gibt, sodass*

$$f(x) \approx F(x), \quad f(x_0) = F(x_0),$$

und je näher x an x_0 ist, desto näher ist $f(x)$ an $F(x)$. Die Funktion F nennt man die lineare Approximation der Funktion f. In diesem Fall ist

$$f'(x_0) := m.$$

und

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Die Ableitungsfunktion von f nimmt die Eingabe x_0 vor und ergibt die Ausgabe $f'(x_0)$ für jeden Punkt x_0 in dem f ableitbar ist. Die Funktion f heißt ableitbar wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ableitbar ist. Die Ableitungsfunktion kann auch so geschrieben werden:

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0).$$

Bemerkung 6.0.3. Die Ableitungsfunktion wurde auch Steigungsfunktion genannt, da sie die Steigungsverhalten der Ausgangsfunktion beschreibt.

Hier sind einige Beispiele.

1. Es sei $f(x)$ eine lineare Funktion (der beste Fall). Dann gibt es ein m und ein b, die reelle Zahlen sind, sodass
$$f(x) = mx + b.$$
In der Definition ist also $f = F$ und
$$f'(x_0) = m \quad \text{für jedes } x_0.$$
Dementsprechend ist die Ableitungsfunktion
$$f'(x) = m \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathbb{R},$$
und die linear Approximation ist f selbst.

2. Was ist die Ableitungsfunktion der Funktion
$$f(x) = 5 \quad \text{für jedes} \quad x \quad ?$$

3. Es sei f eine Funktion, die in dem Punkt x_0 ableitbar ist und es sei $c \in \mathbb{R}$. Dementsprechend gibt es eine lineare Funktion
$$F(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$
sodass
$$f(x) \approx F(x).$$
Dementsprechend gilt
$$cf(x) \approx cF(x) = cf'(x_0)x + cf(x_0) - cf'(x_0)x_0.$$
Nach der Definition ist die Funktion $g(x) = cf(x)$ auch in dem Punkt x_0 ableitbar und es gilt
$$g'(x_0) = cf'(x_0).$$

4. Es seien f und g zwei Funktionen, die in dem Punkt x_0 ableitbar sind. Dann ist die Funktion $f+g$ auch in x_0 ableitbar und es gilt:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Lassen wir dieses kurz beweisen. Es gibt nach der Definition zwei lineare Funktionen F und G sodass

$$f(x) \approx F(x), \quad g(x) \approx G(x),$$

und

$$F(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0, \quad G(x) = g'(x_0)x + g(x_0) - g'(x_0)x_0.$$

Dementsprechend gilt auch

$$f(x)+g(x) \approx F(x)+G(x) = \left(f'(x_0)+g'(x_0)\right)x + f(x_0) + g(x_0) - f'(x_0)x_0 - g'(x_0)x_0.$$

Dieses passt in die Definition da

$$\left(f'(x_0)+g'(x_0)\right)x + f(x_0) + g(x_0) - f'(x_0)x_0 - g'(x_0)x_0$$

eine lineare Funktion ist, die $f+g$ in der Nähe von x_0 approximiert. In diesem Fall ist

$$m = \left(f'(x_0)+g'(x_0)\right), \quad b = f(x_0) + g(x_0) - f'(x_0)x_0 - g'(x_0)x_0$$

und dementsprechend ist

$$(f+g)'(x_0) = m = f'(x_0) + g'(x_0).$$

5. Wir können die Definition so umschreiben :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

für x in der Nähe von x_0.

Vorsicht! Multiplikation! Was passiert wenn wir zwei Funktion multiplizieren statt addieren?

$$f(x)g(x) \approx F(x)G(x) = \left(f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0\right)\left(g'(x_0)x + g(x_0) - g'(x_0)x_0\right).$$

Multiplizieren wir :

$$F(x)G(x) = f'(x_0)g'(x_0)x^2 + f'(x_0)x\left(g(x_0) - g'(x_0)x_0\right)$$

$$+g'(x_0)\left(f(x_0) - f'(x_0)x_0\right) + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)(g(x_0) - g'(x_0)x_0).$$

Ist diese Funktion linear? NEIN. Dementsprechend ist

$$(fg)'(x_0) \neq f'(x_0)g'(x_0).$$

Wir schreiben $F(x)G(x)$ um :

$$F(x)G(x) = f'(x_0)g'(x_0)(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))x$$

$$+f(x_0)g(x_0) - (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))x_0$$

$$= (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))x + f(x_0)g(x_0) - (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))x_0$$

$$+f'(x_0)g'(x_0)(x - x_0)^2.$$

Wenn x in der Nähe von x_0 ist, dann ist

$$|x - x_0|$$

klein und wenn

$$|x - x_0| < 1$$

ist

$$(x - x_0)^2 < |x - x_0|.$$

Zum Beispiel :

$$|x - x_0| = 0,1 \implies (x - x_0)^2 = 0,01,$$

$$|x - x_0| = 0,01 \implies (x - x_0)^2 = 0,0001.$$

Da $F(x_0) = f(x_0)$ und $G(x_0) = g(x_0)$ und

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \approx F(x)G(x) - F(x_0)G(x_0)$$

$$= ((f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))\,(x - x_0) + f'(x_0)g'(x_0)(x - x_0)^2$$

Da $(x - x_0)^2 \to 0$, wenn $x \to x_0$ erfüllt die lineare Funktion

$$H(x) := ((f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))\,(x - x_0)$$

die Definition der Ableitungsfunktion der Funktion fg in dem Punkt x_0. Nach der Definition ist

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Dieses nennt man die Produkt-Regel.

Proposition 6.0.4. *Es seien f und g Funktionen deren Eingabe und Ausgabe reelle Zahlen sind. Falls g in dem Punkt x_0 ableitbar ist und f in dem Punkt $g(x_0)$ ableitbar ist, dann gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)g'(x_0).$$

Dieses nennt man die Ketten-Regel.

Beweis: Nach der Definition ist g in dem Punkt x_0 ableitbar. Das heisst,

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0).$$

Ist f in dem Punkt $g(x_0)$ auch ableitbar? Lassen wir $y_0 := g(x_0)$ nennen. Dann haben wir

$$f(y) \approx f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0).$$

Wenn die Eingabe der Funktion f die Ausgabe der Funktion g ist, dann ist $y = g(x)$ und es gilt

$$f(g(x)) \approx f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)).$$

Da

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \implies g(x) - g(x_0) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

ist

$$f(g(x)) \approx f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0).$$

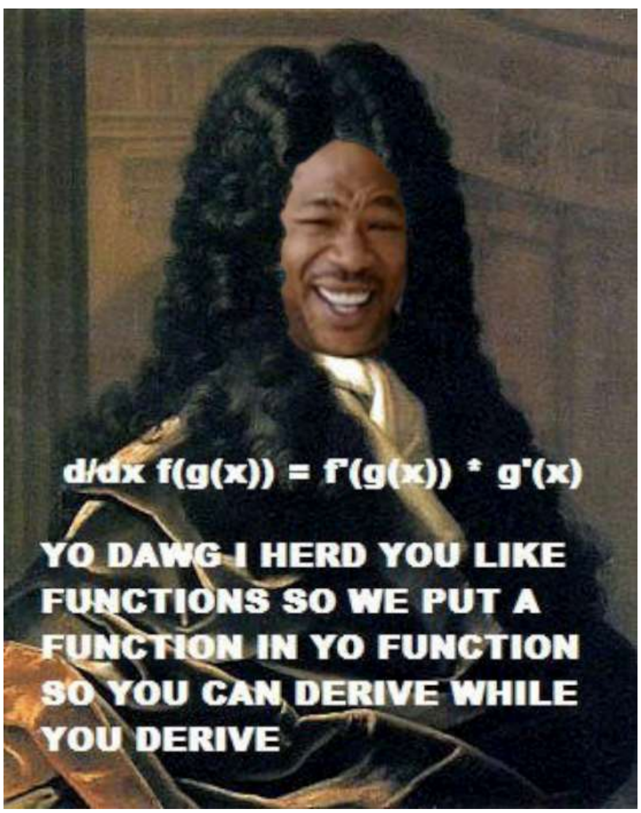
Auf der rechten Seite ist eine lineare Funktion, nämlich

$$F(x) = f'(g(x_0))g'(x_0)x + f(g(x_0)) - f'(g(x_0))g'(x_0)x_0.$$

Nach der Definition ist $f \circ g$ in x_0 ableitbar und

$$(f \circ g)'(x_0) = \text{“}m\text{''} = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

♡



Am besten lernen Sie die Produkt-Regel sowie die Ketten-Regel auswendig. Hier sind noch einige Regeln, mit denen man viele Funktionen ableiten kann. Ableiten bedeutet : die Ableitungsfunktion zu berechnen.

1. **Die Potenzregel:** Für jedes $n \in \mathbb{R}$ mit $n \neq 0$, für
$$f(x) = x^n$$
gilt
$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

2. **Die Eulerscheregel:** Es sei e die Eulersche Zahl. Für
$$f(x) = e^x$$
gilt
$$f'(x) = e^x.$$
Für jedes $b > 0$, für
$$f(x) = b^x$$
da
$$f(x) = e^{\ln(b)x},$$
nach der Kettenregel gilt :
$$f'(x) = \ln(b)e^{\ln(b)x} = \ln(b)b^x.$$

3. **Die Logarithmusregel:** Für
$$f(x) = \ln(x)$$
ist für jede $x > 0$
$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$
Für jede $b > 0$, für
$$f(x) = \log_b(x),$$
gilt für jede $x > 0$
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(b)} \ln(x).$$
Dementsprechend gilt:
$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}.$$

4. **Die Trigonometrischen Regeln :**
$$f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$$

Betrachten wir nun, wie wir die Ableitungsregeln anwenden können, um die drei Beispiele am Anfang des Kapitels zu lösen.

1. Wir wollen

$$-\log_{10}(a)$$

berechnen für $a = 0,011$. Es sei

$$f(x) = -\log_{10}(x).$$

Da

$$0,01 = 10^{-2}$$

nach der Definition des Logarithmuses gilt :

$$-\log_{10}(0,01) = 2.$$

Dementsprechend ist

$$f(0,01) = 2.$$

Die Eingabe $0,011 = 0,01 + 0,001$ ist sehr nah an der Eingabe $0,01$. Dementsprechend wenden wir die lineare Approximation an. Nach der Regel ist

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln(10)x}.$$

In diesem Beispiel können wir die lineare Approximation für die Eingabe $x_0 = 0,01$ anwenden, um die Ausgabe $f(x)$ mit $x = 0,011$ abzuschätzen. Ist :

$$f'(x_0) = -\frac{1}{\ln(10)x_0} = -\frac{1}{\ln(10)0,01} = -\frac{100}{\ln(10)}.$$

Die lineare Approximation ist :

$$f(x) \approx f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 2 - \frac{100}{\ln(10}(0,001)$$

$$= 2 - \frac{1}{10\ln(10)}.$$

Wir haben immer noch $\ln(10)$. Die Definition der Logarithmusfunktion ist

$$\ln(10) = y \iff e^y = 10.$$

Da $e < 3$ und $3^2 < 10$ ist

$$\ln(10) > 2.$$

Dementsprechend gilt :

$$\frac{1}{10\ln(10)} < \frac{1}{20} = 0,05 \implies 2 - \frac{1}{10\ln(10)} > 2 - 0,05 = 1,95.$$

Das heisst :

$$f(x) \approx 2 - \frac{1}{10\ln(10)} > 1,95.$$

Dementsprechend ist die Messung $1,900$ falsch.

2. Wir haben in diesem Beispiel fast dieselbe Funktion :

$$f(x) = \log_{10}(x).$$

Die Eingabe $x = 10000001 = 10^7 + 1$. Sie ist sehr nah an der Eingabe $x_0 = 10^7$ und

$$f(x_0) = \log_{10}(x_0) = 7.$$

Nach der Regel ist die Ableitungsfunktion

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(10)x}.$$

Dementsprechend ist

$$f'(x_0) = \frac{1}{10000000 \ln(10)}.$$

Die lineare Approximation ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 7 + \frac{1}{10000000 \ln(10)}.$$

Wir haben schon gesehen, dass

$$\ln(10) > 2.$$

Dementsprechend ist

$$f(x) = \log_1 0(1000001) \approx 7 + \frac{1}{10000000 \ln(10)} < 7 + \frac{1}{20000000} < 7.0001.$$

Der Assistent hat dementsprechend den Computer falsch kalibriert.

3. Für jedes Dreieck mit einem 90-Grad Winkel gilt :

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wobei a und b die Länge der Seiten sind und c die Länge der Hypothenuse ist. Ein Bauarbeiter kann die Wand hoch halten und ein zweiter Bauarbeiter kann auf einem Leiter stehen und eine Seite des Maßbands fest halten. Sie nehmen die andere Seite des Maßbands und gehen an das Ende des Bodens. Wenn der Wand-Boden-Winkel 90 Grad beträgt, dann gilt :

$$3^2 + 10^2 = x^2,$$

wobei x die gemessene Länge zwischen Ihnen und dem Bauarbeiter, der auf der Leiter steht. Dementsprechend muss

$$x = \sqrt{109}.$$

Sie haben keinen Taschenrechner (Ihrer Boss ist ein sehr strenger Kerl). Wie können Sie $\sqrt{109}$ abschätzen? Mit der Ableitungsfunktion! Es sei

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

Da $\sqrt{100} = 10$, nehmen wir $x_0 = 100$. Nach der Ableitungsregeln ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dann ist

$$f'(x_0) = f'(100) = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Die lineare Approximation ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Für $x = 109$ und $x_0 = 100$ ist

$$f(x) = \sqrt{109} \approx 10 + \frac{9}{20} = 10,45.$$

Der Bauarbeiter, der die Wand hält, muss die Wand drehen, bis um das Maßband die Länge von $10,45\ m$ anzeigt.

Die Ableitungsfunktion ist super anwendbar da sie macht es möglich um komplizierte Funktionen wie Logarithmus und Würzeln abzuschätzen. Sie ist auch nützlich für Funktionen deren Eingabe Elemente aus $\mathbb{R}^n$ sind.

Definition 6.0.5. *Es sei F eine Funktion deren Eingabe Elemente aus $\mathbb{R}^n$ sind und deren Ausgabe Elemente aus $\mathbb{R}^m$ sind, wobei n und m natürliche Zahlen sind. Es sei X_0 ein Element $\mathbb{R}^n$. Falls es eine $m \times n$ Matrix M gibt sodass gilt :*

$$F(X) \approx F(X_0) + M(X - X_0),$$

dann ist F in dem Punkt X_0 ableitbar und man nennt

$$DF(X_0) := M.$$

Die lineare Approximation ist

$$F(X_0) + DF(X_0)(X - X_0).$$

Wir werden uns mit diesem Thema später beschäftigen.

6.1 Aufgabe

1. Berechnen Sie die Ableitungsfunktion :

$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

2. Wenden Sie Ihre Antwort an um
$$f(3.15)$$
abzuschatzen.

3. Es sei
$$g(x) = x^2.$$
Berechnen Sie die Ableitungsfunktion
$$f \circ g(x).$$

4. Was ist die lineare Approximation der Funktion
$$f(x) = 3x^2 - 4$$
in dem Punkt $x_0 = 2$?

5. * Sie bauen ein "Pinewood Derby" (vgl. South Park) Auto. Sie möchten, dass die Seiten in einem 90 Grad Winkel zueinander stehen, dürfen jedoch kein Gradmesser benutzen. Der Boden des Autos soll die Maße 3×1 Inches haben. Nehmen Sie das Bauarbeiter-Problem als Beispiel und finden Sie eine Methode, damit Sie nur mithilfe eines Maßbandes der 90 Grad Winkel konstruiert werden kann.

6. Was ist die lineare Approximation der Funktion
$$f(x) = \log_2(\cos(x)), \quad x_0 = 0?$$
Wenden Sie diese an um $f(0.01)$ abzuschätzen.

7. * Es sei F die Funktion von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$
$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$
Berechnen Sie $DF(X_0)$ wobei $X_0 = (0, 0, 0)$.

8. * Es seien f und g Funktionen mit Eingabe sowie Ausgabe Elemente $\mathbb{R}$ die in x_0 ableitbar sind und es sei $g(x_0) \neq 0$. Wenden Sie nur die Produktregel, die Kettenregel sowie die Potenzregel um zu zeigen, dass :
$$\frac{f}{g}'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0) * g(x_0)}.$$

9. Wenden Sie # 8 an um zu berechnen :
$$f'(x), \quad f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

10. Ihrer Assistent hat eine komplizierte Differentialgleichung gelöst. Auf einigen (geheimnissen C.I.A.) Grunden wissen Sie, dass die Lösung eine Funktion f eine Funktion deren Eingabe sowie Ausgabe Elemente $\mathbb{R}$ sind und sodass es eine ableitbare Funktion g gibt mit
$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = x, \quad f(0) = g(0) = 0.$$
Nach der Rechnung des Assistents ist
$$f'(0) = 0.$$
Warum kann das nicht sein?[1]

[1]**Hinweis:** Sie können die Kettenregel in dem Punkt $x_0 = 0$ in der Gleichung $f \circ g(x) = x$ anwenden. Was ist $I'(x)$ für die Identität Funktion $I(x) = x$? Was ist nach der Kettenregel $(f \circ g)'(x)$? Jetzt setzen Sie $x = x_0 = 0 \ldots$

Kapitel 7

Mathematische Zeichnungen : Ein Bild sagt mehr als tausende Worte

Es gibt viele in der Naturwissenschaft, die man am besten mit einer Funktion verstehen kann. Ein Beispiel ist die Logarithmus Funktion $\log_1 0(x)$ sowie $\ln(x)$ und ein anderes Beispiel ist die exponentielle Funktion e^x. Die trigonometrische Funktionen braucht man um Wellen sowie Licht und Elektricität zu beschreiben. Wenn Sie eine Funktion vor Ihnen haben, um diese Funktion zu verstehen, können Sie ihren Graph zeichnen.

7.1 Der Graph einer Funktion

Definition 7.1.1. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Graph von f ist die Menge alle Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ deren Form*

$$(x, f(x))$$

ist.

Um einen Graph zu zeichnen werden wir die Ableitungsfunktion anwenden. Die Ableitungsfunktion ergibt die Steigung des Graphs.

Proposition 7.1.2. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f in dem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ableitbar ist, dann ist*

$$f'(x_0)$$

die Steigung des Graphs von f in dem Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die Lineare Approximation

$$F_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ist die Tangente des Graphs in dem Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Sie können diese am besten mit vielen Beispielen lernen.

1. $f(x) = x$.

2. $f(x) = 2 - 3x$.

3. $f(x) = mx + b$.

4. $f(x) = x^2$.

5. $f(x) = e^x$.

6. $f(x) = \ln(x)$.

7.2 Wie liest und zeichnet man einen Graph?

Wenn Sie eine komplizierte Funktion haben und diese Funktion in einem Computer eingeben, damit der Computer den Graph zeichnet, was können Sie davon erkennen?

Definition 7.2.1. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, genau dann, wenn man den Graph an die Tafel zeichnen kann, ohne die Kreide hoch heben zu müssen. In jedem Punkt, der eine eindeutige Tangente hat, ist die Funktion ableitbar. Der Definitionsbereich ist der Bereich, wo die Funktion definiert werden kann: er ist die Menge alle Punkte in $\mathbb{R}$, sodass die Funktion eine Ausgabe, die ein Element $\mathbb{R}$ ist, ergibt.*

Hier sind einige Beispiele :

1. $f(x) = x$

2. $f(x) = x^n$, für natürliche Zahlen und ganze Zahlen...

3. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

4. $f(x) = e^x$

5. $f(x) = \ln(x)$

Wenn eine Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ stetig ist, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann hat die Funktion auf dem Intervall ein Maximum und ein Minimum.

Definition 7.2.2. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$. Die Funktion hat ein globales Maximum in dem Punkt x_0 genau dann, wenn*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \textit{für jede } x \in [a, b].$$

Die Funktion hat ein lokales Maximum in dem Punkt x_0 genau dann, wenn es $t > 0$ gibt, sodass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \textit{für jede } x \in [x_0 - t, x_0 + t].$$

Die Funktion hat ein globales Minimum in dem Punkt x_0 genau dann, wenn

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \textit{für jede } x \in [a, b].$$

Die Funktion hat ein lokales Minimum in dem Punkt x_0 genau dann, wenn es $t > 0$ gibt, sodass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \textit{für jede } x \in [x_0 - t, x_0 + t].$$

Die Funktion hat eine Nullstelle in dem Punkt x_0 genau dann, wenn

$$f(x_0) = 0.$$

Man kann auch sagen, dass die Funktion f in dem Punkt x_0 verschwindet.

Wenn eine Funktion ein bestimmtes Prozess beschreibt, wie zum Beispiel der Preis irgendwas das Sie kaufen oder verkaufen, dann wollen Sie wissen, wann die Funktion am höchsten ist (d.h. ein Maximum hat) falls Sie verkaufen oder wann die Funktion am niedrigsten ist (d.h. ein Minimum hat) falls Sie kaufen. Der folgende Satz kann angewandet werden, um zu bestimmen, ob eine ableitbare Funktion ein Maximum oder Minimum hat.

Definition 7.2.3. *Ein Intervall $[a, b]$ wobei $a < b$ zwei reelle Zahlen sind ist die Menge alle reelle Zahlen x sodass gilt:*

$$a \leq x \leq b.$$

Das Intervall (a, b) ist die Menge alle reelle Zahlen x sodass gilt:

$$a < x < b.$$

Satz 7.2.4. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ableitbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Dann ist f stetig auf dem Intervall. Für jede reelle Zahlen $x < y$ sodass*

$$a < x < y < b,$$

gibt es eine $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$ sodass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z).$$

Die Funktion hat ein globales Maximum M sowie ein globales Minimum m und für jede reelle Zahl $z \in (m, M)$ gibt es eine $x \in [a, b]$ sodass gilt:

$$f(x) = z.$$

Der Beweis wird mit einem Bild an der Tafel gezeigt.

Satz 7.2.5 (Mini-Max-Satz)**.** *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ableitbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Dann falls f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum in dem Punkt $x_0 \in (a, b)$ hat, dann ist*

$$f'(x_0) = 0.$$

Der Beweis wird mit einem Bild an der Tafel gezeigt.

Falls eine Funktion zweimal abgeleitet kann, dann nennt man die Funktion zweimal ableitbar.

Definition 7.2.6. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ableitbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Es sei $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungsfunktion von f. Falls die Ableitungsfunktion von f in dem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ableitbar ist, dann ist f zweimal ableitbar und die Ableitung von f' schreibt man*

$$f''(x_0) = \frac{d}{dx^2} f(x_0).$$

Für jeden Punkt x in dem f zweimal ableitbar ist, ist die Funktion deren Ausgabe $f''(x)$ ist, die zweite Ableitungsfunktion von f.

Alle Mathematik ist zusammen verbundet. Wenn Sie dementsprechend eine Definition, einen Satz oder eine Übungsaufgabe rüber springen, als ob Sie es ,,unter Ihr Bett verstechen," wird dieses Ding sich in einem Monster verwandeln und er wartet auf dem Moment, wenn Sie diese Mathematik wieder anwenden müssen und dann erschreckt Sie der Monster.

Wenn man nach einem Maximum oder Minimum sucht, kann man nach dem Mini-Max-Satz erst betrachten, ob die Ableitungsfunktion Nullstellen hat. Jetzt brauchen wir noch einige Logik. Jedes globales Maximum (bez. Minimum) ist auch ein lokales Maximum (bez. Minimum). Die Umkehrung gilt nur manchmal. Dementsprechend ist die Umkehrung mathematisch falsch. Wenn die Funktion ein lokales Maximum oder Minimum in $x_0 \in (a, b)$ hat, dann muss die Ableitungsfunktion eine Nullstelle in x_0 haben. Das heisst : Maximum oder Minimum in $x_0 \in (a, b)$ impliziert ($\implies$) $f'(x_0) = 0$. Die Implikation in der andere Richtung gilt nicht unbedingt, das heisst, mathematisch ist die Unkehrung falsch!!

Bemerkung 7.2.7. Die Mathematik ist eine universelle Sprache, deren Wörter mathematische Ideen sind. Diese Ideen sind durch mathematisch Definitionen eindeutig bestimmt. Um die Sprache der Mathematik verstehen zu können, muss man ihre Wörter (auswendig) lernen. Stellen Sie sich vor, dass Sie in Paris sind und Sie haben Franzoizisch nicht gelernt. Das heisst, Sie müssen in Ihrem Wörterbuch nach jedem Wort suchen. Was denken Sie passiert, wenn Sie mit den Leuten zu reden versuchen? Die Leuten werden Ihres Geduld schnell verlieren. Wenn man keinen Wort auswendig kennt, kann man nicht reden.

Die zweite Ableitungsfunktion zeigt man wie der Graph einer Funktion aussieht.

Definition 7.2.8. *Es sei f eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ zweimal ableitbar ist. Für jede $x \in (a, b)$, sodass*

$$f''(x) > 0,$$

ist der Graph von f konkav-oben. Für jede $x \in (a, b)$, sodass

$$f''(x) < 0,$$

ist der Graph von f konkav-unten.

Diese Definition wird an der Tafel gezeigt. Nach dieser Definition haben wir folgenden Satz.

Satz 7.2.9. *Es sei f eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ zweimal ableitbar ist. Falls es einen $x \in (a, b)$ gibt, sodass f ein lokales Maximum in x hat, dann ist:*

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \leq 0.$$

Falls es einen $x \in (a, b)$ gibt, sodass f ein lokales Minimum in x hat, dann ist:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \geq 0.$$

Die Logik kommt wieder : f ein lokales Maximum (bez. Minimum) in x hat $\implies$ $f'(x) = 0$, $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$). Die Umkehrung gilt manchmal, d.h. die Umkehrung ist mathematisch falsch.

Definition 7.2.10. *Es sei f eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ zweimal ableitbar ist. Falls es einen $x \in (a, b)$ gibt, sodass*

$$f'(x) = f''(x) = 0,$$

und f kein Maximum sowie kein Minimum in dem Punkt x hat, dann ist x ein Wendepunkt.

Jede stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ hat ein Maximum sowie ein Minimum. Wenn die Funktion auch ableitbar ist, dann können Sie das Maximum (bez. Minimum) so finden :

1. Hat die Ableitungsfunktionen Nullstellen? Finden Sie diese.
2. Berechnen Sie $f(a)$, $f(b)$ und $f(x)$ für jede x, sodass $f'(x) = 0$. Das kleinste ist das Minimum, das grösste ist das Maximum.

Hier ist eine kurze Zusammenfassung :

1. Um einen Graph zu zeichnen:
   (a) Berechnet man, was gegen $-\infty$ sowie ∞ passiert.

(b) Berechnet man, ob die Funktion Maximum(s), Minimum(s), sowie Nullstellen hat.

(c) Berechnet man, wo die Funktion konkav-oben bez. konkav-unten ist.

(d) Fasst man die Punkte zusammen (Connect the dots, la la la).

2. Um einen Graph zu lesen:

   (a) Die Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne der Tafel zu verlassen

   (b) Die Funktion ist ableitbar, wenn es eine eindeutige Tangente gibt

   (c) Die Ableitungsfunktion ergibt die Steigung der Tangente

   (d) In jedem Maximum bez. Minimum hat die Ableitungsfunktion eine Nullstelle

   (e) Die zweite Ableitungsfunktion ist positiv, wo der Graph konkav-oben ist, sie ist negativ, wo der Graph konkav-unten ist

7.3 Related Rates

Es gibt leider keine Deutsche Übersetzung für diese Art Probleme. Solche Probleme sind sehr wichtig zu verstehen, da man damit eine Geschwindigkeit, die auf einanderer abhängt. Zum Beispiel...

Ein Polizist 20 m von eine gerade Strasse wendet sein Doppler-Radar an einem Auto, das entlang die Strasse 20 m weg fahrt. Die Geschwindigkeit wurde 200 km/Stunde gemessen. Wie schnell ist das Auto wirklich?

Das tollste ist, dass Sie nur die Ketten-Regel und Ihr Gehirn brauchen, um solche Aufgabe zu lösen. Dieses Beispiel wird in der Vorlesung gelöst.

Noch einige Beispiele sind folgende:

- Ich merke, dass wenn ich einen Martini trinke, die Höhe des Martinis am anfang langsam unter geht, und wenn ich die Hälfte getrunken habe, Höhe des Martinis geht schneller unter. Heisst das, dass ich schneller trinke? Oder kann es sein, dass ich immer mit derselben Geschwindigkeit trinke?

- Bitte lesen Sie den Datei “Hund” für ein aktuelle Anwendung in der Biologie(!!)

Um solche Aufgabe zu lösen, sollen Sie immer die Situation skizzieren, auch wenn Sie wie ich nicht gut zeichnen können.

7.4 Aufgabe

1. * (4 Punkte) Es seien a, b, c, d, m, n und p reelle Zahlen. Welche Bedingungen müssen $a, b, c,$ und d erfüllen, damit es eine $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad ?$$

Welche Bedingungen müssen m, n und p erfüllen, damit es eine $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad ?$$

2. (4 Punkte) Für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 1,$$

zeichnen Sie den Graph. Berechnen Sie das Maximum sowie das Minimum auf dem Intervall $(-2, 2)$.

3. * (4 Punkte) Ein Polizist 15 m von eine gerade Strasse wendet sein Doppler-Radar an einem Auto, das entlang die Strasse 20 m weg fahrt. Die Geschwindigkeit wurde 100 km/stunde gemessen. Wie schnell ist das Auto wirklich?

4. (4 Punkte) Sie trinken ein Martini nach Sie die Klausur erfolgreich geschrieben haben. Der Glas ist ein typische Martini-Glas. Das Radius ist 3cm und die Höhe ist 4cm. Sie trinken ungefahr 1 mL pro Sekunde. Berechnen Sie die Geschwindigkeit die Höhe verkleinert als Sie trinken.

5. * (4 Punkte) Lesen Sie `http://de.wikipedia.org/wiki/Enzymkinetik` Nach der Gleichung :

$$v(t) = v_{max} \frac{[S(t)]}{K_m + [S(t)]}$$

berechnen Sie $v'(t)$ als eine Funktion von $[S(t)]$ und $[S'(t)]$, wobei v_{max} und K_m Konstante sind.

Kapitel 8

Wo, wann, und wie schnell?

Die Ableitung einer Funktion, die abhängig von der Zeit ist, zeigt wie schnell die Funktion sich ändert.

Definition 8.0.1. *Die Durchschnittswert-Geschwindigkeit ist genau die Änderung der Funktion, die durch die Zeit geteilt wird.*

Beispiele: Wenn Sie in einem Jahr einen Zentimeter grösser werden, ist die Durchschnittswert-Geschwindigkeit der Funktion

$$f(t) = \textbf{Wie gross Sie sind in cm nach } t \textbf{ Jahren}$$

dann ist die Durchschnittswert-Geschwindigkeit

$$\frac{1\text{cm}}{1\text{Jahr}}.$$

Wenn Sie aber in 2 Jahren 3/2 Zentimeter grösser werden, ist die Durchschnittswert-Geschwindigkeit der Funktion f

$$\frac{3/2\text{cm}}{2\text{Jahre}} = \frac{3\text{cm}}{4\text{Jahre}}.$$

Definition 8.0.2. *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die in dem Punkt t_0 ableitbar ist, ist die Geschwindigkeit, mit der f sich in dem Punkt t_0 ändert, genau $f'(t_0)$.*

Für eine Funktion, die auf einem Intervall $[a, b]$ ableitbar ist, wobei $a < b$ reelle Zahlen sind, gilt für jede $t_0 \in (a, b)$

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0).$$

Wir formen um

$$f(t) - f(t_0) \approx f'(t_0)(t - t_0),$$

und

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \approx f'(t_0).$$

Auf der linken Seite der $\approx$ steht die Durchschnittswert-Geschwindigkeit und auf der rechten Seite steht die Ableitung im Zeitpunkt t_0. Diese $\approx$ bedeutet, dass je näher t an t_0 ist, desto näher sind die beide Seiten. Das heisst, dass je näher t an t_0 ist, desto näher ist die Durchschnittswert-Geschwindigkeit von t bis t_0 an der Geschwindigkeit genau im Zeitpunkt t_0.

8.1 Grenzwerte und Limes

Definition 8.1.1. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für einen $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

und wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

genau dann, wenn für jede $\epsilon > 0$, es $\delta > 0$ gibt sodass gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Satz 8.1.2. *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt für jede $x_0 \in (a, b)$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Falls f in $x_0 \in (a, b)$ ableitbar ist, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Die Idee eines Grenzwertes (Limes) ist, dass je näher x an x_0 ist, desto näher ist was nach dem $\lim_{x \to x_0}$ an dem Grenzwert (Limes) ist.

Beispiel: Sie fahren mit dem Auto. Es sei $p(t)$ der Abstand zwischen Ihnen und Ihrem Parkplatz (wo Sie ihre Fahrt begonnen haben). Nehmen wir an, dass Sie geradeaus entlang der Strasse in eine Richtung fahren. Dann ist für jeden Zeitpunkt t_0

$$p'(t_0) \text{ die Geschwindigkeit mit deren Sie fahren.}$$

Was bedeutet $p''(t_0)$? Was ist die Geschwindigkeit mit der die Geschwindigkeit sich ändert?

Definition 8.1.3. *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die in dem Punkt t_0 zweimal ableitbar ist, ist die Beschleunigung, mit der f sich in dem Punkt t_0 ändert, genau $f''(t_0)$.*

Frage: Nach den Definitionen für eine Funktion, deren Ausgabe Meter bedeutet und deren Eingabe Sekunden bedeutet, was sind die Einheiten ihrer Ableitungsfunktion sowie ihrer zweiten Ableitungsfunktion? Sie brauchen nur die oberen Definitionen um diese Frage beantworten zu können.

8.2 Einheitsanalysis : Flugzeuge, Züge, und Autos

Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 200 km/h. Wie weit ist er nach t Stunden gefahren? Wenn diese Frage Sie erschreckt, denken Sie lieber an eine bestimmte Menge Zeit. Wie weit fährt der Zug in einer Stunde? Was bedeutet 200 km/h Stunde? Jede Stunde fährt der Zug 200 km. Das heisst, nach einer Stunde ist er 200 km gefahren. Nach 2 Stunden ist er also 400 km gefahren, und nach t Stunden ist er $200t$ km gefahren.

Wie viele Meter pro Sekunde ist 200 km pro Stunde? Um das zu berechnen, können wir das neutrale Element für Multiplikation verkleiden und anwenden. Da

$$200km/St * 1 = 200km/St,$$

wie können wir 1 verkleiden? Wir haben Meter und Kilometer. Wie können wir diese vergleichen?

$$1000m = 1km \implies \frac{1000m}{1km} = 1 = \frac{1km}{1000m}.$$

Wir wollen

$$m/sek.$$

Das heisst, dass wir m nach oben haben wollen, und km weg schaffen wollen. Dementsprechend machen wir

$$200km/St = 200km/St * 1 = 200km/St * \frac{1000m}{1km} = 200000m/St.$$

Jetzt haben wir Meter oben aber unten sind immer noch Stunden. Wir wollen aber Sekunden. Verkleiden wir die eins nochmal, da

$$60Sek = 1Minute, \quad 60Minute = 1Stunde,$$

also

$$\frac{60Sek}{1Min} = 1 = \frac{1Min}{60Sek}, \quad \frac{60Min}{1St} = \frac{1St}{60Min} = 1.$$

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} 200000m/St &= 200000m/St * 1 * 1 = 200000m/St * \frac{1Min}{60Sek} * \frac{1St}{60Min} \\ &= 200000m/3600Sek = 500m/9Sek \approx 55.6m/Sek. \end{aligned}$$

Es ist immer wichtig für Anwendungen auf die Einheiten aufzupassen.

Beispiel: Bitte lesen Sie : `http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter`

Züge fahren die meisten Zeit geradeaus. Dementsprechend können wir die Position eines Zuges mit einer Funktion deren Eingabe eine Zahl (Zeit) ist, und deren Ausgabe eine Zahl (km, zum Beispiel) ist, reprasentieren. Zeichnen wir den Graph einer solchen Funktion. Wie immer ist die Eingabe der links-rechts Wert des Graphs und die Ausgabe der oben-unten Wert des Graphs.

Beispiel - Anziehungskraft: Die Beschleunigung der Anziehungskraft ist $9,8m/sek^2$. Was bedeutet dies? Wieso ist Sek^2 im Nenner? Nach der Definition sind die Einheiten der Geschwindigkeit :

Die Einheiten der Funktion (d.h. von der Ausgabe der Funktion) durch die Einheiten der Eingabe geteilt.

Da die Beschleunigung die Ableitungsfunktion der Ableitungsfunktion ist, sind die Einheiten nach der Regel der Beschleunigung :

Die Einheiten der Ableitungsfunktion werden durch die Einheiten der Eingabe geteilt.

Wenn die Eingabe der Funktion Zeit (Sekunden z.B.) ist, dann sind die Einheiten der Ableitungsfunktion (d.h. die Einheiten der Geschwindigkeit):

$$\frac{\text{Einheiten der Ausgabe der Funktion}}{\text{Einheiten der Eingabe der Funktion}},$$

und die Einheiten der zweiten Ableitungsfunktion (d.h. die Einheiten der Beschleunigung):

$$\frac{\text{Einheiten der Geschwindigkeit}}{\text{Einheiten der Eingabe der Funktion}} = \frac{\text{Einheiten der Ausgabe der Funktion}}{(\text{Einheiten der Eingabe der Funktion (Zeit)})^2}.$$

Die Eingabe für die Funktion, ihre Ableitungsfunktion, sowie ihre zweite Ableitungsfunktion ist immer dieselbe : Zeit. Dementsprechend sehen Einheiten für Geschwindigkeit immer so aus :

$$\frac{\text{Einheiten für was man mit der Funktion messt}}{\text{Einheiten für die Eingabe (Zeit)}},$$

und Einheiten für Beschleunigung sehen immer so aus :

$$\frac{\text{Einheiten für was man mit der Funktion messt}}{(\text{Einheiten für die Eingabe (Zeit)})^2}.$$

Beispiel - Anziehungskraft: Wie hoch und schnell muss man einen Baseball schlagen, damit der Ball aus dem Spielplatz fliegt? Von dem Spielplatz bis zu der Wand sind es 100 m und die Wand ist 5 m hoch. Dieses Beispiel wird an der Tafel gezeichnet und gelöst. Wenn Sie es selbst probieren möchten, kann man anwenden, dass die Beschleunigung der Anziehungskraft $9,8m/sek^2$ ist.

Beispiel: Mein Freund meint, dass ein neuer Lamborghini von 0 auf 100 km/h. in 2,5 Sekunden kommt. Ich will das testen (und ich habe einen Freund mit einen Lamborghini). Wir wissen alle, dass man viel schneller bremsen kann, als man beschleunigen kann, aber ich finde es angenehmer auch 2,5 Sekunden zu geben, um zu bremsen. Nehmen wir an, dass die Beschleunigung sowie das Bremsen lineare Funktionen sind. Wie lang muss die Strecke sein(leere Strasse) um dies zu testen?

Beispiel: Noch ein Beispiel der linearen Approximation. Es sei $f(x) = 10^x$. Diese Funktion ist die Umkehrfunktion der Funktion

$$g(x) = \log_{10}(x),$$

die man für pH-Werte, sowie für die Richterskala braucht . Berechnen wir die lineare Approximation der Funktion $f(x)$ für x=1, sowie x=2, sowie x=5.

8.3 Geometrische Grundlagen

Wir haben schon die trigonometrische Funktion gesehen. Was bedeutet sie?

8.3.1 Dreiecke und Kreise

Die Funktion ,,Sinus" die

$$\sin(x)$$

geschrieben wird, bedeutet : für ein Dreieck mit einem 90 Grad Winkel, ist $\sin(x)$ das Ratio

$$\frac{\text{Gegenseite}}{\text{Hypthenuse}},$$

wobei die Große des Winkels x im Bogenmaß ist. Wir nennen die zwei Seiten, die nicht die Hypotenuse sind, Gegenseite (wenn die Seite gegenuber des Winkels ist) oder Nebenseite (wenn die Seite neben dem Winkel ist). Die Funktion ,,Cosinus" die

$$\cos(x)$$

geschrieben wird, bedeutet : für ein Dreieck mit einem 90 Grad Winkel, ist $\sin(x)$ das Ratio

$$\frac{\text{Nebenseite}}{\text{Hypothenuse}},$$

wobei die Große des Winkels x im Bogenmaß ist. Eine gleichwertige Definition ist durch den Einheitskreis. Der Einheitskreis ist die Menge alle Punkte (x, y) der Ebene sodass :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dann für einen Punkt

$$(x, y)$$

sodass der Winkel zwischen $\{y = 0\}$ (der Horizontale) und dem Punkt (x, y) gleich θ im Bogenmaß ist, gilt :

$$\cos(\theta) = x, \quad \sin(\theta) = y.$$

Dementsprechend gilt immer :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Der ganze Einheitskreis ist insgesamt 2π im Bogenmaß. Dementsprechend ist

$$2\pi\text{B} = 360°, \quad \pi\text{B} = 180°.$$

Wenn wir zwischen Bogenmaß und Grad wechseln, dann können wir mit eins entweder als

$$1 = \frac{\pi\text{B}}{180°}$$

oder als

$$1 = \frac{180°}{\pi\text{B}}$$

multiplizieren.

1. Falls zwei Dreiecke denselben Winkel haben, sind die Beide ähnlich.

2. Wenn zwei Leinen parallel sind und von einer Leine durchkreuzt werden, dann sind die Winkel, mit denen die kreuzende Leine die parallele Leine trifft, gleich.

3. Die Fläche eines Dreiecke mit einem 90° Winkel ist das Produkt der beiden nicht-Hypothenuse Seiten geteilt durch 2.

4. Die Länge des Rands eines Kreises ist :

$$2\pi r.$$

5. Die Fläche einer Kreisscheibe mit einem Winkel von θ Bogenmaßist

$$\frac{\theta r^2}{2}.$$

   Da ein Kreis insgesamt 2π Bogenmaß hat, ist die Fläche eines Kreises :

$$\pi r^2.$$

6. Die Länge des Rands einer Kreisscheibe mit einem θ Bogenmaß winkel ist für $\theta < 2\pi$:

$$\theta r + 2r.$$

7.

8. Die Länge des Rands eines Kreises ist :

$$2\pi r.$$

Beispiel: Wenn eine Leiter rütscht, macht die Anziehungskraft die Leiter schneller und schneller. Sie sind in der Mitte der Leiter und Ihre Höhe fallt um 2 t cm pro Sekunde, wobei t die Anzahl Sekunden nach denen die Leiter anfing zu rütschen ist. Wenn Sie einfach dort bleiben, wie lange haben Sie, bis um Sie am Boden sind?

Beispiel: Ein Flugzeug fängt an in die Luft aufzusteigen mit einer Beschleunigung von $200km/h^2$. Der Pilot fliegt mit einem 5° Winkel nach oben. Wenn das Flugzeug eine Geschwindigkeit von 400 km/h erreicht hat, dann bleibt es bei dieser Geschwindigkeit. Wie lange dauert es, bis das Flugzeug diese Geschwindigkeit erreicht hat? Wie hoch wird das Flugzeug sein? Was ist die ,,Geschwindigkeit uber Grund" zu diesem Zeitpunkt?

8.3.2 Volumen

Die Länge ist Volumen in einer Dimension. Wenn man zwei Dimensionen hat, ist Volumen gleich Fläche. Wenn man drei Dimensionen hat, ist Volumen das was wir normalerweise ,,Volumen" nennen. Hier sind einige Beispiele.

1. Das Volumen einer Sphäre ist :
$$\frac{4}{3}\pi r^3.$$
2. Das Volumen eines Kegels ist :
$$\frac{\pi r^2 h}{3}.$$
3. Das Volumen eines Prismas mit Basis B ist gleich der Höhe mal die Fläche B.

Beispiel: Oktoberfest! Wenn Sie ein Bier aus einem zylindrischen Glas mit einer Höhe von 10 cm und einem Radius von 2 cm 1 ml/Sek. trinken, wie schnell sinkt der Bierspiegel?

8.4 Aufgaben

Diese Aufgaben sind Pflicht!

1. * (4 Pkt) Eine Leiter, die 12 m Lang ist, steht 5 m von der Wand. Als Sie hochklettern, fängt die Leiter an, zu rutschen. Der Leiter rutscht weg von der Wand mit einer Geschwindigkeit von 3 cm pro Sekunde. Wie schnell sinkt die Höhe **wenn die Leiter anfängt, zu rutschen?**

2. * (4 Pkt) Sie werfen einen Ball aus einer Höhe von 1 Meter in die Luft mit einer Geschwindigkeit von 10 m pro Sekunde. Ihr Hund steht neben Ihnen und wartet auf den Ball. Er kann in die Luft bis zu einer Höhe von 2 m springen. Er steht 1 m hoch und er kann mit einer Geschwindigkeit von 10 m pro Sekunde springen. Wenn er den Ball genau 2 m in der Luft fängt, wie lange muss er warten, bis er springt?

3. * (4 Pkt) Sie haben Flugangst und Sie sitzen nervös in einem neuen Flughafen: Sie müssen den ersten Flug nehmen (Sie sind ein sehr wichtiger Mensch geworden!). Es stehen einige Informationen auf der Wand über den Flughafen, wie die Länge der Startbahn ist und wie schnell Ihr Flugzeug sein muss, damit es in die Luft geht. Die Startbahn ist nur 100 m lang, und Sie haben Angst, dass sie nicht lang genug ist. Sie schauen in Ihrem Smartphone nach, dass ein typisches Flugzeug eine Beschleunigung von $1m/Sek^2$ hat und dass es eine Geschwindigkeit von 280 km/Stunde erreichen muss, um abzuheben. Ist die Startbahn lang genug?

4. * (4 Pkt) Ein Flugzeug ist 1 km in der Luft und steigt mit einem Winkel von 5°. Der Pilot fliegt mit einer Geschwindigkeit von 500 km/h. Wie weit in der Luft ist das Flugzeug ungefähr (die Höhe) ? Ungefähr wie weit ist das Flugzeug geflogen? (Hinweis : Lineare Approximation)

5. * (4 Pkt) Wie schnell ist ungefähr die Geschwindigkeit uber Grund? (d.h. wie schnell das Flugzeug über das Land fliegt)? (Hinweis : Relative Rate)

8.5 Bespiele und Hinweise

1. Eine Leiter, der 13 m Lang ist, steht 5 m von der Wand. Als Sie hoch klettern, fängt die Leiter an, zu rutschen. Die Leiter rutscht weg von der Wand mit einer Geschwindigkeit von 2 cm pro Sekunde. Wie schnell sinkt die Hohe?

   Ich empfehle, ein Bild oder eine Skizze zu zeichnen. Immer ein guter Anfang und Sie sollen ein Punkt dafür verdienen, wenn Ihr Bild zu der Situation passt.

   Was ändert sich und was ändert sich nicht in diesem Beispiel ? Die Länge der Leiters ändert sich nicht. Der Abstand am Boden zwischen der Leiter und der Wand ändert sich mit einer Geschwindigkeit +2 cm pro Sekunde. Da die andere Information in Meter ist, sollten wir diese in Meter umformen :

   $$1 * \frac{2cm}{Sek} = \frac{2cm}{Sek}, \quad 1m = 100cm$$

   $$\implies \frac{1m}{100cm} = 1 \implies \frac{1m}{100cm} * \frac{2cm}{Sek} = \frac{2m}{100Sek} = 0,02m/Sek.$$

   Denken Sie an das Bild : als die Leiter rutscht, wird der Abstand zwischen der Leiter und der Wand grösser. Dementsprechend ist die Geschwindigkeit $+0,02$ cm pro Sekunde. Der Abstand ist dementsprechend nach t Sekunden

   $$x(t) = 5 + 0,02t.$$

   Definieren wir die Höhe der Leiters $y(t)$. Nach Pythagoras haben wir :

   $$x(t)^2 + y(t)^2 = 13^2.$$

   Umformen :

   $$y(t)^2 = 13^2 - x(t)^2.$$

   Wir leiten beide Seiten ab :

   $$2y(t)y'(t) = -2x(t)x'(t)$$

   und danach lösen wir für $y'(t)$,

   $$y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)}.$$

   Moment : warum ist dies negativ?? Denken Sie wieder an das Bild! Als die Leiter rutscht, geht es ja nach *unten.* Dementsprechend wird die Höhe *kleiner,* und da $y'(t)$ bedeutet : die Geschwindigkeit mit der, die Höhe der Leiters sich ändert, muss diese negativ sein. Anderseits, als die Leiter rutscht, wird die Unterseite der Leiter immer *weiter* von der Wand wegrutschen, deswegen ist :

$$x'(t) = 0,02cm/Sek > 0.$$

Jetzt setzen wir den Zeitpunkt $t = 0$ ein (d.h. als die Leiter anfängt, zu rutschen). In der Zeit ist

$$x(0) = 5.$$

Da gilt

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 13^2, \quad t = 0 \implies 5^2 + y(0)^2 = 13^2 \implies y(0) = 12.$$

Dementsprechend ist :

$$y'(0) = -\frac{x(0)x'(0)}{y(0)} = -\frac{5 * 0,02}{12}.$$

2. Ihr Hund steht 0,5 m hoch. Sie werfen einen Ball aus 1 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 5 m/ Sek. Die Anziehungskraft zieht den Ball unten mit einer Beschleunigung von etwa $10m/Sek^2$. Der Hund kann mit einer Geschwindigkeit von 5 m/Sek springen und er kann bis zu einer Höhe von 1 m springen. Wie lange soll er warten, bis er springen, damit er genau in 1m Höhe den Ball fängt?

   Zu Beginn sollten wir immer die Informationen mathematisch umformen. Die Richtung, in der der Ball sich bewegt ist oben und unten. Definieren wir oben die positive Richtung und unten die negative Richtung. Dann ist also die Geschwindigkeit, die wir dem Ball geben

$$+5m/Sek,$$

   und die Beschleunigung der Anziehungskraft

$$-10m/Sek^2.$$

   Definieren wir die Position “0” als den Boden.

   Es gibt zwei Einflüsse auf den Ball : Ihr Wurf und die Anziehungskraft. Sie werfen den Ball mit der Geschwindigkeit *nach oben* von $+5m/Sek$. Wenn es keine Anziehungskraft geben wurde, dann ware die Position des Balls : $5t + 1$, da der Ball aus einer Höhe von $1m$ geworfen wurde. Aber es gibt die Anziehungskraft und diese zieht den Ball nach unten. Die Anziehungskraft ändert die Position durch $-5t^2$. Dementsprechend ist die Position des Balls nach t Sekunden :

$$p(t) = 1 + 5t - 5t^2.$$

   Berechnen wir, wann der Ball 1 m hoch ist :

$$p(t) = 1 = -5t^2 + 5t + 1 \implies -5t^2 + 5t = 0 \implies -t^2 + t = 0 \implies t^2 = t.$$

Die Lösungen der Gleichung sind $t = 0$ oder $t = 1$. Was bedeuten diese? Für $t = 0$, ist der Ball in der Anfangsposition, d.h. 1 m hoch. Für $t = 1$, das heisst, der Ball ist nach oben gestiegen, und dann wieder nach unten gefallen. Jetzt berechnen wir, wie lange der Hund braucht um den Ball zu fangen. Er ist 0,5 m hoch und kann mit einer Geschwindigkeit von 5 m/Sek springen bis zu einer Höhe von 1 m. Hier spielt Anziehungskraft keine Rolle, weil diese Geschwindigkeit bedeutet, wie lange es dauert für der Hund vom Boden bis zu 1 m Hohe zu springen. Die Geschwindigkeit ist 5 m/Sek, das heisst, dass die Zeit, die er braucht,

$$5m/Sek * tSek = 1 \implies t = 0,1Sek.$$

ist. Der Ball ist nach einer Sekunde 1 m Hoch. Der Hund soll also 0,1 Sekunden vorher springen. Das heisst, er soll 0,9 Sekunden warten. Falls Sie einen Hund besitzen, sollten Sie das ausprobieren. Der Hund kann diese Mathematik schon - er wartet genau so lange, wie es nötig ist, um den Ball in der Luft zu fangen!

3. Sie sind in die USA gezogen und sind Kampfpilot für die Navy geworden. Sie müssen Ihren Jet auf einem Schiff starten! Die Startbahn ist nur 20 m lang aber das Flugzeug hat eine Beschleunigung von $100m/Sek^2$ und das Flugzeug muss eine Geschwindigkeit von 200 km/Stunde erreichen.

   Schaffen Sie das? Sie vertrauen den Berechnungen der Amerikaner nicht unbedingt, dementsprechend möchten Sie sicher sein und das selbst betrachten...

   Zuerst müssen wir uns um die Einheiten kümmern. Wir haben Meter, Sekunde, Kilometer, und Stunden. Da

$$1m = 1000km, \quad 1St = 3600Sek$$

   ist

$$\frac{200km}{St} = \frac{200km}{St} * \frac{1000m}{1km} * \frac{1St}{3600Sek} = \frac{55,5555\ldots m}{Sek}.$$

   Wie lange dauert es bis zu einer Geschwindigkeit von $200km/h$? Da die Geschwindigkeit nach t Sekunden ist

$$100tm/Sek,$$

   lösen wir :

$$100t = 55,5555\ldots \implies t = 0.5555\ldots = \frac{5}{9}Sek.$$

   Da das Flugzeug eine *konstante Beschleunigung* hat, ist die Position nach t Sekunden

$$P(t) = \frac{100t^2}{2}$$

   m von wo das Flugzeug war in dem Zeitpunkt $t = 0$. Setzen wir $t = 5/9$ Sek. und berechnen wir :

$$P(\frac{5}{9}) = 50 * \frac{25}{81} \approx 15,43m < 20m.$$

4. Nehmen wir an, dass das Flugzeug 2 km in der Luft ist und mit einem Winkel von 3° steigt. Der Pilot fliegt mit einer Geschwindigkeit von 600 km/h. Ungefähr wie weit in der Luft (die Höhe) ist das Flugzeug? Ungefähr wie weit ist das Flugzeug geflogen? Bitte zeichnen Sie ein Bild oder eine Skizze für diese Situation.

   Zuerst können wir ein bisschen Trigonometrie anwenden. Wir haben ein Dreieck mit einem 3° Winkel. Die Gegenseite des Winkels ist 2 km. Zuerst sollen wir uns um die Einheiten kümmern. Um die trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus abzuschätzen mithilfe der linearen Approximation, müssen wir diese *ableiten.* Dafür mussen wir den Winkel in ein *Bogenmaß* umzuformen. Da

$$180^\circ = \pi \implies 1 = \frac{\pi}{180^\circ} \implies 3^\circ * \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{9}{180} = 0,05.$$

   Dieser Winkel ist *sehr klein,* das heisst, fast gleich null. Dementsprechend können wir die lineare Approximation der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ anwenden. Da

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = \sin(x),$$

   und

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1,$$

   sind die linearen Approximationen mit dem festen Punkt $x_0 = 0$ jeweils :

$$\sin(x) \approx \sin(0) + \sin'(0)(x-0) = x, \quad \cos(x) \approx \cos(0) + \cos'(0) = 1.$$

   Es sei z die Hypothenuse. Dann gilt :

$$\frac{2}{z} = \sin(3^\circ) \approx \sin(0,05) \approx 0,05 \implies z \approx \frac{2}{0,05} = 40km.$$

   Es sei x die Seite auf der Erde. Dann gilt :

$$\frac{x}{z} = \cos(3^\circ) \approx \cos(0,05) \approx 1 \implies x \approx z = 40km.$$

5. Ungefähr wie schnell ist die Geschwindigkeit über Grund? Die Länge ändert sich, wenn das Flugzeug fliegt. Dementsprechend definieren wir $z(t)$ als die Länge der Hypothenuse im Zeitpunkt t Stunden, wobei

$$z(0) \approx 100km.$$

   Ebenso definieren wir $y(t)$ die Höhe des Flugzeugs, wobei $y(0) = 2km$ und $x(t)$ der Abstand von der Erde ist. Dann gilt :

$$\frac{x(t)}{z(t)} = \cos(3^\circ) \approx \cos(0,02) \approx 1 \implies x(t) \approx z(t).$$

   Dementsprechend ist

$$x'(t) \approx z'(t) = 600km/St.$$

Bemerkung 8.5.1. Die effektivste Methode neue Mathematik zu lernen ist, alles zuerst *alleine* versuchen. Ohne Beispiele, nur mit Definitionen, ganz allein. Nur so können Sie Ihre eigene mathematische Perspektive herausfinden und nur so können Sie sich in neue Mathematik einarbeiten. Es ist wie mit einer neuen Sprache, die man oft hört aber noch nicht versteht. Wenn man ein Wort dieser Sprache lang genug gehört hat, dann erinnert man sich an das Wort *ohne dass man weiss, was das Wort bedeutet.* Genau so lernen Kinder Sprachen und sie sind die Besten beim Sprachen lernen.

Wenn Sie mit neuer Mathematik dasselbe machen, das heisst an einer Aufgabe arbeiten die schwierig ist, machen Sie genau dasselbe. Wenn Sie danach einen Hinweis (zum Beispiel nach der Hinweisregel) bekommen, dann werden Sie die Lösung besser verstehen können und werden solche Aufgaben in der Zukunft *können,* wie ein neues Wort, das man einfach kennt und beim sprechen benutzen kann.

Bitte machen Sie sich keine Sorgen, weil Sie in der Klausur so was *nicht* machen müssen. Sie müssen *vor der Klausur* die neue Mathematik lernen und die Klausur wird dann zeigen, wie gut sie während dieses+ Semesters gelernt haben. Es wird nichts Neues werden, aber Sie werden das nur schaffen können, wenn Sie die ganze Zeit mitgemacht haben.

Wenn Sie alles durchlesen dann wird folgendes nicht passieren…

Kapitel 9

Frohe Weihnachten

Wir werden diese Woche nur Beispiele durcharbeiten, damit alles was Sie bis jetzt noch nicht ganz verstanden haben klar wird. Wenn es die Zeit erlaubt, werden wir auch die Sternchen-Aufgaben lösen. Sie haben danach die ganze Weihnachtspause für die folgenden Übungsaufgaben: Sie dürfen 10 Aufgaben aussuchen, die jetzt ein Sternchen haben (das habe ich bereits geändert - genau für diesen Zweck) und entweder zum ersten mal lösen oder nochmal lösen. Bitte nutzen Sie diese Möglichkeit um Aufgaben zu lösen, die Sie beim ersten Mal entweder nicht verstanden haben, falsch gelöst haben, oder gar nicht gelöst haben. Dies ist eine gute Möglichkeit für Sie um zu lernen und um zu sichern, dass Sie Erfolg bei der Klausur haben werden! Beim Korrigieren werden die Tutoren etwas strenger sein, da Sie jetzt viel Zeit haben um ein sehr schönes Übungsblatt zu schreiben. Bei jeder Aufgabe werden Sie entweder 2 Punkte oder 0 Punkte bekommen.

Sie müssen diese Aufgabe alleine lösen. Das heisst, dass wenn Ihr Blatt und das Blatt eines anderen Studenten identisch sind, bekommt keiner von Ihnen Punkte. Sie müssen die Klausur auch allein schreiben.

Diese Möglichkeit ist genau dass : eine Möglichkeit Ihren Punktstand zu verbessern. Falls Sie schon zufrieden mit Ihrer Arbeit sind müssen Sie nichts während der Weihnachtspause tun. Es ist nur eine Möglichkeit, um Ihren Punktstand zu verbessern (er kann nicht schlechter werden!).

Bitte denken Sie daran, dass die Mathematik genau wie eine Sprache funktioniert. Wenn man eine Sprache länger nicht spricht, dann vergisst man einiges. Dementsprechend wäre es am besten, wenn Sie sich während der Pause jede Woche ein wenig Zeit nehmen, um die Übungsaufgaben zu lesen, und diejenigen, die Sie schwierig finden oder noch nicht verstehen, zu uberdenken. Sie können jederzeit Fragen stellen: wir sind bereit Ihre Mühe zu unterstützen.

Frohe Weihnachten und ...

9.1 Beispiele

Die letzten paar Kapiteln befassen sich mit Geschwindigkeit. Geschwindigkeit entsteht auf zwei Arten Information:

1. Richtung
2. Wie schnell

Zur Zeit haben wir nur Funktionen, deren Ausgabe der Abstand von einem festen Punkt ist. Unsere Funktionen und Probleme befassen sich immer mit irgendwas (Auto, Flugzeug, Leiter, Flüssigkeit), das sich in zwei Richtungen, wie auf einem Zahlenstrahl bewegt. Bitte stellen Sie sich vor, dass eine Richtung positiv ist und die Gegenrichtung negativ ist.

9.1.1 Anziehungskraft Beispiele

Jetzt nehmen wir das Beispiel mit dem Hund, der einen Ball fängt. Der Hund ist 0,5 m hoch. Sie werfen einen Ball von 1 m hoch mit einer Geschwindigkeit von 5 m/ Sek. Die Anziehungskraft zieht den Ball nach unten mit einer Beschleunigung von etwa $10m/Sek^2$. Der Hund kann mit einer Geschwindigkeit von 5 m/Sek springen und er kann bis zu einer Höhe von 1 m springen. Wie lange soll er warten, um zu springen, damit er genau den Ball in 1 m Hohe fängt?

Zu Beginn sollten wir immer die Informationen mathematisch umformen. Die Richtung in die der Ball sich bewegt ist oben und unten. Definieren wir oben die positive Richtung und unten die negative Richtung. Dann ist also die Geschwindigkeit, die wir dem Ball geben

$$+5m/Sek,$$

und die Beschleunigung der Anziehungskraft

$$-10m/Sek^2.$$

Definieren wir die Position "0" als den Boden. Jetzt können wir den folgenden Satz anwenden.

Satz 9.1.1. *Für eine Situation in der ein Objekt sich in zwei Richtungen wie auf einem (Zahlen)strahl bewegt, sodass die Anfangsposition (d.h. die Position in Zeit $t = 0$) gleich p_0 ist, und das Objekt eine Geschwindigkeit von v_0 in der Zeit $t = 0$ hat und es gibt eine konstante Beschleunigung von a für jede Zeit $t \geq 0$ gibt, dann ist die Position :*

$$p(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + p_0.$$

Ich habe versucht, den Satz intuitiv zu motivieren. Es ist nur wichtig, dass Sie wissen, wie und wann Sie den Satz anwenden können.

Nach dem Satz ist die Position des Balls :

$$p(t) = -5t^2 + 5t + 1.$$

Berechnen wir, wann der Ball 1 m hoch ist :

$$p(t) = 1 = -5t^2 + 5t + 1 \implies -5t^2 + 5t = 0 \implies -t^2 + t = 0 \implies t^2 = t.$$

Die Lösungen der Gleichung sind $t = 0$ oder $t = 1$. Was bedeutet dies? Für $t = 0$, ist der Ball in der Anfangsposition, d.h. 1 m hoch. Für $t = 1$, das heisst, der Ball ist nach oben geflogen, und dann wieder nach unten gefallen. Jetzt berechnen wir, wie lange es dauert für der Hund den Ball zu fangen. Er ist 0,5 m hoch und kann mit einer Geschwindigkeit von 5m/Sek springen bis um eine Höhe von 1m. Hier spielt Beziehungskraft keine Rolle, weil diese Geschwindigkeit bedeutet, genau wie lange es dauert für der Hund vom Boden bis um 1m zu springen. Die Geschwindigkeit ist 5 m/Sek, das heisst, dass die Zeit, die er braucht,

$$5m/Sek * tSek = 1 \implies t = 0,1Sek.$$

Der Ball ist nach einer Sekunde 1 m hoch. Der Hund soll also 0,1 Sekunden vorher springen. Das heisst, er soll 0,9 Sekunden warten. Falls Sie einen Hund besitzen, sollten Sie das ausprobieren. Der Hund kann diese Mathematik schon - er wartet genau so lange es nötig ist, um den Ball in der Luft zu fangen!

Für solche Probleme werden Sie diese Formel (aus Kapitel 1!) benötigen :

> Es seien a, b, und c reelle Zahlen. Es gibt eine Lösung (in $\mathbb{R}$) der Gleichung
>
> $$ax^2 + bx + c = 0,$$
>
> genau dann, wenn
>
> $$b^2 = 4ac.$$
>
> In dem Fall ist die Lösung
>
> $$x = -\frac{b}{2a}.$$
>
> Es gibt zwei Lösungen (in $\mathbb{R}$) der Gleichung genau dann, wenn
>
> $$b^2 > 4ac.$$
>
> In dem Fall sind die Lösungen
>
> $$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
>
> Es gibt keine Lösung (in $\mathbb{R}$) der Gleichung genau dann, wenn
>
> $$b^2 < 4ac.$$

Jetzt berechnen wir, wie hoch der Ball in die Luft gestiegen ist. Die Position ist :

$$p(t) = 1 - 5t^2 + 5t.$$

Wir wollen das Maximum von p finden. Dafür können wir die Ableitungsfunktion berechnen :

$$p'(t) = -10t + 5.$$

Diese Funktion hat eine Nullstelle in

$$t = 0,5.$$

Die zweite Ableitungsfunktion ist :

$$p''(t) = -10 < 0.$$

Das heisst, dass die Funktion ein Maximum im Zeitpunkt $t = 0,5$ hat und die Höhe in dem Zeitpunkt ist :

$$p(0,5) = 1 - 1,25 + 2,5 = 2,25\text{Meter}.$$

9.1.2 Der Anker

Wir haben zum ersten mal x_0 in der linearen Approximation angewendet. Die Bedeutung ist *ein fester Punkt.* Auf Englisch spricht man x_0 als

$$x \text{ naught.}$$

Der Wort ,,naught" ist ein altes Wort, das *nichts* bedeutet. Dementsprechend gibt es eine Null unten. Das Wort ,,knot" ist ein Homonym (es wird gleich ausgesprochen) und ist ein Maß für Abstand auf dem Meer. Sie können sich vorstellen, dass die Null, die unter dem x (oder eine andere Variable) ein *Anker* ist. Dieser Punkt ist *fest* wie ein Schiff, das seinen Anker im Wasser hat.

Aufgabe : Schauen Sie das hier mal an : `http://www.youtube.com/watch?v=jvmYdqy-pL4`

9.1.3 Bugatti Veyron Super Sport

Sie haben einen neuen Bugatti Veyron Super Sport (schauen Sie mal hier `http://en.wikipedia.org/wiki/Bugatti_Veyron#Bugatti_Veyron_Super_Sport_.282010.E2.80.93.29`) und Sie möchten schauen ob Sie wirklich von 0 auf 100 km/h in 2,5 Sekunden schaffen können. Wie lang muss die Strasse sein, die Sie dafur benötigen?

Wir müssen einiges annehmen. Zuerst nehmen wir an, dass die Beschleunigung konstant ist. Wenn es 2,5 Sekunden dauert von 0 auf 100 km/h, können wir diese Information anwenden um die Beschleunigung zu berechnen. Zuerst müssen wir uns um die Einheiten kümmern.

$$\frac{100km}{1h} * \frac{1h}{3600Sek} * \frac{1000m}{1km} = \frac{1000m}{36s} \approx 28m/s.$$

Es sei a die Beschleunigung. Dann ist die Geschwindigkeit nach t Sekunden at. Wir wissen :

$$a * 2,5 = 28 = \frac{5}{2}a \implies a = \frac{56}{5}.$$

Die Position ist nach dem Satz

$$p(t) = \frac{56}{5}\frac{t^2}{2} = \frac{28t^2}{5}.$$

Dementsprechend ist die Position nach $2,5$ Sekunden

$$p(2,5) = p\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{28 * 25}{5 * 4} = 35m.$$

Das bedeutet, dass Sie 35 Meter weiter entlang der Strasse sein werden. Jeder, der Auto fährt sollte folgendes wissen:

> Bremsen ist immer schneller als beschleunigen. Dementsprechend wenn Sie Ihre Position schnell ändern wollen, zum Beispiel um einen Unfall zu verhindern, sollen Sie bremsen. Nur wenn die Strasse sehr glatt/gefroren ist, müssen Sie was anderes tun.

Dies bedeutet, dass Sie *weniger* Platz brauchen, um zu bremsen. Dementsprechend wenn Sie auch 35 m für das Bremsen nach dem Test lassen, reicht das. Sie können den Test mit einer 70 Meter lange leere Strasse durchführen.

9.1.4 Fliegen

Ein Cessna 150 kann mit einer Geschwindigkeit von 125 km/h in die Luft aufsteigen. Ich habe gelesen, dass 1500 Fu? für einen Takeoff reichen (sehen Sie `http://www.cessna150152.com/faqs/performance.htm`). Wenn die Beschleunigung konstant ist, wie schnell muss sie sein? Diese Information konnte ich nicht finden aber das ist nicht schlimm, da wir Mathematik anwenden können.

Es sei a die Beschleunigung. Zuerst sollten wir uns um die Einheiten kümmern.

$$\frac{125km}{h} * \frac{1000m}{1km} * \frac{1h}{3600s} = 34.72\ldots \approx 35m/s.$$

Da die Geschwindigkeit nach t Sekunden

$$at$$

ist, damit diese gleich 35 ist, gilt

$$t = \frac{35}{a},$$

wobei t die Zeit ist, die man in die Luft zu gehen, braucht.

Was ist 1500 Fu?? 3 Fu? sind etwa 1 Meter. Dementsprechend :

$$1500Feet * \frac{1m}{3f} = 500m.$$

Die Position nach t Sekunden ist

$$p(t) = \frac{at^2}{2}.$$

Wir wollen

$$p(t) < 500m,$$

und da wir abschätzen,

$$p(t) < 450$$

noch besser wäre. Setzen wir jetzt den Wert für t, bezüglich a rein :

$$p(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{a(35/a)^2}{2} < 450.$$

Vereinfachen wir

$$\frac{35^2}{2a} < 450 \implies \frac{35^2}{2 * 450} < a.$$

Da

$$\frac{35^2}{2 * 450} = 1,361\ldots,$$

wenn die Beschleunigung

$$a > 1,4m/s^2$$

ist, dann wird es funktionieren!

9.2 Relative Rate

Es gibt viele Situationen, in den zwei Geschwindigkeiten verknüpft sind. Einige Beispiele sind : das Radar-Beispiel, das Martini Beispiel, das Bier Beispiel, der Leiter Beispiel, und das Flugzeug in der Luft Beispiel. Machen wir jeweils eines.

9.2.1 Wie funktioniert Radar?

Ein Polizist sitzt x Meter von einer Kreuzung auf einer Strasse. Ein Auto fährt entlang dieser Strasse und scheint zu schnell zu sein. Der Polizist nimmt sein Radar und druckt eine Taste. Das Radar zeigt ihm "100 km/h." Was tut das Radar eigentlich?

Das Radar misst den Abstand zwischen dem Polizist und dem Auto in einem Zeitpunkt, den wir als Zeit 0 definieren. Dann misst das Radar den Abstand sehr kurz danach : etwa $0,001$ Sekunden danach. Definieren wir die Funktion

$$z(t) = \text{ Abstand zwischen Polizist und Auto um Zeit } t.$$

Definieren wir $y(t)$ das Abstand zwischen dem Auto und der Kreuzung. Dann ist

$$y'(t)$$

die Geschwindigkeit des Autos im Zeitpunkt t. Warum existiert $y'(t)$? Das Autofahren ist *ableitbar*. Das Auto hat immer eine Geschwindigkeit und das Auto kann nicht von einer Geschwindigkeit zu einer anderen Geschwindigkeit springen : wenn die Geschwindigkeit von z.B. 80 km/h bis 90 km/h steigt, dann muss das Auto jede Geschwindigkeit zwischen 80 und 90 in wenigstens ein Moment fahren. Da

$$y(t)^2 + x^2 = z(t)^2,$$

ist die Funktion $z(t)$ auch ableitbar. Jetzt werden wir reine Mathematik anwenden.

Satz 9.2.1. *Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine ableitbare Funktion. Für jede $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$ gibt es $c \in (x,y)$ sodass gilt*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Da die Funktion $z(t)$ ableitbar kurz vor $t = 0$ und nachher, von einer Sekunde vorher bis um eine Sekunde nachher ist $z(t)$ auf $(-1, 1)$ ableitbar. Nach dem Satz gibt es eine $t \in (0, 0,001)$ sodass gilt :

$$z'(t) = \frac{z(0,001) - z(0)}{0,001 - 0}.$$

Jetzt wenden wir die Beziehung zwischen y und z an :

$$y(t)^2 + x^2 = z(t)^2 \implies 2y(t)y'(t) = 2z(t)z'(t) \implies y'(t) = \frac{z(t)}{y(t)}z'(t).$$

Wir haben erst beide Seiten abgeleitet (nach der Kettenregel und nicht zu vergessen, x ist konstant, da der Polizist nicht fährt also bleibt sein Abstand zu der Kreuzung x konstant).

Jetzt sollen Sie an den Bild denken. Wie gross ist $y'(t)$ bezüglich $z'(t)$? Wir haben auf der rechten Seite

$$\frac{z(t)}{y(t)}z'(t).$$

In dem Bild ist $z(t)$ die Hypothenuse des Dreiecks und $y(t)$ eine Seite. Dementsprechend ist ;

$$z(t) > y(t) \implies \frac{z(t)}{y(t)} > 1 \implies y'(t) > z'(t).$$

Wir haben mathematisch bewiesen, dass das Auto in einem Zeitpunkt zwischen $t = 0$ und $t = 0,001$ schneller als das was Radar zeigt, ist.

Trigonometrische Funktionen

Wie sieht den Graph eines Sinus aus? Wie sieht den Graph eines Cosinus aus? Etwa wie eine Welle nicht wahr? Diese Funktionen können am Anfang nur abstrakt und nutzlos aussehen aber das sind die nicht. Genau diese Funktionen braucht man um Musik zu hören (oder um zum Beispiel ein Instrument zu bauen), sowie für die Ausbreitung der Licht und Wellen. In der Geologie gibt es elektromagnetische Wellen die sich aus dem Kern der Erde ausbreiten. Dafür braucht man ein Grundverständnis dieser zwei Funktionen. Ehrlich gesagt, ist die Funktionstangente nicht sooooo wichtig. Wenn Sie klar mit Sinus und Cosinus kommen, dann können Sie die Funktionstangente verstehen, da

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Für das Beispiel mit dem Flugzeug in der Luft brauchen wir die Trigonometrische Funktion $\sin(x)$ (Sie können auch die Funktion $\cos(x)$ anwenden). Machen wir noch ein Beispiel mit einem Flugzeug das fliegt. Im Moment, nehmen wir an, dass das Flugzeug geradeaus fliegt, weil wenn das Flugzeug etwas nach oben und auch etwas nach links (z.B.) dreht : dann braucht man zwei Zahlen, um die Position zu beschreiben. In diesem Fall sieht die Positionsfunktion nicht mehr wie

$$p(t) \quad \text{Eingabe eine reelle Zahl, Ausgabe eine reelle Zahl}$$

aus, sondern sieht die Funktion SO aus

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}$$

wobei $p_1(t)$ und $p_2(t)$ zusammen ergeben die Position Nord-Süd-Ost-West und $p_3(t)$ die Höhe.

Es ist dieselbe Idee, wie die, die wir gleich sehen werden, nur mit ein bisschen mehr Arbeit. Dementsprechend bleiben wir zur Zeit bei den Beispielen, in den das Flugzeug nur in eine Richtung fliegt.

Pinewood Derby Beispiel Genau dann wenn

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

ergeben die Seiten, die wir auch a, b, und c nennen, ein 90° Dreieck. Wenn man nur ein Maßband hat, braucht man nur die Länge von c zu messen. Man hat die Seiten a und b und ihre Länge (die wir auch a und b nennen). Dann muss die Länge c :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

sein. Um dies abzuschätzen wenden wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

an. Für einen festen x_0 (fest wie mit einem Anker) ist für x in der Nähe von x_0

$$f(x) = \sqrt{x} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Da

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} x_0^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

ist

$$f(x) = \sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{x - x_0}{2\sqrt{x_0}}.$$

Es sei zum Beispiel $a = 2$ und $b = 3$. Dann ist

$$a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13.$$

Was ist die näheste perfekte Würzel?

$$9 < 13 < 16,$$

und 13 ist näher an 16. Dementsprechend setzten wir unseren Anker in 16,

$$x_0 = 16.$$

Dann ist
$$f(13) = \sqrt{13} \approx \sqrt{16} + \frac{13-16}{2*\sqrt{16}} = 4 - \frac{3}{8} = 3,725.$$
Das heisst, dass Sie eine Seite auf setzen Boden und die andere Seite drehen bis das Maßband 3,725 für den Abstand "c" zeigt.

Flugzeug Beispiel Nehmen wir an, dass eine Cessna 150 eine konstante Beschleunigung beim Takeoff $2,0m/s^2$ hat. Wenn das Flugzeug in die Luft geht, ist der Winkel etwa $6°$. Die Cessna muss eine Geschwindigkeit von $125km/h$ für den Takeoff erreichen. Wie lange dauert es? Wie lang muss die Startbahn sein? Wenn die Cessna in der Luft ist, dann fliegt sie mit einer konstanten Geschwindigkeit bis sie 1 km hoch ist. Wie lange dauert es? Wie weit (auf der Erde) ist das Flugzeug geflogen? Wie hoch ist die Geschwindigkeit über Grund?

Zuerst sollten wir uns um die Einheiten kümmern. Wir haben schon berechnet :
$$125km/h = 34,72m/s \approx 35m/s.$$
Mit einer Beschleunigung von $2,0m/s^2$ ist die Geschwindigkeit nach t Sekunden
$$v(t) = 2t \implies v(t) = 35 \iff t = \frac{35}{2} = 17,5Sek.$$
Da die Position nach dem Satz
$$p(t) = 2\frac{t^2}{2} = t^2,$$
ist das Flugzeug
$$\frac{35^2}{4} = 306,25m$$
d.h. wenn die Startbahn 310 Meter lang ist, dann erreichen wir den Takeoff.

Jetzt fliegt das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 35 m/s bis es 1 km hoch ist. Hier kommt etwas Trigonometrie ins Spiel... Wir haben ein Dreieck : eine Seite ist 1 km und die Hypothenuse ist unbekannt. Nennen wir diese z. Wir kennen den Winkel und nach der Definition Sinus ist
$$\frac{1km}{zkm} = \sin(6°).$$
Wir können Sinus mit der linearen Approximation abschätzen aber um dieses zu tun müssen wir erst $6°$ in Bogenmaß :
$$6° = 6° * \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \approx 0,1.$$
Da $0,1 \approx 1$ ist, setzen wir unseren Anker in den Punkt $x_0 = 0$. Berechnen wir
$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1,$$
also
$$\sin(x) \approx \sin(x_0) + \sin'(x_0)(x - x_0) = \sin(0) + \cos(0)(x-0) = x.$$
Dementsprechend ist
$$\sin(6°) \approx \sin(0,1) \approx 0,1.$$

Dann ist

$$\frac{1}{z} \approx 0,1 \implies z \approx 10km.$$

Das Flugzeug ist etwa 10 km geflogen. Da die Geschwindigkeit $125km/h$ ist dann muss die Zeit t (jetzt in Stunden!)

$$125t = 10 \implies t = \frac{10}{125} = 0,08St, \quad 0,08St * \frac{60min.}{St} = 4,8min.$$

Es dauert also $4,8$ Minuten. Wenn wir die lineare Approximation für die Funktion Cosinus anwenden mit dem Ankerpunkt $x_0 = 0$, da

$$\cos'(x) = -\sin(x) \implies \cos(x) \approx \cos(0) - \sin(0)(x-0) = 1,$$

für $x \approx 0$. Da

$$\frac{x}{z} = \cos(6^\circ) \approx \cos(0,1) \approx 1 \implies x \approx z.$$

Dementsprechend sind wir etwa 10 km übers Land geflogen. Wenn wir der Abstand, den das Flugzeug geflogen ist nach t Stunden als $z(t)$ schreiben, und der Abstand auf dem Land, den das Flugzeug geflogen ist nach t Stunden als $x(t)$ schreiben, dann ist

$$x(t) \approx 0,30625km + z(t),$$

da wir erst 306,25 m = 0,30625 km beim Takeoff geflogen sind und danach die Seite des Dreiecks $x \approx z$. Dementsprechend gilt auch :

$$x'(t) \approx z'(t),$$

also ist die Geschwindigkeit uber Grund ungefähr genauso schnell wie die Geschwindigkeit mit der das Flugzeug fliegt.

Martini sowie Bier Beispiele Sie trinken einen Martini nachdem Sie die Klausur erfolgreich geschrieben haben. Das Glas ist ein typisches Martini-Glas. Der Radius ist 3 cm und die Höhe ist 6 cm. Sie trinken ungefähr 1 ml pro Sekunde. Wie schnell sinkt der Getrankespiegel wenn Sie trinken, wenn der Ausgangsspiegel des Getranks 4cm ist? Wie schnell wenn er nur 1 cm ist?

Das Volumen schreiben wir $v(t)$ da es von Zeit t (sek) abhängt. Schreiben wir $r(t)$ für den Radius nach t Sekunden und $h(t)$ für die Höhe nach t Sekunden. Das Verhaltnis zwischen dem Radius und der Höhe bleibt konstant :

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{r(0)}{h(0)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \implies r(t) = \frac{h(t)}{2}.$$

Nach der Volumenformel ist :

$$v(t) = \frac{\pi r(t)^2 h(t)}{3} = \frac{\pi h(t)^3}{12}.$$

Leiten wir beide Seiten ab :

$$v'(t) = 3\frac{\pi h(t)^2 h'(t)}{12} = \frac{\pi h(t)^2 h'(t)}{4}.$$

Die Geschwindigkeit mit der Sie trinken ist konstant und dementsprechend ist

$$v'(t) = -1mL/s = -1cm^3/s.$$

Dementsprechend ist

$$-1 = \frac{\pi h(t)^2 h'(t)}{4} \implies h'(t) = -\frac{4}{\pi h(t)^2}.$$

Setzen wir $h(t) = 4cm$,

$$h'(t) = -\frac{1}{4\pi} \approx -0,1.$$

Wenn $h(t) = 1cm$,

$$h'(t) = -\frac{4}{\pi} > -1.$$

Wenn $h(t) = 0,1cm$,

$$h'(t) = -\frac{4}{\pi * 0,1 * 0,1} = -\frac{400}{\pi} > -100.$$

Ihr Freund trinkt ein Bier mit derselben Geschwindigkeit. Sein Bierglas ist 10cm hoch und hat ein Radius von 3 cm. Wie schnelle sinkt der Bierspiegel nach unten, wenn er trinkt? Berechnen wir mit der Volumenformel eines Zylinders :

$$v(t) = \pi r(t)^2 h(t) = 9\pi h(t).$$

Leiten wir beide Seiten ab :

$$v'(t) = 9\pi h'(t) \implies h'(t) = \frac{v'(t)}{9\pi}.$$

Da $v'(t) = -1$ ist

$$h'(t) = -\frac{1}{9\pi} \approx 0,04cm/s.$$

Diese Geschwindigkeit bleibt auch konstant.

Wenn Sie gut in der Vorlesung zugehört haben, sowie alle Ubungsäufgaben und die Probeklausur gut verstehen dann erwartet Sie folgendes ...

statt folgendes . . .

BONUS : (4 Punkte) Entdecken Sie den mathematischen Fehler des Artikels ,,Do Dogs Know Related Rates Rather than Optimization?"

Kapitel 10

Woher stammt sie? Die Stammfunktion

Wir haben gesehen, dass für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die ableitbar ist, die Ableitungsfunktion f' wichtige Informationen ergibt:

1. Die lineare Approximation in einer festen (verankerten) Eingabe x_0 ist
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Die lineare Approximation wendet man an, um die Ausgabe der Funktion in der Nähe von x_0 abzuschätzen, da
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Die Steigung des Graphs im Punkt x ist
$$f'(x).$$
Bitte nehmen Sie sich einen Moment, um zu uberlegen, was dies bedeutet. Die Steigung des Graphs im Punkt x zeigt wie die Ausgabe der Funktion im Punkt x sich ändert.

3. Für eine Funktion, deren Eingabe Zeit bedeutet, schreiben wir t für eine beliebige Eingabe. Dann ist
$$f'(t)$$
die Geschwindigkeit, mit der die Funktion sich im Zeitpunkt t ändert. Falls f zweimal ableitbar ist, dann ist
$$f''(t)$$
die Beschleunigung. Da $f''(t)$ die Ableitungsfunktion von $f'(t)$ ist, bedeutet $f''(t)$ die Geschwindigkeit, mit der die Geschwindigkeit sich im Zeitpunkt t ändert.

Wir haben auch gesehen, dass für eine Funktion $p(t)$ deren Eingabe Zeit ist und deren Ausgabe Position in einer Dimension ist, wenn die Position im Zeitpunkt $t = 0$ p_0 ist und die Geschwindigkeit im Zeitpunkt $t = 0$ v_0 ist, und die Beschleunigung eine Konstante a ist, dann ist

$$p(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + p_0.$$

Aufgabe: Was passiert, wenn die Beschleunigung gleich null ist?

Was passiert, wenn die Beschleunigung nicht konstant ist? Hier ist ein Beispiel: `http://www.airliners.net/aviation-forums/tech_ops/read.main/28289/`

Die Höhe eines Space Shuttle ist nach dem Liftoff :

$$\begin{bmatrix} \text{Höhe} & \text{Sekunden} \\ 100000ft & 42s \\ 200000ft & 59s \\ 300000ft & 72s \\ 400000ft & 82s \\ 500000ft & 90s \\ 650000ft & 99s \\ 800000ft & 107s \\ 1000000ft & 119s \end{bmatrix}$$

Nehmen wir an, dass die Beschleunigung konstant ist, und nennen wir diese a. Dann ist die Höhe nach t Sekunden

$$h(t) = \frac{at^2}{2}.$$

Lösen wir die Gleichung für a : wir können den Zeitpunkt $t = 42$ anwenden. Dann ist :

$$100000 = \frac{a(42)^2}{2}.$$

Lösen wir für a :

$$a = \frac{200000}{42^2} = 113,37... \approx 113.$$

Dann soll auch

$$200000 = \frac{a(59)^2}{2},$$

aber mit $a \approx 113$ ist

$$\frac{113(59)^2}{2} = 19667,5,$$

also fast 200000. Versuchen wir mit

$$300000 = \frac{a(72)^2}{2}, \quad a \approx 113,$$

dann ist

$$\frac{113(72)^2}{2} = 292896.$$

Dies ist auch ungefähr richtig, 300000. Wie wäre es mit 400000 Fu? und 82 Sekunden?

$$\frac{113(82)^2}{2} = 379906.$$

Dies ist etwas kleiner als 400000. Versuchen wir $t = 90$,

$$\frac{113(90)^2}{2} = 457650.$$

Dies ist noch kleiner als 500000. Mit $t = 99$,

$$\frac{113(99)^2}{2} = 553765,5.$$

Jetzt sehen wir, dass das Ergebnis zum Zeitpunkt $t = 99$ wesentlich zu klein ist. Was bedeutet dies? Wir haben angenommen, dass die Beschleunigung konstant ist. Dann haben wir nach unserem Satz die Höhe betrachtet

$$h(t) = \frac{at^2}{2}.$$

Da

$$h(42) = 100000,$$

haben wir für a gelöst :

$$100000 = h(42) = \frac{a(42)^2}{2} \implies a = \frac{200000}{42^2} \approx 113.$$

Wenn wir die Formel

$$h(t) = \frac{at^2}{2},$$

in den Zeitpunkten 59 sowie 72 anwenden, ist das Ergebnis fast richtig, nur etwas kleiner. Im Zeitpunkt 82 ist das Ergebnis etwa 20000 Fu? zu klein. Im Zeitpunkt 90 ist das Ergebnis etwa 400000 Fu? zu klein und im Zeitpunkt 99 ist das Ergebnis fast 50000 Fu? zu klein. Dementsprechend muss die Beschleunigung schneller werden, damit die Höhe gross genug wird. Entsprechend ist die Beschleunigung nicht konstant. Wir habe dies gerade mathematisch bewiesen.

Wie betrachtet man die Position (sowie die Ausgabe) für einen Prozess, dessen Beschleunigung nicht konstant ist? Dafür braucht man die Stammfunktion.

Definition 10.0.1. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt, falls es eine ableitbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt*

$$F'(x) = f(x), \qquad \textit{für jede } x \in \mathbb{R},$$

dann ist die Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion für f.

Warum ist die Funktion F nur eine Stammfunktion und nicht die Stammfunktion? Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt, falls F eine Stammfunktion für f ist,

$$F(x) + c$$

ebenso eine Stammfunktion für f. Nach dieser Definition sind :

1. Geschwindigkeit eine Stammfunktion für Beschleunigung;

2. Position eine Stammfunktion für Geschwindigkeit.

Satz 10.0.2. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls F und G beide Stammfunktionen für f sind, dann gibt es eine $c \in \mathbb{R}$ sodass gilt :*

$$F(x) - G(x) = c, \quad \textit{für jede } x \in \mathbb{R}.$$

Das heisst, dass wenn man eine Stammfunktion, wie F, gefunden hat, dann eine andere Stammfunktion, wie G ist

$$F(x) - c,$$

für eine reelle Zahl c.

Um zu wissen, welche Stammfunktion die richtige ist, braucht man die Ausgabe der Stammfunktion in einem festen (verankerten) Eingabepunkt. Zum Beispiel ... Die Cessna hat eine Beschleunigung von $2m/s^2$. Was ist ihre Geschwindigkeit nach t Sekunden? Da die Ableitung der Geschwindigkeit die Beschleunigung ist, suchen wir alle Funktionen, deren Ableitungsfunktion die Funktion

$$f(x) = 2, \quad \text{für jede } x \in \mathbb{R}.$$

ist. Für welche Funktionen ist die Ableitung konstant? Unsere Lieblingsfunktionen : die linearen Funktionen. Dementsprechend sind die Stammfunktionen für $f(x) = 2$ die Funktionen :

$$F_c(x) = 2x + c.$$

Um zu wissen, welche dieser Stammfunktionen die richtige ist, brauchen wir noch eine Information :

> *Wie schnell das Flugzeug war im Zeitpunkt $t = 0$.*

Nennen wir die Geschwindigkeit v_0. Dann ist die richtige Stammfunktion

$$v(x) = 2x + v_0.$$

Es ist egal ob wir $v(x) = 2x + v_0$ schreiben oder $v(t) = 2t + v_0$. Die Bedeutung ist jeweils : die Funktion, die ihre Eingabe vornimmt, mit 2 multipliziert, und danach mit v_0 addiert.

Sie können auch die Stammfunktion visuell vorstellen.

Satz 10.0.3. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (meßbare) Funktion. Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)dx$$

die Fläche unter dem Graph von f auf dem Intervall $[a, b]$. Diese nennt man ,,das bestimmte Integral der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$." Falls es eine Stammfunktion F für f auf dem Intervall gibt, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Wenn das Integral ohne Randpunkte so geschrieben ist :

$$\int f(x)dx,$$

ist die Bedeutung eine allgemeine Stammfunktion.

10.0.2 Beispiele:

1. Berechnen wir die Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 4x - 2$ und das Integral über dem Intervall $[-1, 2]$. Die Stammfunktionen sind :

   $$F_c(x) = 2x^2 - 2x + c.$$

   Die Integralrechnung ist dementsprechend

   $$2 * (2^2) - 2(2) + c - \big(2 * (-1)^2 - 2(-1) + c\big) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0.$$

2. Ein Patient hat hohen Blutdruck und soll keine Chips essen. Er hat zwar ein Medikament, das seinen Blutdruck senkt, und wenn er dieses nimmt, hat das Medikament eine Wirkung für zwei Stunden, sodass sein Blutdruck mit einer konstanten Beschleunigung von -2 nach unten geht. Wenn jeder Chip seinen Blutdruck von $+0,02$ erhöht und er mit einer konstanten Geschwindigkeit Chips isst, wie viel Chips kann er während einem zwei Stunden langen Film essen, ohne seinen Blutdruck zu ändern?

   Wir kennen die Beschleunigung des Medikaments : -2. Die Geschwindigkeit, mit der das Medikament seinen Blutdruck senkt ist dementsprechend : $-2t + v_0$, wobei v_0 die Geschwindigkeit ist, mit der zum Zeitpunkt 0 sein Blutdruck sinkt. Wenn wir annehmen, dass er zum Zeitpunkt $t = 0$ noch kein Medikament genommen hat und auch keine Chips gegessen hat, dann ist $v_0 = 0$. Sein Blutdruck nach dem Medikament ist eine Stammfunktion der Geschwindigkeit der Blutdrucksänderung. Was ist eine Stammfunktion für die Funktion

   $$v(t) = -2t?$$

Die Funktion

$$b(t) = -t^2$$

ist eine, und so ist

$$b_c(t) = -t^2 + c,$$

für jede $c \in \mathbb{R}$. Was bedeutet c? In diesem Fall, ist

$$c = b_c(0),$$

ist c also sein Blutdruck im Zeitpunkt $t = 0$. Wir wissen nicht was das ist, schreiben wir also

$$b(t) = -t^2 + b_0,$$

wobei

$$b_0 = b(0).$$

Wenn wir Einheiten für Zeit Stunden nehmen, dann ist nach zwei Stunden

$$b(2) = -(2)^2 + b_0 = b_0 - 4.$$

Jetzt berechnen wir, was mit den Chips passiert. Er isst mit einer konstanten Geschwindigkeit, nennen wir diese g. Dann ist die Anzahl Chips eine Stammfunktion der Geschwindigkeit. Dementsprechend ist

$$c(t) = gt + c_0,$$

wobei

$$c_0 = c(0).$$

Was bedeutet c_0? Dies ist die Anzahl Chips er im Zeitpunkt $t = 0$ gegessen hat. Wir nehmen an, dass er zu dem Zeitpunkt anfängt, Chips zu essen, ist also

$$c(0) = 0.$$

Die Anzahl Chips ist dementsprechend

$$c(t) = gt.$$

Nach 2 Stunden ist

$$c(2) = 2g.$$

Da sein Blutdruck um +0,02 pro Chip steigt, ist sein Blutdruck nach 2 Stunden

$$b_0 + (0,02) * 2g.$$

Das Medikament wirkt dagegen, und insgesamt ist sein Blutdruck nach 2 Stunden

$$b_0 + 0,04g - 4.$$

Damit diese b_0 bleibt muss

$$0,04g = 4 \implies g = 100.$$

Er kann also 100 Chips pro Stunde essen. Nom nom nom.

3. Es war gerade Weihnachten. Der erste Weihnachtstag ist der 25. Dezember. Der zweite ist der 26. Dezember. Zahlt man so weiter, ist der 7.1.2013 genau der 15. Weihnachtstag. Kennen Sie das Lied, "The twelve days of Christmas"? Es ist ziemlich nervig. Der Text lautet so (vgl `http://en.wikipedia.org/wiki/The_Twelve_Days_of_Christmas_(song)`)

   On the first day of Christmas, my true love gave to me, a partridge in a pear tree. On the second day of Christmas, my true love gave to me, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the third day of Christmas, my true love gave to me, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the fourth day of Christmas, my true love gave to me, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the fifth day of Christmas, my true love gave to me, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the sixth day of Christmas, my true love gave to me, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the seventh day of Christmas, my true love gave to me, seven swans a swimming, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the eighth day of Christmas, my true love gave to me, eight maids a milking, seven swans a swimming, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the ninth day of Christmas, my true love gave to me, nine ladies dancing, eight maids a milking, seven swans a swimming, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the tenth day of Christmas, my true love gave to me, ten lords a leaping, nine ladies dancing, eight maids a milking, seven swans a swimming, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the eleventh day of Christmas, my true love gave to me, eleven pipers piping, ten lords a leaping, nine ladies dancing, eight maids a milking, seven swans a swimming, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree. On the twelfth day of Christmas, my true love gave to me, twelve drummers drumming, eleven pipers piping, ten lords a leaping, nine ladies dancing, eight maids a milking, seven swans a swimming, six geese a laying, five golden rings, four calling birds, three French hens, two turtle doves, and a partridge in a pear tree.

   Jetzt zeichnen wir einen Graph. Die Höhe ist die Anzahl Geschenke und die horizontale Koordinate ist der Tag. Am ersten Tag, bekommen wir 1 Geschenk. Die Bedeutung dieses Lieds ist nicht so deutlich. Am zweiten Tag, bekommen wir entweder 2 neue Geschenke und wir behalten immer noch, was wir am ersten Tag bekommen haben, oder wir bekommen 2 neue Geschenke und noch dasselbe Geschenk wie am ersten Tag. Ich finde es realistischer, dass dasselbe Geschenk nicht immer weiter geschenkt wird. Dementsprechend bekommen wir am zweiten Tag 2 neue Geschenke und wir behalten immer noch, was wir am ersten Tag bekommen haben.

   Wie viele Geschenke haben wir am zwölften Tag insgesamt bekommen? Dies ist eine

Integralrechnung! Machen wir eine Tabelle :

$$\begin{bmatrix} \text{Tag} & \text{Anzahl Geschenke} \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 7 \\ 8 & 8 \\ 9 & 9 \\ 10 & 10 \\ 11 & 11 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Von Tag 0 bis Tag 1 bekommen wir ein Geschenk. Von Tag 1 bis Tag 2 bekommen wir zwei Geschenke. Die Anzahl Geschenke wird immer grösser. Dementsprechend ist die Geschenkgeschwindigkeit nicht konstant (!) Wir bekommen zwischen dem Zeitpunkt 0 und 1 ein Geschenk, und zwischen dem Zeitpunkt 1 und 2 zwei Geschenke. Die Anzahl Geschenke pro Tag sind : 1, 2, 3, 4, 5, . . . , 12. Die Anzahl wird immer um eins grösser. Die Anzahl Geschenke pro Tag ist die Geschwindigkeit mit der man Geschenke bekommt. Diese Geschwindigkeit wächst linear, dementsprechend ist die Beschleunigung

$$a = \frac{1\text{Geschenk}}{1Tag^2}.$$

Dementsprechend ist

$$g(t) = t + g_0,$$

wobei $g(t)$ die Geschwindigkeit mit der man Geschenke bekommt zum Zeitpunkt t Tage ist. Dementsprechend ist

$$G(t) = \frac{t^2}{2} + g_0 t + G_0,$$

die Anzahl Geschenke, die man nach t Tage hat, wobei G_0 die Anzahl Geschenke, die man vor Weihnachten hat, ist. Wir interessieren uns für die Anzahl Geschenke, die man dieses Weihnachten bekommt. Dementsprechend ist $G_0 = 0$, da man vor Weihnachten keine Weihnachtsgeschenke bekommt. Ist also

$$G(t) = \frac{t^2}{2} + g_0 t.$$

Wir wissen, dass

$$G(1) = 1 \implies \frac{1}{2} + g_0 = 1 \implies g_0 = \frac{1}{2}.$$

Das heisst, das im Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit mit der man Geschenke bekommt schon

$$\frac{1}{2}.$$

ist. Sie können dies so verstehen : Man hat schon angefangen, vor dem ersten Weihnachtstag Geschenke vorzubereiten. Jetzt können wir sehr leicht die gesamte Anzahl Geschenke am Ende des zwölften Weihnachtstages berechnen :

$$G(12) = \frac{12^2}{2} + \frac{12}{2} = 72 + 6 = 78.$$

Ebenso gilt :

$$\int_0^{12} g(t)dt = G(12) - G(0) = 78.$$

Falls wir immer noch Geschenke bis zum 15. Weihnachtstag bekommen dann bekommen wir :

$$G(15) = \frac{15^2}{2} + \frac{15}{2} = 120 = \int_0^{12} g(t)dt.$$

10.0.3 Eigenschaften des Integrals

Das Integral hat einige Eigenschaften, die den Eigenschaften der Ableitungsfunktion ähneln.

1. Linearität :
$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(t)dt.$$
Ich habe hier t statt x geschrieben, weil der Buchstabe unwichtig ist. Die Bedeutung ist das Wichtige. Es gilt ebenso :
$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
sowie
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$
und
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

2. Nach der Definition gilt :
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$
sowie
$$\int F'(x)dx = F(t) + c.$$

10.1 Tricks und Beispiele

1. Die Produkt-Regel kann bei Integralbestimmung ruckwärts angewendet werden. Dies nennt man Integration von Teilen. Falls Sie ein Integral der Form

$$\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

haben. Wenn Sie die Stammfunktionen einer dieser Funktionen erkennen können, können Sie zum Beispiel sehen, dass es eine $F(x)$ gibt sodass gilt :

$$F'(x) = f(x),$$

dann nach der Produkt-Regel gilt :

$$(Fg)'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Diese können Sie umschreiben, da $F'(x) = f(x)$:

$$(Fg)'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x).$$

Dementsprechend ist :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b (Fg)'(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Nach (2) ist also

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x).$$

Ebenso gilt :

$$\int f(x)g(x)dx = F(t)g(t) - \int F(x)g'(x)dx.$$

Hier ist ein Beispiel :

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Die Idee ist, dass die Stammfunktion einer der beiden Funktionen *einfacher* als die Funktion ist. Berechnen wir :

$$a(x) = x \implies a'(x) = 1, \quad b(x) = e^x \implies b'(x) = e^x = b(x).$$

Ich habe die Funktionen dieses Mal a und b genannt, da die Namen unwichtig sind, nur die Bedeutung zählt. In dem Beispiel ist $a'(x)$ einfacher als $a(x)$ und $b'(x)$ ist nicht einfacher. Dementsprechend wenden wir die Integration von Teilen mit

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x.$$

an. Da $f'(x) = f(x)$ ist $F(x) = f(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Nach der Regel ist :

$$\int_0^1 xe^x dx = F(1)g(1) - F(0)g(0) - \int_0^1 F(x)g'(x)dx.$$

Setzen wir die Funktionen ein :

$$\int_0^1 xe^x dx = e^1 * 1 - e^0 * 0 - \int_0^1 e^x * 1dx.$$

Wir haben schon gesehen, dass eine Stammfunktion für e^x ist e^x, also :

$$\int_0^1 xe^x dx = e - (e^1 - e^0) = 1.$$

Ebenso gilt :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x x = xe^x - e^x + c.$$

2. Die Ketten-Regel kann auch bei Integralbestimmung ruckwärts angewendet werden :

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = f(g(b)) - f(g(a)),$$

sowie

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c.$$

Zum Beispiel :

$$\int 2re^{r^2} dr.$$

Die Funktion

$$f(r) = e^r, \quad g(r) = r^2$$

und gilt :

$$f'(r) = e^r = f(r), \quad g'(r) = 2r, \quad f \circ g'(r) = f'(g(r))g'(r) = f(g(r))2r = e^{r^2}2r.$$

Manchmal ist es wichtig ein Integral bis um ∞ zu bestimmen.

Definition 10.1.1. *Falls der Grenzwert existiert ist für eine reelle Zahl a*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

Ein Beispiel ist

$$\int_0^\infty e^{-x}dx.$$

Da für

$$f(x) = e^{-x} \implies f'(x) = -e^{-x}$$

(welche Regel haben wir gerade angewendet?) ist

$$F(x) = -e^{-x}$$

eine Stammfunktion für e^{-x}. Dementsprechend ist (falls der Grenzwert existiert) :

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{R\to\infty} -e^{-R} - -e^0 = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{e^R} + 1.$$

Was passiert zu e^{-R} als $R \to \infty$? Da e^R immer grösser wird, sieht

$$e^{-R} = \frac{1}{e^R},$$

wie 1 durch eine GROSSE ZAHL geteilt aus. Etwa wie $\frac{1}{1000000000000000}$. Es geht gegen 0 und dementsprechend ist :

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

10.2 Aufgabe

1. (4P) Global Warming: Als Treibhauseffekt"bezeichnet man die Erwärmung der Erdoberfläche, die durch bestimmte Gase, welche den Wärmetransport aus der Erdatmosphäre verhindern, verursacht wird. Laut einer Studie steigt die Temperatur der Erdoberfläche mit einer Geschwindigkeit von $0,014t^{0,4}$ Grad Fahrenheit pro Jahr, wobei t die Anzahl der Jahre bezeichnet, die seit dem Jahr 2000 vergangen sind. Wie hoch wird die Temperatur im Jahr 2200 sein, wenn im Jahr 2000 die durchschnittliche Temperatur der Erdoberfläche 57,8 Grad Fahrenheit betrug? (vgl. [1])[1]

2. (4P) Wirksamkeit von Medikamenten: Es ist wichtig, für die Pharmaindustrie, die Eigenschaften der Medikamente, die sie herstellt, zu testen. Die Stärke des Arzneistoffes wird mit $R(M)$ bezeichnet, wobei M die Dosis angibt (d.h. die Menge des Arzneimittels, die in das Blut aufgenommen wird). Laut einer Studie verändert ein experimentalles Medikament die Temperatur eines Patienten mit einer Geschwindigkeit von

$$R(M) = \frac{3M^2}{M^3+1}$$

[1] Global Warming: The greenhouse effect is the rise in temperature that the Earth experiences because certain gases prevent heat from escaping the atmosphere. According to one study, the temperature is rising at the rate of $0.014t^{0.4}$ degrees Fahrenheit per year, where t is the number of years since 2000. Given that the average surface temperature of the earth was 57.8 degrees Fahrenheit in 2000, predict the temperature in 2200 (c.f. [1]).

Grad pro Milligram (M) Wirkstoffs. Finden Sie die absolute Änderung der Temperatur, die sich aus den ersten 4 Milligramm des Wirkstoffs ergibt.[2]

3. (4P) Das Poiseuille-Gesetz ([3]): Laminarströmung innerhalb eines Rohres weist eine Geschwindigkeit auf, die sich mit dem Abstand von der Wand des Rohres erhöht (z.B. Blutfluss in einer Arterie). Bezeichnet man $v(r)$ die Geschwindigkeit der Strömung r Centimeter von der Zentralachse der Röhre. Es seien P der Druck zwischen den Enden des Rohres, l die Länge des Rohres, η die Viskosität der Flüssigkeit und R das Radius des Rohres. Gemäß Poiseuilles Gesetzes gilt :

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

Die Geschwindigkeit der Strömung kann mit einer Integralbestimmung betrachtet werden:

$$2\pi \frac{P}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr.$$

Berechnen Sie das Integral. Das Ergebnis ist eine Funktion mit Eingabe R. Die Ausgabe ist dann die Geschwindigkeit der Strömung in Abhängigkeit von R.[3]

4. (4P) Finden Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit der Strömung in bezug zur vorherigen Aufgabe.[4] [5]

[2]Drug Sensitivity: It is important for pharmaceutical companies to test the characteristics of the drugs they design. The strength of the drug is given by $R(M)$ where M measures the dosage, i.e. the amount of medicine absorbed in the blood. Suppose an experimental drug changes a patientï¿$\frac{1}{2}$s temperature at the rate of

$$R(M) = \frac{3M^2}{M^3 + 1}$$

degrees per milligram of the drug. Find the total change in temperature resulting from the first 4 milligrams of the drug.

[3]Poiseulle's Law: Laminar flow within a tube has a velocity which increases with the distance from the wall of the tube (for example blood flow in an artery or magma flowing inside the earth). According to Poiseulle's Law the velocity of the flow r cm from the central axis of the tube is :

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

where P is the pressure between the ends of the tube, which has length l and radius R, and the viscosity of the fluid is η. The speed of the flow can be computed with the following integral:

$$2\pi \frac{P}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr.$$

Compute the integral : the result will be a function whose input is R and whose output is the velocity of the flow.

[4]Hinweis: Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit der Strömung durch die Querschnittsfläche geteilt.

[5]Compute the average velocity of the fluid flow. Hint: The average velocity is the velocity of the flow divided by the cross sectional area of the tube.

5. (4P) Wenden Sie das Beispiel “The Twelve Days of Christmas” an, um zu zeigen, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$, die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis um n ist :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

[6]

[6] Use the example “The Twelve Days of Christmas” to show that for any natural number $n \geq 1$, the sum of all natural numbers from 1 to n is

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Kapitel 11

Differentialgleichungen I : Die Sprache der Natur

Wussten Sie eigentlich, dass wenn viele Menschen in einem Hörsaal sitzen, der Saal wärmer wird? Ein physikalisches Gesetz von Newton ist :

> Newton's Law of Cooling states that the rate of change of the temperature of an object is proportional to the difference between its own temperature and the ambient temperature (i.e. the temperature of its surroundings).

Ich versuche, das Gesetz auf Deutsch zu übersetzen. Dann werden wir das Gesetz nochmal in die Sprache der Mathematik übersetzen.

> Die Geschwindigkeit mit der die Temperatur eines Objekts sich ändert ist proportional zu dem Unterschied zwischen seiner eigenen Temperatur und dem Temperatur der Umgebung.

Das Gesetz ist für Objekte, die selbst keine Hitze produzieren, die einfach daliegen und irgendwann die Temperatur der Umgebung haben werden. Wenn wir im Hörsaal sitzen, arbeiten unsere Körper, damit wir immer 98 Grad Fahrenheit Körpertemperatur haben. Das heisst, wir können das Gesetz nicht direkt anwenden, um zu verstehen, was im Hörsaal passiert. Das Gesetz können wir nur anwenden für jemanden der tot ist und daliegt. In diesem Fall besagt das Gesetz : die Geschwindigkeit mit der der Körper die Umgebungstemperatur annimmt, ist proportional zu dem Unterschied zwischen der Körpertemperatur und der Umgebungstemperatur. Schauen Sie auch Krimis im Fernsehen? Dr. Iles erkennt, wenn jemand gestorben ist, an der Körpertemperatur. Wie macht sie das? Es sei $v(t)$ die Geschwindigkeit mit der die Körpertemperatur sich ändert. Es sei 68 Grad F die Hörsaalstemperatur. Dann gilt :

$$v(t) \sim l(t) - 68,$$

wobei $l(t)$ das Körpertemperatur ist. Was bedeutet $\sim$?

Definition 11.0.1. *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen. Wir schreiben*

$$f(x) \sim g(x)$$

genau dann, wenn es eine Konstante $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ gibt, sodass gilt :

$$f(x) = kg(x).$$

Dementsprechend gilt :

$$v(t) = k\left(l(t) - 68\right).$$

Es gibt auch eine Beziehung zwischen $v(t)$ und $l(t)$. Da $v(t)$ die *Geschwindigkeit* mit der die Körpertemperatur sich ändert und $l(t)$ die Körpertemperatur ist, gilt :

$$l'(t) = v(t).$$

Wir können dann schreiben :

$$l'(t) = k\left(l(t) - 68\right).$$

Sowas nennt man *eine Differentialgleichung.* Jetzt kommen wir endlich zur Sache : es ist keine Kindergarten-Mathematik mehr!

In der Schule lernt man Gleichungen für unbekannte *Zahlen* zu lösen. Unsere Lieblingsgleichungen sind die linearen, da sie die einfachsten sind. Zum Beispiel, lösen Sie die folgende Gleichung für die unbekannte Zahl x :

$$3x - 2 = 5.$$

Es gibt auch nicht lineare Gleichungen, die wir auch lösen können, zum Beispiel :

$$3x^2 - 2x = 5.$$

Umgeschrieben :

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-5)}}{2(3)}.$$

Andere Gleichungen sind nicht unbedingt lösbar :

$$\log(sin(e^x)) = 4x^5 - 12^x.$$

Für sowas würde ich ein Computerprogramm empfehlen. Eine Differentialgleichung ist wie eine Gleichung für eine Variable aber statt einer reellen Zahl ist die Variable jetzt eine Funktion. Wir bezeichnen diese unbekannte Funktion oft mit f aber wir können auch andere Buchstaben anwenden, wie l,

$$l'(t) = k\left(l(t) - 68\right).$$

11.1 Konstante-Koeffiziente Differentialgleichungen

Wir werden natürlich mit dem einfachsten Fall anfangen. Die einfachsten Differentialgleichungen sind konstante-koeffiziente lineare Differentialgleichungen.

Definition 11.1.1. *Eine (reelle)* konstante-koeffiziente (kk) Differentialgleichung *ist eine Gleichung die reelle Zahlen sowie mindenstens eine der folgenden enthält :*

1. *Eine (unbekannte) Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. *Die Ableitung der Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
3. *Die* n^{te} *Ableitung der Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, die wir mit* $f^{(n)}$ *bezeichnen*

Der Grad einer Differentialgleichung ist das größte n *sodass es*

$$f^{(n)}$$

in der Gleichung gibt (und nichts weg fällt). Falls es nur f *und keine Ableitung der Funktion in der Gleichung gibt, dann ist der Grad* 0*. Eine kk Differentialgleichung Grades* n *heißt* linear *genau dann, wenn es eine lineare Funktion* $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *und eine Funktion* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gibt, sodass die Differentialgleichung*

$$L(f, f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n-1)}, f^n) = G$$

geschrieben werden kann.

Wir werden die Definition mithilfe von Beispielen kennen lernen.

11.1.1 Beispiele KK Differentialgleichungen

Welche der folgenden sind KK Differentialgleichungen? Welche der folgenden sind lineare KK Differentialgleichungen? Berechnen wir jeweils den Grad sowie für die lineare KK Differentialgleichungen die Funktion L und die Konstante c.

1. $l'(t) = k\,(l(t) - 68)$. In diesem Beispiel ist die Funktion mit l statt f bezeichnet. Diese Gleichung enthält die Funktion l sowie ihre Ableitungsfunktion l' und die reellen Zahlen k und 68. Dementsprechend passt die Gleichung in die Definition mit $n = 1$. Der Grad ist 1. Ist die Gleichung linear? Laut der Definition muss es eine $L : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ geben, sodass die Differentialgleichung

   $$L(f, f') = c$$

   geschrieben werden kann. Wir können die Gleichung so schreiben :

   $$l'(t) - kl(t) = -68k.$$

Was passiert? Die Ableitungsfunktion l' ist mit $-k$ mal der Funktion l addiert. Diese ist *linear.* Wir suchen eine lineare Funktion

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

sodass

$$L(l(t), l'(t)) = l'(t) - kl(t).$$

Ich habe Sie schon gewarnt, dass die gesamte Mathematik miteinander verbunden ist...

Da

$$\begin{bmatrix} -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(t) \\ l'(t) \end{bmatrix} = -kl(t) + l'(t) = l'(t) - kl(t)$$

ist die Funktion

$$L(x, y) = -kx + y$$

und die Konstante

$$c = -68k.$$

Dann gilt :

$$L(l(t), l'(t)) = c.$$

2. $f^2 - f'' = 0$. In diesem Fall habe ich die Eingabe der Funktion f weggelassen. Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung zweites Grades. Ist sie linear? Um dies zu beantworten, da die Gleichung Grad 2 ist, schauen Sie in der Gleichung was mit f, f', sowie f'' passiert. Erst ist f^2. Das heisst $f * f$. Ist das mit einer *linearen Funktion* $L : \mathbb{R}^{2+1} \to \mathbb{R}$ möglich? *NEIN.* Eine lineare Funktion kann nur ihre Eingabevariable mit *Zahlen* multiplizieren und danach miteinander addieren. Diese Gleichung ist dementsprechend *nicht linear.*

3. $\frac{f'}{f} + f^{(3)} = f^{(3)}$. In diesem Beispiel könnte man denken, dass der Grad 3 ist, aber da $f^{(3)}$ auf beiden Seiten steht, kann sie weg fallen. Die Gleichung ist gleich :

$$\frac{f'}{f} = 0.$$

   Diese ist eine Gleichung erstes Grades.

4. $x^2 f(x) = f^{(4)}(x)$. Was passiert hier? Dies ist nicht eine kk Differentialgleichung, da die Funktion f mit der Variable multipliziert ist. Diese ist zwar eine Differentialgleichung, nämlich eine nicht-kk lineare Differentialgleichung viertes Grades. Wir werden aber erst später mit nicht-kk Differentialgleichungen arbeiten.

11.2 Lineare KK-Differentialgleichungen Grades 0 und 1

Wir fangen mit den einfachsten Fällen an. Was bedeutet eine lineare KK-Differentialgleichung (DGL) Grades 0? In diesem Fall, gibt es eine

$$L : \mathbb{R}^{0+1} \to \mathbb{R}$$

sowie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ sodass gilt :

$$L(f) = c.$$

Da $\mathbb{R}^{0+1} = \mathbb{R}$, ist L eine lineare Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dementsprechend gibt es m und b reelle Zahlen sodass

$$L(x) = mx + b.$$

Dann gilt :

$$L(f) = mf + b = c \implies f = \frac{c-b}{m}.$$

Die Funktion f ist also eine konstante Funktion. Konstante Funktionen sind zwar einfach aber nicht so interessant, da sie wenig beschreiben können. Eine konstante Funktion kann zum Beispiel nicht beschreiben wie Magma unter der Erde fliesst, oder wie Alkohol die mathematische Technik eines Menschen beeinflusst. Eine konstante Funktion kann nur eine reelle Zahl beschreiben.

Jetzt haben wir den Kindergarten bestanden und wir können in Grad 1 aufsteigen. Die einfachste lineare KK-DGL Grades 1 ist :

$$f' = c,$$

wobei c eine konstante ist. Was ist (sind) die Lösung(en)? Für welche Funktionen ist ihre Ableitungsfunktion gleich einer Konstante? Die linearen Funktionen. Dementsprechend ist jede

$$f_b(x) = cx + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der DGL.

Die nächste einfachste lineare KK-DGL Grades 1 ist :

$$f' = f.$$

Wissen Sie, welche Funktion diese Gleichung erfüllt? Die Funktion

$$f(x) = e^x$$

ist *ihre eigene Stammfunktion.* Dementsprechend ist

$$f(x) = e^x$$

eine Lösung der Gleichung. Da für $c \neq 0$

$$f' = f \iff cf' = cf$$

ist für jede $c \neq 0$

$$f_c(x) = ce^x$$

auch eine Lösung der Gleichung. Wie sieht eine allgemeine lineare KK-DGL aus? Laut der Definition gibt es eine $L : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}$ sowie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ sodass

$$L(f, f') = c.$$

Da L *linear* ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ (WARUM? Lesen Sie bitte nochmal die Definition :) sodass

$$L(f, f') = af + bf'.$$

Dementsprechend kann jede lineare KK-DGL Grades 1 so geschrieben werden :

$$af + bf' = c.$$

Wir können diese auch so schreiben :

$$f' = \frac{c - af}{b} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}f.$$

Was sind die Lösung(en)? Für $c = 0$ haben wir die DGL

$$f' = -\frac{a}{b}f.$$

Was ist eine Funktion, sodass f' gleich f selbst mal eine Konstante ist? Wir wissen, dass

$$f(x) = e^x \implies f' = f.$$

Wenn man versucht irgendwas neues zu verstehen, ist es oft hilfreich, mit etwas Bekanntem zu vergleichen. Die DGL

$$f' = -\frac{a}{b}f$$

sieht fast wie

$$f' = f$$

aus, nur wird $-a/b$ mit f multipliziert. Hier können wir einen Trick anwenden.

11.2.1 Trix are for Kids

DGL sind *nicht* für Kinder. Sie sind nicht so einfach zu lösen. Es gibt keine festen Regeln wie beim Ableiten. Sobald man eine DGL lösen kann, soll man diese DGL wie einen Trick in seine Hosentaschen stecken, damit man den Trick später anwenden kann. Hier sind unsere ersten zwei Tricks :

1. Die Lösungen der DGL
$$f' = c$$
sind
$$f(x) = cx + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

2. Die Lösungen der DGL
$$f' = f$$
sind
$$f(x) = ce^x.$$

Die DGL
$$f' = cf$$
ähnelt der DGL
$$f' = f,$$
da falls $c = 1$ ist, dann ist die DGL $f' = cf$ genau $f' = f$. Dementsprechend sollen wir die Gleichung
$$f' = cf$$
mithilfe der Gleichung $f' = f$ lösen. Hier kommt der erste Trick. Statt f schreiben wir
$$f \circ g,$$
wobei g auch eine unbekannte Funktion ist. Dann ist die DGL
$$(f \circ g)' = c(f \circ g).$$

Nach der Kettenregel ist die linke Seite :

$$f'(g) * g'.$$

Wir suchen also f sowie g sodass :

$$f'(g) * g' = c * f(g).$$

Auf der linken Seite ist $f'(g)$ mit g' multipliziert und auf der rechten Seite ist c multipliziert mit $f \circ g$. Die DGL die wir schon kennen ist :

$$f' = f,$$

und eie Lösung ist :

$$f(x) = e^x.$$

Versuchen wir $f \circ g(x) = e^{g(x)}$. Gilt :

$$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x).$$

Die DGL ist dann

$$(f \circ g)' = e^g g' = cf \circ g = ce^g.$$

Teilen wir durch e^g (WARUM ist e^g immer ungleich 0?) dann haben wir :

$$g' = c.$$

Diese haben wir schon gelöst!

$$g(x) = cx + b.$$

Dementsprechend ist

$$e^{g(x)} = e^{cx+b}$$

eine Lösung der DGL

$$f' = cf.$$

Die allgemeinste lineare KK-DGL Grades 1 ist :

$$f' = cf + b.$$

Wir können folgende DGL lösen :

$$f' = cf, \quad f' = b.$$

Für die Funktion

$$f(x) = e^{cx}$$

ist

$$f' = cf.$$

Wir haben aber auf der rechten Seite auch b. Wie wäre es mit :

$$f(x) = e^{cx} + k,$$

wobei k eine unbekannte reelle Zahl ist. Dann ist

$$f'(x) = ce^{cx}, \quad cf = ce^{cx} + ck \implies f' = cf - ck.$$

Damit

$$f' = cf + b,$$

muss

$$f' = cf - ck = cf + b \implies -ck = b \implies k = -\frac{b}{c}.$$

Dementsprechend ist eine Lösung der allgemeinen lineare KK-DGL Grades 1 :

$$f(x) = e^{cx} - \frac{b}{c} \implies f' = cf + b.$$

Falls wir eine allgemeiner Lösung haben wollen, multiplizieren wir e^{cx} mit einer Konstante und schauen wir was wir dann in der Funktion ändern müssen, damit sie wieder die DGL löst :

$$f(x) = me^{cx} + k.$$

Dann ist

$$f'(x) = mce^{cx}, \quad cf = cme^{cx} + ck \implies f' = cf - ck.$$

Damit

$$f' = cf + b,$$

muss

$$-ck = b \implies k = -\frac{b}{c}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL

$$f' = cf + b$$

sind dementsprechend

$$f(x) = me^{cx} - \frac{b}{c}.$$

Jetzt können wir das Beispiel der Körpertemperatur lösen! Die DGL ist :

$$l'(t) - kl(t) = -68k.$$

Wenn wir diese DGL im Vergleich zu der allgemeinen lineare KK-DGL Grades 1 schreiben wir :

$$l' = kl - 68k.$$

Dann ist $c = k$ und $b = -68k$, also die Lösungen sind:

$$l(t) = me^{kt} - \frac{-68k}{k} = me^{kt} + 68.$$

Um zu wissen, was m sein soll, brauchen wir mehr Information. In diesem Beispiel können wir annehmen, dass das Opfer zum Zeitpunkt $t = 0$ stirbt und dementsprechend ist die die Körpertemperatur im Zeitpunkt $t = 0$ 98 Grad F. Also gilt :

$$l(0) = m + 68 = 98 \implies m = 30.$$

Die Lösung ist dann :

$$l(t) = 68 + 30e^{kt}.$$

Jetzt müssen wir aber k irgendwie betrachten. Dafür brauchen wir noch etwas Information. Dr. Isles ist klug und messt das Körpertemperatur als der Körper gerade gefunden würde und das Temperatur ist 80 Grad. Die Polizei sammelt während einer Stunden Informationen aus dem Hörsaal. Dann messt Dr. Isles das Körpertemperatur. Das Temperatur ist 75 Grad. Wenn Dr. Isles die Temperatur zum ersten mal messt, weiss sie nicht, wie lange die Leiche dort tot lag. Nennen wir diese unbekannte Zeit τ. Sie weiss folgendes :

$$l(\tau) = 80, \quad l(\tau + 1) = 75.$$

Jetzt wendet sie die mathematische Formel an :

$$l(\tau) = 80 = 68 + 30e^{\tau k}$$

$$l(\tau + 1) = 75 = 68 + 30e^{k(\tau+1)} = 68 + 30e^{k\tau}e^{k}.$$

Wir können zuerst 68 subtrahieren :

$$12 = 30e^{k\tau}, \quad 7 = 30e^{k\tau}e^{k}.$$

Dann können wir die erste Gleichung durch die zweite Teilen :

$$\frac{12}{7} = \frac{1}{e^k} = e^{-k} \implies \ln(12/7) = -k \implies k = -\ln(12/7).$$

Jetzt können wir k reinsetzen :

$$l(\tau) = 80 = 68 + 30e^{\tau k} \implies 12 = 30e^{\tau k} \implies \frac{12}{30} = e^{\tau k}.$$

Auf beiden Seiten wenden wir ln an :

$$\ln(12/30) = \tau k = -\ln(12/7)\tau \implies \tau = -\frac{\ln(12/30)}{\ln(12/7)}.$$

Mit einem Computer oder Taschenrechner sieht man :

$$\tau \approx 1,7.$$

Dementsprechend war das Opfer etwa eine 1,7 Stunden $\approx$ 102 Minuten vor der ersten Messung des Temperaturs ermordet. Damit Sie nicht diese Schritte jedes mal machen müssen, können Sie den folgenden Satz verwenden.

Satz 11.2.1 (Newton-Temperatur-Gesetz). *Die Temperatur eines Objekts das in einer Umgebung liegt, die kühler als das Objekt ist, nach t Stunden ist :*

$$T(t) = T_u + (T_0 - T_u)e^{-ct},$$

wobei T_u die Temperatur der Umgebung ist und T_0 die Temperatur des Objekts im Zeitpunkt $t = 0$ ist und c eine positive Konstante ist, die von der Umgebung sowie dem Objekt abhängt.

Wir haben ohne den Satz gelöst :

$$l(t) = 68 + 30e^{kt}.$$

Unsere

$$k = -\ln(12/7) \approx -0,5.$$

Dementsprechend ist "c" in dem Satz gleich $-k$. Da T_0 das Temperatur im Todeszeitpunkt ist, gilt

$$T_0 = 98°F,$$

und der Hörsaal war $68°F$, also gilt :

$$T_u = 68, \quad T_0 - T_u = 30.$$

Wir sehen, dass was wir ohne den Satz berechnet haben mit dem Satz übereinstimmt!

Was passiert aber wenn wir alle im Hörsaal sind und *nicht tot* sind? In diesem Fall wird unsere Wärme an die Luft abgegeben und unsere Körper (wenn wir alle gesund sind) produzieren weiter Wï¿½rme. In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass jeder von uns in einer Luftblase sitzt und dass wir jeweils unsere Luftblase wärmen. Laut dem Gesetz ist also das "Objekt" die Luftblase, die von uns gewärmt wird. Die Temperatur ändert sich durch :

$$T(t) = T_M + (T_u - T_M)e^{-kt},$$

wobei $T_M = 98$ die Temperatur eines Menschen ist und T_u die Temperatur der Luft als wir reingekommen sind. In jeder kleinen Luftblase steigt die Temperatur nach diesem Gesetz aber die Luftblasen sind nicht isoliert. Dementsprechend wärmen wir die Luft und je enger der Hörsaal ist desto wärmer wird er. Je mehr Luft rein und raus kommen kann, desto weniger wärmen wir die Luft.

Bitte denken Sie nicht, dass Sie *neue* DGL lösen mussen. Sie müssen nur DGL klassifizieren können (linear, nicht linear, KK, nicht KK, der Grad). Sie müssen nur die DGL lösen können, die in dieser Veranstaltung gelöst werden. Es ist sehr wichtig, dass Sie erkennen können, ob eine DGL linear ist, was der Grad ist, und ob die DGL KK oder nicht-KK ist. Es gibt nur einige DGL Sonderfälle die wir ohne Computer oder anspruchsvolle Mathematik lösen können. Sie müssen nur erkennen, in welchem Fall Sie sind, und welche Technologie Sie anwenden müssen.

11.3 Aufgabe

1. (4P) Welche der folgenden Gleichungen sind lineare KK-DGL? Berechnen sie für alle KK-DGL den Grad und die lineare Funktion L mit Hilfe der Definition. (Which of the following are linear constant coefficient differential equations? For those which are, compute the degree and the linear function L as in the definition).

   - $xf(x) = f'(x)$
   - $\frac{3f''(x)}{4f^{(4)}(x)} = 8$
   - $f' - 4f^{(4)} = 3f^{(3)}$
   - $\frac{f'}{f} + \pi = 3$

2. (4P) Sie arbeiten als Gerichtsmediziner für die Polizei von Miami. Eine Leiche wird bei 30 Grad C Raumtemperatur gefunden. Sie messen die Temperatur der Leiche und stellen um 3 Uhr früh 35 Grad C fest. Nach einer Stunde, genau um 4 Uhr morgens, ist die Körpertemperatur nur noch bei 34 Grad C. Wann wurde das Opfer ermordet?

   (You are working as a forensic specialist for the police in Miami. A body was discovered in a 30 degree Celcius room. You measure the temperature at 3 am, and it's 35 degrees C. In an hour, exactly at 4am, the body temperature measures 34 degrees C. When was the victim murdered?)

3. (4P) Sie arbeiten für die World Health Organization. Ein neues tödliches Bakterium wurde in Namibia entdeckt. Um zu entscheiden, welche Sicherheitsmassnahmen getätigt werden müssen, sollen Sie berechnen, wie lange ein infizierter Patient ohne medizinische Hilfe überleben kann. Nehmen Sie däzu an, dass die Anzahl der Bakterien im Körper des Patienten zum Zeitpunkt der Infektion 1 beträgt. Aus Untersuchungen im Labor wissen Sie ausserdem, dass die Geschwindigkeit, mit der die Population wächst proportional zur Populationsgröesse ist, die Anzahl der Bakterien nach einer Stunde 1000 beträgt und eine Population von 1000000 Bakterien für den Patienten tëdlich ist. Wie lange kann der Patient ohne medizinische Hilfe überleben? (You're working for the World Health Organization. A new strain of deadly bacteria has been discovered in Namibia. To determine which safety measures are necessary, you need to compute how long an infected patient can survive without treatment. To do this, you may assume that when the victim is infected, the number of bacteria in their body is 1. You also know based on lab tests that in an hour the bacteria population will be 1000, and when the population reaches 1000000, the patient will die. How long does the patient have to live?)

4. (4P) Trix are for Kids! Hasen sind für ihre hohe Reproduktionsrate bekannt. Da Hasen aber nicht gerade Ihre liebsten Haustiere sind, möchten Sie eine gewisse Anzahl an Hasen kaufen und diese dann an ein wildes Wolfsrudel verfüttern. Hierzu gehen Sie folgendermaßen vor: In einem Fachgeschäft kaufen Sie eine Hasenart von der bekannt

ist, dass sie sich jede drei Jahre vervierfacht. Nun geben Sie den Hasen drei Jahre Zeit für ihre Reproduktion. Anschließend verfüttern sie in den nächsten drei Jahre 3/4 der Hasenpopulation an die Wölfe, damit sie also nach der Reproduktion die gleiche Anzahl an Hasen besitzen. Ihr Wolfsrudel besteht aus vier Wölfen und Sie möchten jeden Wolf mit 50 Hasen pro Jahr füttern. Wie viele Hasen sollten sie also im Fachgeschäft zu Beginn der drei Jahre kaufen?

(Trix are for kids, silly wabbit. Rabbits are known for their reproduction. You don't want rabbits however, you'd like to support a wild family of wolves by feeding them rabbits. The species you intend to buy quadruples its population every three years. You'd like to first wait three years for the rabbits to reproduce and then over the next three years feed the wolves 3/4 of the population. That way when they reproduce again in 3 years, you'll end up with the same number. There are four wolves and you'd like to feed each of them 50 rabbits a year (of course, they don't just eat rabbits, they also hunt). How many rabbits should you initially buy?

5. (4P) Sie arbeiten als Geologe und arbeiteten in Fukushima während sich das Erdbeben, welches den Tsumani auslöste, ereignete. Nun sollen sie den Japanern helfen die Radioaktivität unter Kontrolle zu bringen. Ihre Aufgabe besteht darin zu berechnen wie lange ein Mitarbeiter in dem radioaktiv belasteten Bereich sein kann, ohne gesundheitlichen Schaden zu nehmen. Wie schnell die radioaktive Belastung steigt, ist proportional zur Menge radioaktiven Materials, dass auf die Person bereits eingewirkt hat. Sobald man den kontaminierten Bereich betritt ist diese Menge 1. Nach einer Minute ist sie auf 2 gestiegen. Eine gesundheitliuche Schädigung tritt ein, sobald die Menge 1024 überschreitet. Wie lange darf sich ein Mitarbieter maximal in dem kontaminierten Bereich aufhalten? (You work as a geologist and had the misfortune to be in Fukushima when the earthquake which caused the deadly Tsunami struck. You must now help the Japanese to control the radioactive material in Fukushima. To do so you will compute how long a worker can be exposed to the radioactive material without dangering their health. The speed with which the radioactive material goes into your body is proportional to the amount of material which is in your body. When you go into the room, the amount of radioactive material is immediately 1. After ten minutes it's already 2. A person can withstand up to 1024 until their health becomes at risk. How long can one work with the radioactive material before their health is at risk?)

Kapitel 12

Differentialgleichungen II: Die Matrix Reloaded

Eine DGL ist

> *Eine Gleichung deren Variable eine* ***unbekannte Funktion*** *ist. Die DGL enthält entweder die Funktion (Grad 0) und/oder eine oder mehre Ableitungsfunktionen der unbekannte Funktion.*

Eine DGL ist wie eine Gleichung für eine unbekannte für Erwachsener, da die Unbekannte nicht eine Zahl, sondern eine Funktion ist. Einige DGLs sind nicht zu schwierig zu lösen aber die meisten sind sehr schwierig (die meisten DGLs sind noch nie reine mathematisch gelöst!). Noch komplizierter aber relevanter für Anwendungen sind partielle Differentialgleichungen.

Da DGLs schwierig zu lösen sind, müssen Sie nur folgende können :

1. DGLs klassifizieren (linear, nicht linear, kk, nicht kk, homogen - wird gleich definiert, nicht homogen, Grad).
2. Lineare kk sowie nicht kk DGLs in Matrix-Form schreiben.
3. Einige ineare DGLs Grades 1 und 2 lösen können.
4. Information/ein Problem als einer DGL schreiben.

12.1 Formeln für lineare kk-DGL Grades 0 und 1

Die Lösungen allgemeine lineare kk-DGL Grades 0 und 1 sind folgende :

1. Grad 0: die unbekannte Funktion f erfüllt :

   $$af + b = m,$$

   wobei $a, b, m \in \mathbb{R}$. Dann ist

   $$f(x) = \frac{m - b}{a}.$$

2. Grad 1: die unbekannte Funktion f erfüllt :

$$f' = m, \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Dann ist für jede $b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b,$$

eine Lösung.

3. Grad 1: die unbekannte Funktion f erfüllt :

$$f' = mf, \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Dann ist für jede $c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ce^{mx}$$

eine Lösung.

4. Grad 1: die unbekannte Funktion f erfüllt :

$$f' = mf + b, \quad m, b \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Dann ist für jede $c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ce^{mx} - \frac{b}{m}$$

eine Lösung.

12.1.1 Beispiele

Lineare kk-DGL Grades 0 sind uninteressant, da die Lösungen konstant sind. Eine konstante Funktion kann keine natürliches Prozess beschreiben, sie kann nur eine feste Zahl beschreiben. Wie können Sie erkennen, wenn Sie eine Situation oder Problem haben, die mit einer kk-DGL Grades 1 gelöst werden kann? Hier sind einige Beispiele.

1. Die Ableitung einer unbekannten Funktion ist eine nicht-null Konstante. Mathematisch bedeutet dass, die unbekannte Funktion f erfüllt :

$$f' = m, \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Nach # 2 muss die unbekannte Funktion f eine Funktion der Form :

$$f(x) = mx + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Um b festzustellen, brauchen Sie mehr Information. Es reicht, wenn Sie die Ausgabe von f in einer bestimmten Punkt kennen. Zum Beispiel : ein Apfel fällt von einer Baum. Schreiben Sie eine Gleichung, deren Eingabe Sekunden nach dem Zeitpunkt, als der Apfel anfängt, zu fallen, und deren Ausgabe die Geschwindigkeit des Apfels ist. Die unbekannte Funktion in diesem Beispiel ist $v(t)$, die Geschwindigkeit des Apfels. Diese ist durch Anziehungskraft entschieden. Die Beschleunigung der Anziehungskraft der Erde ist ungefahr $-10m/s^2$, wobei die $-$ die Richtung bedeutet (d.h. unten). Diese ist eine Konstante. Da Beschleunigung die Ableitungsfunktion der Geschwindigkeit haben wir eine DGL für die unbekannte Funktion v:

$$v' = -10.$$

Die Lösungen sind nach # 2

$$v(t) = -10t + b,$$

wobei $b \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wie können wir b herausfinden? Wir müssen nur denken, was die Situation bedeutet. Im Zeitpunkt $t = 0$ fängt der Apfel an, um zu fallen. Dementsprechent genau in dem Zeitpunkt ist $v(0) = 0$. Nach der Formel $v(t) = -10t + b$, wenn wir $t = 0$ rein setzen haben wir

$$v(0) = -10 * 0 + b = 0 \implies b = 0.$$

Die Lösung der DGL ist also

$$v(t) = -10t.$$

Vielleicht wussten Sie das schon aber jetzt können Sie sehen, wie diese Situation in einer DGL passt. Man kann fast alles mit irgendeine (partielle)-DGL beschreiben.

Der folgende Satz kann auch hilfsreich sein.

Satz 12.1.1. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion. Wenn diese Funktion proportional zu der Änderung der Funktion ist, das heisst gibt es eine konstante $k \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$ sodass gilt :*

$$f' = kf.$$

Dementsprechend gibt es eine konstante $a \in \mathbb{R}$ sodass

$$f(x) = ae^{kx}.$$

2. Viele Population sind proportional zu der Änderung der Population, wie zum Beispiel Bakterien. Wenn eine Population proportional zu der Änderung der Population ist, gilt :

$$P'(t) = kP(t).$$

Dementsprechend ist

$$P(t) = ae^{kt}.$$

Für Anwendungen muss man a und k finden. Was bedeutet a? Im Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$P(0) = ae^0 = a.$$

Dementsprechend schreiben wir P_0 statt a, da a bedeutet die Population im Zeitpunkt $t = 0$. Was bedeutet k? Diese konstant entscheidet wie schnell die Population wächst. Je grosser k desto schneller wächst die Population. Führen wir jetzt ein konkretes Beispiel durch. Nehmen wir an, dass wir wissen, dass im Zeitpunkt $t = 1$ die Population 500 ist und im Zeitpunkt $t = 3$ die Population 1000 ist. Dann ist :

$$P(1) = 500, \quad P(3) = 1000.$$

Wenden wir die Formel für P an :

$$P(t) = P_0 e^{kt} \implies P(1) = P_0 e^{k*1} = 500, \quad P(3) = P_0 e^{k*3} = 1000.$$

Um k zu finden, können wir die linke Seite sowie die rechte Seite dieser Gleichung teilen :

$$P_0 e^k = 500$$

$$P_0 e^{3k} = 1000 \implies \frac{P_0 e^k}{P_0 e^{3k}} = \frac{500}{1000}.$$

Diese vereinfacht ist

$$e^{-2k} = \frac{1}{2}.$$

Mithilfe der ln Funktion ist :

$$-2k = \ln \frac{1}{2} \implies k = -\frac{1}{2} \ln(0,5).$$

Dementsprechend ist

$$P(t) = P_0 e^{-0,5t \ln(0,5)} = P_0 \left(e^{\ln(0,5)}\right)^{-0,5t} = P_0(0,5)^{-0,5t} = P_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{-0,5t}$$

$$= P_0 2^{t/2}.$$

Jetzt müssen wir nur P_0 finden, um die Funktion $P(t)$ herauszufinden. Dafür können wir $P(1)$ verwenden :

$$P(1) = 500 = P_0 2^{1/2} \implies P_0 = \frac{500}{2^{1/2}} = \frac{500}{\sqrt{2}}.$$

Dementsprechend ist die Population im Zeitpunkt t

$$P(t) = \frac{500}{\sqrt{2}} 2^{t/2}.$$

3. Ein anderes Beispiel ist Radioaktivität. Einige der schweren Atomen sind zu gross um alle ihre klein Teilchen zu enthalten. Das heisst, klein Teilchen wegfallen. Diese Teilchen sind so klein, dass sie durch unserem Körper gehen können und die Atom unsere Körper zerstürren. Die Geschwindigkeit, mit der die Teilchen raus dem Atom fliessen,

ist Proportional zu der Menge Teilchen (Partikeln) die schon raus sind. Dementsprechend ist

$$R'(t) = kR(t) \implies R(t) = R_0 e^{kt},$$

da schon wieder ist $R_0 = R(0)$ die Menge Partikeln, die im Zeitpunkt $t = 0$ raus sind. Führen wir nochmal ein Beispiel durch. Wir wissen, dass

$$R(2) = 20, \quad R(10) = 2000.$$

Wenden wir jetzt die Formel für $R(t)$ an :

$$R(2) = R_0 e^{2k} = 20,$$

$$R(10) = R_0 e^{10k} = 2000.$$

Teilen wir die zweite Gleichung durch die erste :

$$\frac{R(10)}{R(20)} = \frac{R_0 e^{10k}}{R_0 e^{2k}} = \frac{2000}{20}.$$

Vereinfachen :

$$e^{8k} = 100.$$

Betrachten wir ln auf beide Seiten :

$$8k = \ln(100) \implies k = \frac{\ln(100)}{8}.$$

4. Ein Beispiel für die letzte DGL ist die folgende Situation : die unbekannte Funktion ist Proportional zu der Funktion plus eine Konstante. Diese bedeutet genau :

$$f' \sim f + b,$$

und nach der Definition “Proportional” gibt es eine $k \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$ sodass gilt :

$$f' = k(f + b) = kf + kb.$$

Nach der letzten Regel ist die Funktion

$$f(x) = ce^{kx} - \frac{kb}{k} = ce^{kx} - b.$$

Ein Beispiel dieser Situation ist das Gesetz von Newton. Für ein Objekt, das im Zeitpunkt $t = 0$ Temperatur T_0 ist und die Umgebung Temperatur T_u ist, ist nach t Zeit-Einheiten das Temperatur des Objekts

$$T(t) = T_u + (T_0 - T_u)e^{-kt}.$$

12.2 Homogen und Inhomogen DGL

Man kann weiter zwischen verschiedene DGLs entscheiden.

Definition 12.2.1. *Eine DGL Grades n ist linear, falls es bestimmte (d.h. bekannte!) Funktionen $g_0, g_1, \ldots, g_n$ sowie G gibt, sodass die Gleichung als*

$$\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \ldots \\ f^{(n)} \end{bmatrix} = G,$$

wobei f die unbekannte Funktion bezeichnet. Die bekannte Funktionen $g_0, g_1, \ldots, g_n$ nennt man die Koeffizienten *der DGL. Falls $G = 0$, dann ist die Gleichung* Homogen. *Falls $G \neq 0$, dann ist die Gleichung* Inhomogen.

Falls die bekannte Funktionen $g_0, \ldots, g_n$ sowie G alle konstante Funktionen sind, dann ist eine lineare DGL kk. **Vorsicht:** Manche Wissenschaftler nennen eine lineare DGL kk, falls die koeffiziente Funktionen $g_0, \ldots, g_n$ alle konstante Funktion sind – aber G muss nicht unbedingt konstant sein.

Nach der Regeln für Matrix Multiplikation können wir jede lineare DGL Grades n so schreiben :

$$g_0(x)f(x) + g_1(x)f'(x) + g_2(x)f''(x) + \ldots + g_n(x)f^{(n)} = G(x).$$

12.2.1 Beispiele

Zuerst klassifizieren wir verschiedene DGLs.

1. $x^2 f^{(3)}(x) + 2f(x) = 3x$. Diese DGL ist eine lineare, nicht KK, inhomogen DGL Grades 3. Schreiben wir die DGL lieber so :

$$2f(x) + 0f'(x) + 0f''(x) + x^2 f^{(3)}(x) = 3x.$$

Dann laut der Definition sind die bekannte Funktionen :

$$g_0(x) = 2, \quad g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0,$$

$$g_3(x) = x^2, \quad G(x) = 3x.$$

Dann kann der DGL so geschrieben werden :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{bmatrix} = 3x.$$

2. $e^{f(x)} = x^2 f^{(4)}(x)$. Diese DGL können wir so umschreiben :

$$e^{(f(x)} - x^2 f^{(4)}(x) = 0.$$

Diese DGL ist *nicht linear*, nicht KK, Grad 4. Wenn wir $g(x) := e^x$ definieren, dann gibt es

$$g \circ f(x)$$

in der DGL. Um eine DGL *linear* zu sein, musste g eine lineare Funktion wie $mx + b$ sein, dann wäre $g \circ f(x) = mf(x) + b$. Da dies nicht der Fall ist, sieht man, dass die DGL nicht linear ist.

3. $f^4 - 3f'' = 2$. Vorsicht! Was bedeutet f^4? Diese ist *nicht* dasselbe wie $f^{(n)}$, deswegen schreiben wir die anders von einander. f^4 bedeutet $f * f * f * f$. Wenn wir $g(x) := x^4$ definieren, dann enthält diese Gleichung

$$g \circ f$$

und wie im letzten Beispiel, ist g nicht linear und dementsprechend ist die DGL ebenso nicht linear. Diese DGL ist eine nicht lineare DGL Grades 2.

Sie können DGLS mit folgenden Schritte entscheiden :

1. Ist es überhaupt eine DGL?

2. Falls ja, was ist der Grad der DGL?

3. Ist die DGL linear oder nicht linear?

4. Falls die DGL nicht linear ist, sind Sie jetzt fertig!

5. Falls die DGL linear ist, ist sie KK oder nicht KK?

6. In beidem Fällen, schreiben Sie die DGL (Grades n) als

$$\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \dots \\ f^{(n)} \end{bmatrix} = G.$$

7. Ist die DGL homogen (d.h. $G = 0$) oder inhomogen (d.h. $G \neq 0$)?

Eine abstraktere Art, um DGLs zu definieren, ist durch den folgenden Satz.

Satz 12.2.2. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ oder $n = 0$. Für jede DGL Grades n gibt es eine $m \in \mathbb{N}$ sowie $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass gilt :*

$$F(f, f', \dots, f^{(n)}) = G.$$

Die DGL ist linear, genau dann, wenn es Funktionen $g_0, g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt sodass gilt :

$$F(f, f', \dots, f^{(n)}) = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \dots \\ f^{(n)} \end{bmatrix} = G.$$

Die DGL ist KK, genau dann, wenn die Funktionen $g_0, g_1, \dots, g_n$ alle konstante sind. Die DGL ist homogen, genau dann, wenn $G = 0$. Falls $G \neq 0$, dann ist die DGL inhomogen.

Was bedeutet dieser Satz? Die Funktionen F und G ergeben die DGL. Für das Beispiel :

$$e^{f(x)} - x^2 f^{(4)}(x) = 0,$$

ist die Funktion

$$F(f, f', f''', f^{(4)}) = e^{f(x)} - x^2 f^{(4)}(x),$$

und

$$G(x) = 0.$$

Für folgendes Beispiel :

$$\frac{f'}{f} + f^2 = f'' - 4$$

Damit wir besser sehen können, was für eine Art DGL die ist, sollen wir zuerst die Gleichung mit f multiplizieren, damit diese f im Nenner weg ist :

$$f' + f^3 = ff'' - 4f.$$

Jetzt bringen wir alle fs auf einer Seite :

$$f' + f^3 - ff'' + 4f = 0.$$

Die DGL ist Grad 2 und die Funktion F ist

$$F(f, f', f'') = f^3 + 4f + f' - ff''.$$

Diese ist nicht linear.

Noch eine wichtige Definition.

Definition 12.2.3. *Eine DGL für eine unbekannte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man eine gewöhnliche DGL. Es gibt auch Gleichungen für unbekannte Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wobei n und m natürliche Zahlen sein können. Diese nennt man eine* partielle *Differentialgleichung.*

Normalerweise wenn man ,,Differentialgleichung" sagt, bedeutet man ,,gewöhnliche Differentialgleichung." Auf dem Grund haben wir immer nur DGLs benutzt. Ich möchte, dass Sie bereit für die Zukunft sind, und dementsprechend ist es gut für Sie zu wissen, dass es auch partielle Differentialgleichungen gibt. Diese sind oft PDGLs genannt.

12.3 Lineare DGL Grades 2

Eine DGL Grades 2 enthält die zweite Ableitungsfunktion der unbekannte Funktion. Sie können schon einige lineare DGLs Grades 2 lösen! Zum Beispiel : wenn ein Objekt sich bewegt mit einer konstanten Beschleunigung gleich a, was ist die Positionsfunktion? Nach dem Satz ist

$$p(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + p_0,$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist und p_0 die Anfangsposition ist. Da Beschleunigung die zweite Ableitung der Positionsfunktion ist, können wir zuerst :

$$p''(t) = a$$

schreiben. Diese ist eine DGL! Sie haben schon DGLs gelöst! Diese DGL ist eine lineare, KK, und für $a \neq 0$ inhomogen DGL Grades 2.

Ein anderes Beispiel ist folgende :

$$f'' = f'.$$

Da f'' die Ableitung der Funktion f' ist, können wir diese DGL so schreiben :

$$(f')' = f'.$$

Nennen wir $g := f'$. Dann ist die DGL :

$$g' = g.$$

Sie kennen die Lösungen schon :

$$g(x) = ce^x.$$

Dann gilt :

$$f'(x) = ce^x \implies f(x) = ce^x,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Allgemeiner für

$$f'' = bf' \implies f(x) = ce^{bx}.$$

Ein anderes wichtiges Beispiel ist folgende DGL :

$$f'' = -\lambda^2 f,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Kennen Sie die Lösung(en)? Wenn Sie die nicht kennen, ist das in Ordnung. Die Lösungen sind :

$$f(x) = \sin(\lambda x), \quad \text{oder} \quad f(x) = \cos(\lambda x).$$

Wir können mit dieser zwei Lösungen auch andere Lösungen finden und die sind :

$$f(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x),$$

wobei A und B reelle Zahlen sind. Die Gleichung

$$f'' = -\lambda^2 f$$

ist so wichtig, dass sie einen Name hat : *die Laplace-Gleichung.* Diese Gleichung beschreibt Schwingungen, Vibrationen, Klang, und noch viel mehr.

Schreiben wir die Laplace-Gleichung so :

$$f'' + \lambda^2 f = 0 \iff \lambda^2 + f'' = 0$$

dann können wir die Gleichung auch so schreiben :

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{bmatrix} = 0.$$

Dann sehen wir, dass die Gleichung linear, Grad 2, kk, und homogen ist. Sobald die Gleichung nicht mehr homogen ist, zum Beispiel für eine Funktion G die nicht die 0 Funktion ist :

$$f'' + \lambda^2 f = G(x),$$

dann nennt man die Gleichung *eine Schrödinger Gleichung.* Diese sind wesentlich schwieriger zu lösen.

12.3.1 Beispiele

1. Die einfachste lineare, kk, homogen DGL Grades 2 ist :

   $$f'' = 0.$$

   Beispiele dafür sind Funktion, deren Beschleunigung gleich null ist. Die Lösungen sind :

   $$f(x) = mx + b,$$

   wobei m und b reelle Zahlen sind. Um zu erkennen welche Zahlen m und b sind, da es zwei unbekannte gibt, brauchen Sie zwei Informationen.

2. Die nächste einfachste lineare kk DGL Grades 2 ist die inhomogene DGL :

   $$f'' = a,$$

   wobei $a \in \mathbb{R}$. Beispiele sind Funktionen, deren Beschleunigung eine nicht-null Konstante ist. Die Allgemeine Lösungen dieser DGL sind :

   $$p(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + p_0.$$

   Ich habe andere Buchstaben benutzt aber die Bedeutung ist gleich als wenn wir mit f und x schreiben.

3. Die nächste einfachste lineare kk DGL Grades 2 ist

$$f'' = bf' \implies f(x) = ce^{bx}.$$

   Beispiele sind Situationen, wenn die Beschleunigung proportional zu der Geschwindigkeit ist.

4. Die Laplace-Gleichung ist :

$$f'' = -\lambda^2 f.$$

   Die Lösungen sind :

$$f(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x).$$

12.4 Komplexe Zahlen

Eine lineare KK DGL Grades zwei ist :

$$f'' = cf, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für

$$f(x) = e^{\sqrt{c}x}$$

ist

$$f'(x) = \sqrt{c}e^{\sqrt{c}x}, \quad f''(x) = ce^{\sqrt{c}x}.$$

Falls $c < 0$ ist, dann gibt es $\lambda > 0$ sodass gilt :

$$c = -\lambda^2.$$

Die Lösungen der Gleichung

$$f'' = -\lambda^2 f$$

sind

$$f(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x).$$

Die Funktion

$$e^{\sqrt{c}x}$$

soll aber auch eine Lösung sein! Für $c < 0$ ist $\sqrt{c}$ nicht mehr eine reelle Zahl.

Definition 12.4.1. *Eine komplexe Zahl ist*

$$a + ib,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und i erfüllt

$$i^2 = -1.$$

Man nennt a der reelle Teil der Zahl $a+ib$ und b der imaginär Teil der Zahl $a+ib$. Die konjugierte-komplexe Zahl der $a+ib$ ist

$$a+i(-b).$$

Schreiben wir $z=a+ib$, dann ist

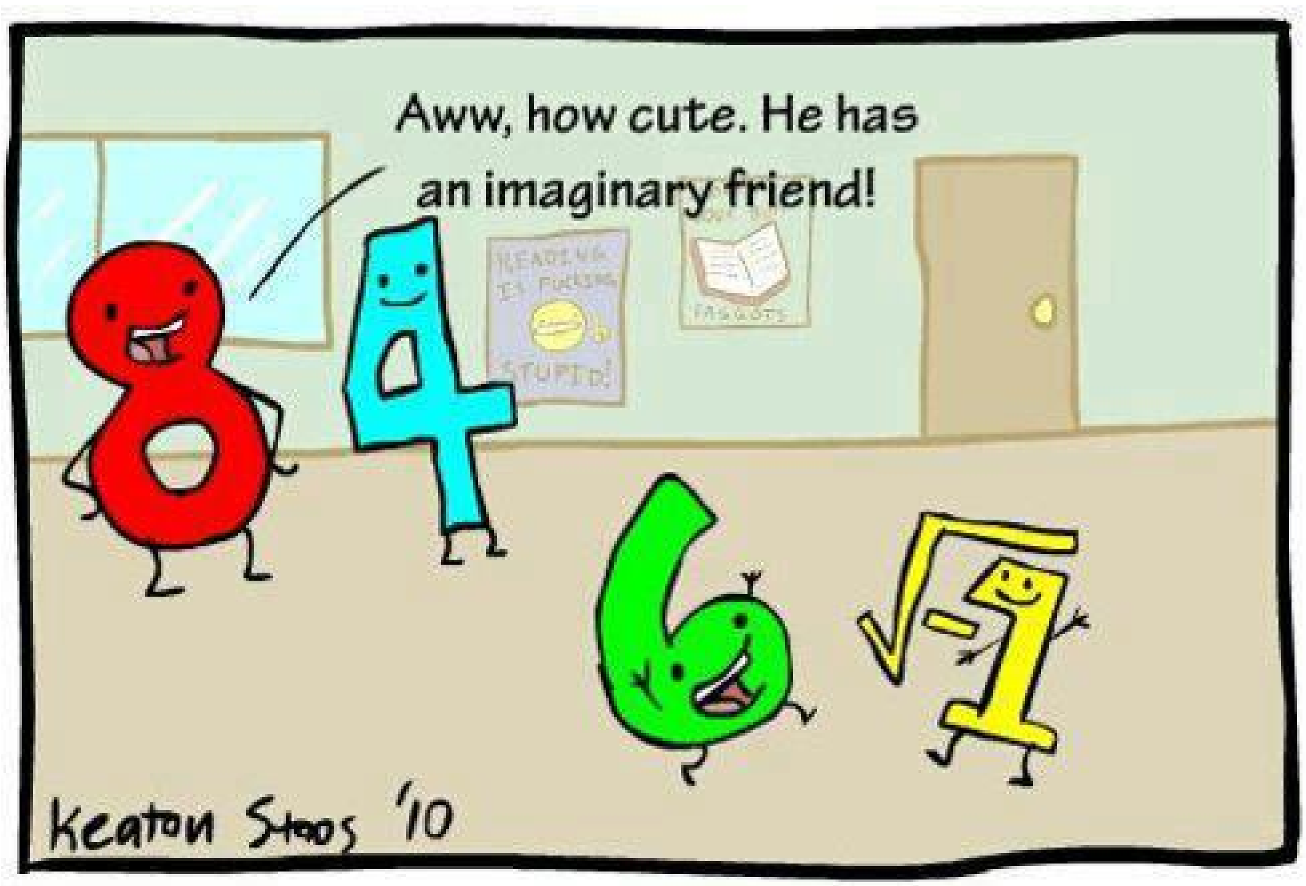
$$\overline{z}=a+i(-b).$$

Für eine reelle Zahl $\lambda>0$ ist

$$e^{i\lambda}=\cos(\lambda)+i\sin(\lambda).$$

Nach der Definition gilt die Eulersche Formel, die die fünf wichtigste Zahlen der Mathematik sowie der Natur enthält :

$$e^{i\pi}+1=0.$$



12.5 Aufgabe

1. (4p) Klassifizieren Sie folgende DGLs :

$$\frac{f'}{f}=5.$$

$$3t^2 - e^t f'(t) = f^{(5)}(t)$$
$$t^2 f''(t) - tf'(t) + f(t) = \cos(\pi t).$$
$$\frac{f^2 - 9}{f - 3} = 27f'''$$

(Classify the above differential equations - in English these are abbreviated Diff EQs).

2. (4p) Für die DGLs der letzten Aufgabe, die lineare sind, schreiben Sie die DGL in der Matrix-Form. (For the Diff EQs in the last exercise which are linear, write them in the matrix form).

3. (4p) Eine Saite eines Instruments länges L vibriert. Diese ist mit der folgende Gleichung beschrieben :
$$s''(x) = -\lambda^2 s(x), \quad s(0) = 0, \quad s(L) = 0.$$
Finden Sie alle Lösungen dieser Gleichung. Die Bedeutung $s(0) = 0$ sowie $s(L) = 0$ ist, dass die Ende der Saite sich nicht bewegen können, genau wie bei einer Gitarrensaite. Man nennt diese ,,Dirichlet Rand Bedingungen." (The string of an instrument of length L vibrates. This is described by the equation above. Find all the solutions of the equation. The meaning of $s(0) = 0$ and $s(L) = 0$ is that the ends of the string are fixed, like on a guitar. This is called "Dirichlet boundary condition.")

4. (4p) Ein Flugzeug hat eine Beschleunigung von $2m/s^2$. Schreiben Sie eine DGL für die unbekannte Funktion, deren Eingabe Sekunden nach das Flugzeug startet ist und deren Ausgabe die Entfernung in Meter von der Anfangsposition. Welche Information kennen Sie für dieser Funktion im Zeitpunkt $t = 0$? Diese Information nennt man ,,Anfangsbedingungen."(An airplane accelerates at $2m/s^2$. Write a Diff EQ for the unknown function whose input is time (in seconds) after the plane starts and whose output is the distance in meters from the starting position. What information do you know about this function at time $t = 0$? This information is called "initial conditions.")

5. (4p) Wie teilt man komplexe Zahlen? Für eine komplexe Zahl $a + ib$ die ungleich 0 ist (d.h. entweder $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder beide $a \neq 0$ sowie $b \neq 0$), was ist
$$\frac{1}{a + ib}?$$
Schreiben Sie
$$\frac{1}{a + ib}$$
als
$$c + id,$$
wobei c und d reelle Zahlen sind. Hinweis : Versuchen Sie mit 1 verkleidet... (How does one divide complex numbers? For a non-zero complex number $a + ib$ (that means a and b cannot both be 0) what is
$$\frac{1}{a + ib}?$$

Write

$$\frac{1}{a+ib}$$

as

$$c+id,$$

with c and d real numbers. Hint : Try using 1 in disguise...)

Damit Sie für die Klausur bereit Sind, werden Sie eine Probeklausur in der Vorlesung der Woche 28.1.13 bekommen. Diese Probeklausur werden wir zusammen in der Vorlesung lösen und Sie können jede Menge Fragen stellen bis um Sie alles verstanden haben. Danach bekommen Sie eine *zweite* Probeklausur. Wenn Sie eine gute Note bekommen wollen, sollen Sie folgendes tun :

1. NICHT an der zweite Probeklausur schauen!

2. Zuerst, die erste Probeklausur lernen, die wir in der Vorlesung zusammen gearbeitet haben.

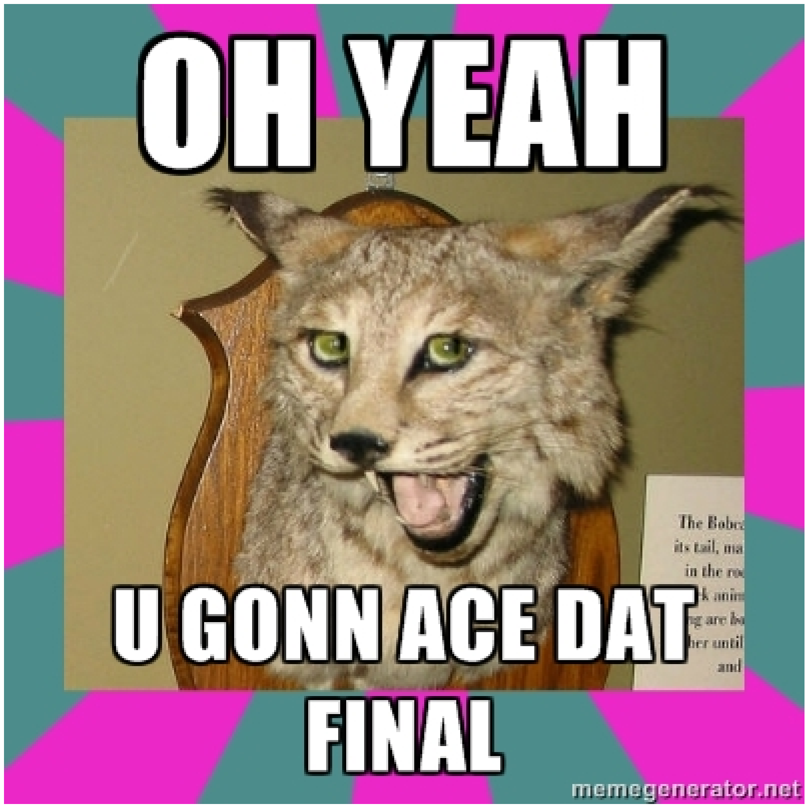
3. Danach, für jede Aufgabe, die Sie nicht sofort allein lösen könnten, üben Sie ähnliche Aufgabe aus dem Skript und aus den Übungsblätter.

4. Wenn Sie mit aller Arten Aufgabe sich wohl fühlen, dann nehmen Sie zwei Stunden Zeit. Stellen Sie einen Timer für zwei Stunden, schliessen Sie Ihrer Tür, damit Niemand Ihnen stört, und schreiben Sie die zweite Probeklausur.

5. Kommen Sie in die Vorlesung der Woche 2.2.13 und passen Sie gut auf: wir werden die zweite Probeklausur zusammen lösen.

6. In der Zeit vor der Klausur, üben (lernen) Sie beide Probeklausuren.

7. Vor der Klausur, ausreichend schlafen, gut frühstucken, und kein Angst haben. Wenn Sie diese Schritte machen, werden Sie es schaffen!


OH YEAH
U GONN ACE DAT FINAL
memegenerator.net

Literaturverzeichnis

[1] F. R. Adler, *Modeling the Dynamics of Life: Calculus and Probability for Life Scientists,* 2nd ed. Brooks and Cole, (2004).

[2] B. C. Berresford and A. M. Rockett, *Applied Calculus,* 5th ed. Cengage Learning (2008).

[3] R. Vandiver, Bryn Mawr College, `http://www.brynmawr.edu/math/people/vandiver/BiologicalapplicationstoincorporateintoCalculus.htm`