Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 19 november 1961

1. För att lösa ekvationssystemet

$$y(x^4 - y^2 + x^2) = x, \qquad x(x^4 - y^2 + x^2) = 1$$

kan man byta ut den andra ekvationen mot den ekvation, som erhålles som skillnaden mellan den första ekvationen, multiplicerad med x, och den andra ekvationen, multiplicerad med y. Detta ger det nya systemet

$$y(x^4 - y^2 + x^2) = x, \qquad y = x^2.$$

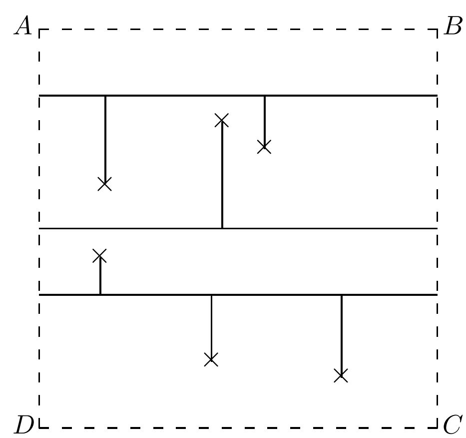
Visa att de båda systemen ej har samma lösningar och förklara utförligt orsaken härtill.

2. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara n godtyckliga positiva tal. Bevisa olikheten

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \frac{x_3}{x_{n-2}} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

3. En person har en ljusstake för n ljus. Han har för avsikt att tillverka n likadana ljus, som skall sättas i staken och sedan brännas på följande sätt under n söndagar: Första söndagen tänder han ett ljus och släcker det efter en timme, andra söndagen tänder han två lämpligt valda ljus och släcker dem efter en timme o.s.v. fram till den sista söndagen då han tänder alla ljusen och låter dem brinna i en timme. Problemet är nu: För vilka n kan denna ljustillverkning och ljusbränning ske på ett sådant sätt att alla ljusen är nedbrunna efter den n-te söndagen? Ange i dessa fall någon regel för vilka ljus som skall tändas de olika söndagarna.

4. $ABCD$ är en kvadrat med sidan 1 längdenhet. I kvadraten finns 288 punkter utplacerade. Man vill i kvadraten lägga in ett vägnät av följande typ: Dels skall det finnas huvudvägar som går från BC till AD och som är parallella med AB, och dels skall det vinkelrätt från dessa huvudvägar utgå en biväg till var och en av punkterna (se figuren). Visa att man kan välja vägnätet på sådant sätt att dess totala längd är mindre än 24 längdenheter. (Vägarnas bredd skall härvid försummas.) Kan man erhålla ett ännu skarpare resultat? Det anses som en förtjänst att ha använt en metod som kan utnyttjas även när det gäller att välja korta vägnät vid godtyckligt punktantal.



5. Låt n beteckna ett positivt heltal. Visa att funktionen $x^6/6 + x^2 - nx$ har exakt ett minimivärde a_n. Bevisa att man kan finna ett tal k, sådant att

$$\lim_{n\to\infty} a_n/n^k$$

existerar ändligt och skilt från 0. Ange k och gränsvärdet.